プログラミング-言語・基礎・実践- 21－14
(1995. 3. 10)

SA的なGAのある改善とそのマルコフ連鎖的解析
交叉確率可変および一様交叉における検討

村田 貴彦、鈴木 譲
大阪大学理学部 数学教室
〒560 豊中市 待兼山 1の1 大阪大学理学部 数学教室
06-850-5315 / suzuki@math.sci.osaka-u.ac.jp

あらまし

本論文では、T.E.Davisの考案したアルゴリズム(Davisアルゴリズム)について突然変異確率$\mu \to 0$にするSA的な手法がとられているが、一定であった交叉確率χを可変に改善し、さらに、一点交差を一様交差に改善しても、Davisアルゴリズムが適用可能であることを示している。さらに、Vose-Liepinsの公式の一様交叉版の公式を導いている。

キーワード 遺伝的アルゴリズム、マルコフ連鎖、交叉確率可変、一様交叉、Davisアルゴリズム、シュミレイティドアニーリング

The Reform of the SA-like GAs and its Markov Chain Analysis
The Investigation in Unfixed Crossover Probability and Uniform Crossover

Takahiko Murata, Joe Suzuki
Department of Mathematics, Faculty of Science, Osaka University
1-1 Machikaneyama Toyonaka Osaka 560, Japan
06-850-5315 / suzuki@math.sci.osaka-u.ac.jp

Abstract

A simulated annealing (SA)-like strategy for genetic algorithms (GAs) which reduces the crossover and mutation probabilities to zero during the generation changes is proposed. It is also shown that the original Davis algorithm can be extended into both the case where the crossover is not limited to the one-point crossover and the case where the crossover probability is not fixed during the implementation of the algorithm. Besides, the uniform crossover counterpart of the Vose-Liepins formula is derived.

key words Genetic Algorithm, Markov Chain, unfixed crossover probability, uniform crossover, Simulated Annealing (SA), Davis Algorithm,

SA 的な GA のある改善とそのマルコフ連鎖的解析
ー交叉確率可変および一様交叉における検討ー

村田 貴彦、 鈴木 讓

abstract: 本論文では、T.E.Davis の考案したアルゴリズム (Davis アルゴリズム) について突然変異確率$\mu \to 0$ にする SA 的な手法がとられているが、一定であった交叉確率χを可変に改善し、さらに、一点交差を一様交差に改善しても、Davis アルゴリズムが適用可能であることを示している。さらに、Vose-Liepins の公式の一様交叉版の公式を導いている。

1 Introduction

遺伝的アルゴリズム (Genetic Algorithm:GA) は、ダーウインの自然淘汰理論に基礎を置く生物の自然進化の過程を模倣した、組合せ最適化問題のための探索アルゴリズムである。すなわち、一定個数の個体からなる集団に対して、再生 (reproduction)、交叉 (crossover)、突然変異 (mutation) の 3 遺伝的操作を施し、高い適合度を持った個体を含む集団を形成するアルゴリズムである。ここで、各個体は問題の各解候補に対応しており、適合度はその問題の目的関数および制約条件に対応している。通常、世代交代に置ける 3 遺伝的操作は、つぎのように適用される (Simple GA)。

1. ルーレット方式 (文献 [2] 237 ページ) による再生
2. 交叉確率χの交叉
3. 突然変異確率μの突然変異

過去の GA の理論的研究の成果には、J. H. Holland による Schema Theorem [30]、A. D. Bethke による Walsh 関数解析 [24]、D. E.Goldberg の最小だまし問題 (minimum deception problem) の解析 [4] などがあるが、これらの性能評価は、特別な例題の部分的な性能にしか適用できていないのが現状である。

GA の個別の例題を Markov 連鎖で解析する研究は K. A. DeJong [26] によってかなり以前から、最近でも D. E. Goldberg らによって始められている [2]。しかし、GA の挙動を一般的に表現する以下の様な状態の定義は、ごく最近の M. D. Vose [10, 13] および T. E. Davis [1, 25] らによって独立に考案されている。すなわち、状態$s \in S$を個々の個体の頻度が$z[s] = (z[0, s], z[1, s], \cdots, z[N-1, s])$であるような集団の状態として定義する。ここで、$z[i, s]$を状態$s \in S$における個体$i \in I$の頻度、$S$を考えられる状態$s$の集合、$I = \{0, 1, \ldots, N-1\}$を考えられる個体$i$の集合 ($N = |I|$) また$\sum_{i \in I} z[i, s] = M$, $s \in S$とする。特に、各遺伝子が 0,1 の 2 値で個体の長さがLである場合には、$N = 2^L$となる。そして、Sの cardinality $|S|$ は、次の様に表される。[10]

$$|S| = \binom{M+N-1}{M} \tag{1}$$

この一般的な枠組のもとで、今日までに以下のような成果が報告されている。

1. 1 点交叉の場合に限って、Markov 連鎖の推移確率についての explicit な導出 (Vose-Liepins の公式) [11]。
2. 突然変異確率μをある一定レベルから 0 まで下げるアルゴリズム (Davis アルゴリズム) の提案 [1, 25]。
3. エリート保存戦略の解析と最適化 [6, 7]。

GA の Markov 連鎖的解析に関して、本論文では一様交叉を適用した場合の Markov 連鎖の解析を試みる。

本論文では特に、世代交代の初期に、適合度の高い個体からなる集団への収束を急がず, 交差確率χ及び突然変異確率μを高めにしておき、集団が

ある程度の成熟に達した段階で、χおよびμを0に近づけるいわゆるSA的な方法の実現を検討する。GAのSA的な方法は新しいものではない。(Davisアルゴリズムでは、パラメータχは固定している)ここで、Simulated Annealing(SA)は熱現象の模倣から考案された最適化問題の一解法であり、温度と呼ばれるパラメータ$T > 0$をある決められた速さにしたがって下げることにより、最適解を見出すことを保証している。

2 Markov 連鎖的解析

次世代の集団を生成する確率は、現時点の集団自身ではなく、その集団における各個体(individual)の個数に依存する。以下では、一般性を失うことなく、各個体の頻度からなるベクトルが $z[s] = (z[0,s], z[1,s], \cdots, z[N-1,s])$ であるような集団を状態 s にあるといい、この状態推移に関するMarkov 連鎖を考える。このとき、 $s \in S$から、$s' \in S$への推移確率 $Q(s'|s)$ は、多項分布

$$Q(s'|s) = \frac{M!}{\prod_{i \in I} z[i, s']!} \prod_{i \in I} P(i|s)^{z[i,s']} \qquad (2)$$

で与えられる。ここで、$P(i|s)$ は、$s \in S$から $i \in I$ が生成される確率である。次に、選択のみが実行されるとき ($\mu = \chi = 0$) の確率 $P_1(i|s)$ は、すなわち、1 オペレータ・アルゴリズムのときは、

$$P_1(i|s) = \frac{z[i,s]f[i]}{\sum_{i' \in I} z[i',s]f[i']} \qquad (3)$$

また、突然変異オペレータも実行されるとき ($\chi = 0$) の確率 $P_2(i|s)$ は、すなわち、2 オペレータ・アルゴリズムのときは、

$$P_2(i|s) = \sum_{i' \in I} \mu^{H(i,i')}(1-\mu)^{L-H(i,i')} P_1(i'|s) \qquad (4)$$

で与えられる。ここで、$i, j \in I$の $H(i,j)$ は、Hamming 距離を表す。式 (2) の推移確率 $Q(s'|s)$ は、$\mu > 0$ であるとき primitive であることが、知られている [31]。

以下では、選択・交叉・突然変異が、実行されるとき (3 オペレータ・アルゴリズム) を考えるが、このとき交叉については、1 点交差 [3] は仮定しない。以下の性質を満足すれば良い。

性質 1 選択された2つの親が同じ個体であれば、まったく親と同じ子しかを生成しない

例えば、1 点交叉に限らずに、2 点交叉、一様交叉、多点交叉、セグメント交叉のような交叉でも良い [3]。このときの確率 $P(k|s)$ は

$$P(k|s) = \sum_{i,j} P_1(i|s)P_1(j|s)r_{i,j}(k), \; i,j \in I, \; s \in S \qquad (5)$$

ここで、$r_{i,j}(k)$ は、選択された2つの個体 $i,j \in I$ から、突然変異と 交叉によって $k \in I$が生成される確率である。また、1 点交叉 に対して、次のことが、知られている (Vose-Liepins の公式) [11]。

$$r_{i,j}(k) = r_{i \oplus k, j \oplus k}(0)$$

ここで、

$$\begin{aligned} r_{i,j}(0) &= \frac{1-\chi}{2}[\mu^{|i|}(1-\mu)^{L-|i|} + \mu^{|j|}(1-\mu)^{L-|j|}] \\ &+ \frac{\chi}{2}\sum_{k=1}^{L-1}\frac{1}{L-1}[\mu^{|i|-\Delta(i,j,k)}(1-\mu)^{|i|-\Delta(i,j,k)} \\ &+ \mu^{|j|+\Delta(i,j,k)}(1-\mu)^{|j|+\Delta(i,j,k))}] \end{aligned} \qquad (6)$$

および[1]

$\Delta_{i,j,k} = |(2^k-1) \oplus i| - |(2^k-1) \oplus j|$ とした。

本論文の主要結果のひとつは、一様交叉についての Vose-Liepins の公式にあたる。

Theorem 1

$$\begin{aligned} r_{i,j}(0) &= \sum_{t=0}^{|i \oplus j|} \frac{1}{2}\chi^t(1-\chi)^{|i\oplus j|-t} \sum_{s=0}^{t} \binom{|(i \oplus j) \otimes i|}{s} \\ & \binom{|(i \oplus j) \otimes j|}{t-s} [\mu^{|i|-2s+t}(1-\mu)^{L-|i|+2s-t} \\ &+ \mu^{|j|+2s-t}(1-\mu)^{L-|j|-2s+t}] \end{aligned} \qquad (7)$$

(証明) $|i \oplus j|$ ビットだけが一様交叉をする可能性があるので、$|i \oplus j|$ ビットの中からちょうど $t (0 \leq t \leq |i \oplus j|)$ ビットが、一様交叉するとする。この確率は

$$\chi^t(1-\chi)^{|i\oplus j|-t}$$

---

[1] $|i|$, $i \otimes j$, $i \oplus j$ は、それぞれ $i \in I$ を表すビット列の中の 1 の個数,、$i \in I$ と $j \in I$ の各ビットを比較した積と和 (ただしmod2)

となる。次に、$(i \oplus j) \otimes i$ のビットについて、1 となるビットの位置は、一様交叉をするとき、関連のある $|i \oplus j|$ ビットの中で、i の中で 1 がある位置を表している。$(i \oplus j) \otimes j$ についても同様に、関連のある $|i \oplus j|$ ビットのなかで、jの中で 1 がある位置を表している。これから、t 回一様交叉をするときを考えているので、一様交叉をするビットとして、$|(i \oplus j) \otimes i|$ ビットから $s (0 \leq s \leq t)$ ビット、$|(i \oplus j) \otimes j|$ ビットから $t-s$ ビットを選んで、計 t ビットを選ぶ。それぞれの選び方は $\begin{pmatrix} |(i \oplus j) \otimes i| \\ s \end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix} |(i \oplus j) \otimes j| \\ t-s \end{pmatrix}$ 通りである。

次に、一様交叉をした後に生成された 2 つの子 i', j'について考える (i'は、親から i について、一様交叉されたビットの値は反転し、一様交叉されなかったビットの値はそのままであるようなビットを表すことにする)。ここで、i'のビットの中の 1 の個数について考える。親 i の 1 の個数は $|i|$ であるが、一様交叉で、$|i|$ の中の s 個が 0 となり、1 の個数が s 個減少するが、残りの $L-|i|$ 個の 0 の中から $t-s$ 個が 1 となるので、1 の個数は $t-s$ 個増加する。よって、子 i'のなかの 1 の個数は、$|i|-s+(t-s) = |i|-2s+t$ 個となる。これから、子 i'のなかの 0 の個数は $L-|i|+2s-t$ 個となる。親 jについても同様に、子 j'のなかの 1 の個数は $|j|+2s-t$ 個、0 の個数は $L-|j|-2s+t$ 個となる。よって、子 i'から、突然変異によって、0(すなわち、個体として、$00\cdots0$ と表現される場合)を、生成する確率は、

$$\mu^{|i|-2s+t}(1-\mu)^{L-|i|+2s-t}$$

となり、同様に、子 j'についても、0 を生成する確率は、

$$\mu^{|j|+2s-t}(1-\mu)^{L-|j|-2s+t}$$

となる。また、子 i'と子 j'を選ぶ確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$なので、子 i'と子 j'から突然変異によって 0 を生成する確率は、

$$\frac{1}{2}[\mu^{|i|-2s+t}(1-\mu)^{L-|i|+2s-t}+\mu^{|j|+2s-t}(1-\mu)^{L-|j|-2s+t}]$$

となる。以上のことを、$t = 0, 1, \cdots |i \oplus j|$, $s = 0, 1, \cdots t$ のすべての場合について考えるので

$$\begin{aligned} & r_{i,j}(0) \\ = & \sum_{t=0}^{|i \oplus j|} \frac{1}{2} \chi^t (1-\chi)^{|i \oplus j|-t} \sum_{s=0}^{t} \begin{pmatrix} |(i \oplus j) \otimes i| \\ s \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} |(i \oplus j) \otimes j| \\ t-s \end{pmatrix} [\mu^{|i|-2s+t}(1-\mu)^{L-|i|+2s-t} \\ & +\mu^{|j|+2s-t}(1-\mu)^{L-|j|-2s+t}] \end{aligned} \tag{8}$$

Q.E.D

3 Davis アルゴリズムの基本的性質

Davis [1] によって、$\mu > 0$ のときの $s \in S$の定常確率 $q_\mu[s]$ が

$$q_\mu[s] = \frac{|Q[s]-I|}{\sum_{s' \in S} |Q[s']-I|} \tag{9}$$

で与えられ、また $\mu \to 0$ における $q_\mu[s]$ の極限 $q[s]$ が

$$\begin{aligned} q[s] &= \lim_{\mu \to 0} q_\mu[s] \\ &= \begin{cases} \dfrac{\lim_{\mu \to 0} |Q^*[s]-I|}{\sum_{s' \in U} \lim_{\mu \to 0} |Q^*[s']-I|} & [s \in U] \\ 0 & [s \in S-U] \end{cases} \end{aligned} \tag{10}$$

となることが示されている。ここで、$U \subset S$は、$z[i,s] = M$を満たすような $i \in I$ が存在する集団、すなわち、一様な個体を持つ集団の集合である。

また $Q[s]$ は、推移確率によって表現された行列 $Q(s'|s)$ の $s \in S$に対する行ベクトルを、零ベクトルに置き換えた行列とする。そして、$Q^*[s]$ は、その成分が次のように定義された行列である。

$$\begin{aligned} & Q^*[u](s'|s) \\ = & \begin{cases} 0 & [s = u] \\ Q(s'|s) + Q(u'|s)/L & \begin{bmatrix} s \neq u \\ s' \in S[u'] \\ u' \in U-\{u\} \end{bmatrix} \\ Q(s'|s) & [otherwise] \end{cases} \end{aligned} \tag{11}$$

ここで、$S[u]$ を、$z[i,u] = M$なる i に対して、$z[i,s] = M-1$, $z[i',s] = 1$, $i' \in I-\{i\}$, $H(i,i') = 1$ となるような $s \in S$の集合とした。

このとき、各世代交代 $k=1,2,\cdots$ で、突然変異確率 $\mu=\mu(k)$ を $k\to\infty$ に対して、0 に収束させるとき、inhomogeneous な Markov 連鎖 が weak ergodicity と strong ergodicity を満たす (すなわち、$q_\mu[s]$ が $q[s]$ に漸近する) 十分条件が、*Davis* によって与えられている。

Lemma 1 突然変異確率 $\mu=\mu(k)$ が単調減少で $\mu(k)\geq\frac{1}{2}k^{-1/ML}$ を、満たすならば、*weak ergodicity* と *strong ergodicity* が満足される *[1]*。

すなわち、(1) 式を満足している限り、(10) 式の極限が得られる。

4 Davis アルゴリズムのある拡張

オリジナルの Davis アルゴリズムは、一点交叉のみを仮定し、交差確率が一定の場合の結論しか述べていないが、以下では Davis アルゴリズムが性質 1 を満足する交差、すなわち、二点交叉、一様交叉、多点交叉, シャフル交叉, セグメント交叉 [3] でも適用され、交差確率が可変でも適用されることを示す。

Theorem 2 性質 *1* を満足する交差を適用した場合に世代交代 k で交差確率 $\chi(k)$ がどのような値を取ったとしても、$s\in S$ の定常確率の $\mu\to 0$ の極限は、やはり *(10)* 式で与えられる。

(証明) まず、$s\in U$ のとき (10) 式の分母が、性質 1 を満足する任意の交叉でも

$$\lim_{\mu\to 0}|Q^*[s]-I|\neq 0 \tag{12}$$

が成立することを示す。

ここで、$Q[s](s\in S)$ について、$Q^*[s]$ の $s\in U$ での 行ベクトルを、次の条件を満たすように変えた行列 Q' を考える。ここでの定義は、

$$\forall s'\in S-U+\{s\}, Q'(s'|s)=\frac{1}{|S-U+\{s\}|}>0 \tag{13}$$

このとき、Q' のその s の行ベクトルの和は 1 となる。また、Q' の残りの行は、$Q[s]$ の $\mu\to 0^+$ での極限の行列と同じである。よって、Q' は、確率行列である。また、Q' は, 次のことも満たしている。

$$\bar{0}\leq\lim_{\mu\to 0^+}Q[s]\leq Q', Q'\neq\lim_{\mu\to 0^+}Q[s] \tag{14}$$

このとき、Q' が性質 1 を満足する任意の交差について primitive であることが示されれば、Perron-Frobenius 定理 [34] から、$\lim_{\mu\to 0^+}Q[s]$ の任意の固有値 λ_i について、$\lambda_i<1$ であることがわかる。ここで、primitivity の定義と Perron-Frobenius 定理は各々以下で与えられる。

Definition 1 *[31]* 正方非負行列 T について、$T^k>0$ となるような正の整数 k が存在するとき、T は *primitive* であるという。

ここで、非負行列は成分のすべてが非負である行列をさしている。

Lemma 2 (Perron-Frobenius 定理 [34]) A を *primitive* 確率行列、 A の固有値 を α として $0\leq B\leq A$ 、B の固有値を β としたとき $|\beta|\leq\alpha=1$。さらに、 $|\beta|=\alpha=1$ ならば $B=A$.

したがって、

$$|\lim_{\mu\to 0^+}Q^*[s]-\lambda I|=\prod(\lambda_i-\lambda)$$

$\lambda=1$ より

$$|\lim_{\mu\to 0^+}Q^*[s]-I|=\prod(\lambda_i-1)\neq 0$$

以上より、3 オペレータ・アルゴリズムで性質 1 を満足する交叉について、その推移確率行列が primitive である限り、$\lim_{\mu\to 0^+}|Q^*[s]-I|$ が存在して、(10) 式が成立している。

ところで、

Lemma 3 *[31]* $n\times n$ 非負行列 T が、*irreducible* かつ *aperiodic* であれば T は *primitive*。

がいえる。ここで、irreducibility の定義は以下で与えられる。

Definition 2 任意の $s_1,s_2\in S$ に対して、$Q^{k_1}(s_1|s_2)>0$、 $Q^{k_2}(s_2|s_1)>0$ を満足する整数 $k_1,k_2\geq 1$ が存在するとき Q は *irreducible* であるという。

また、Q' は、状態空間 $S-U+\{s\}$ によって定義された Markov 連鎖の推移行列である。$Q'(s|s)>0$ より、Q' は aperiodic である。したがって、Q' が irreducible であることを示せばよい。

今、ここで、$\forall s' \in S - U + \{s\}$, $Q'(s'|s) = \frac{1}{|S-U+\{s\}|} > 0$ より、s から 1 回の推移で、$S - U + \{s\}$ の任意の状態に移ることができる。したがって、逆に $S - U + \{s\}$ の任意の状態から有限回の推移で、s に移ることを示せばよい。

i_Aを、$s \in U$の個体とする。これから示していきたいことは、次のことである。初めの集団 $n \in S - U + \{s\}$ の中で i_Aとのハミング距離が一番小さい個体を i_1としたとき、$z[i_1, n_1] = M$を満たす $n_1 \in U$と、i_Aとのハミング距離をさらに 1 つ小さくした i_2、すなわち、$H(i_2, i_A) = H(i_1, i_A) - 1$ を満たす i_2について $z[i_1, n_{12}] = M - 1$. および $z[i_2, n_{12}] = 1$ を満たす $n_{12} \in S[n_1]$ を考えると、(11) 式より,i_1が n と n_{12}の中に存在し、交叉は性質 1 を満足することを考慮して、

$$\begin{aligned} Q'(n_{12}|n) &= \lim_{\mu \to 0^+} P_3(n_{12}|n) + \frac{1}{L} \lim_{\mu \to 0^+} P_3(n_1|n) \\ &\geq \frac{1}{L} \lim_{\mu \to 0^+} P_3(n_1|n) = \lim_{\mu \to 0^+} [P_3(i_1|n)]^M \\ &= \lim_{\mu \to 0^+} [P_2(i_1|n)]^M = [P_1(i_1|n)]^M \\ &> 0 \end{aligned} \tag{15}$$

また、$z[i_2, n_2] = M$を満たす $n_2 \in U$と n_{12}も上と同様に $Q'(n_2|n_{12}) > 0$ を満たす。

よって、上の 2 つの不等式から Q'によって、2 回の推移で n から n_2に移ることができる。これから、i_Aとのハミング距離を 0 にするまで、この操作を繰り返せば n から s へ有限回の推移で移ることができる。以上より Q'は irreducible である。

Q. E. D.

5 結果と今後の課題

本論文より、Davis アルゴリズムが、交叉確率χを可変である場合、および一点交差ではなく性質 1 を満足する交差、例えば一様交差等にも適用可能であることが示せた。しかし、Davis アルゴリズムでは、世代数 $k \to \infty$ で、状態 s は一様集団のいずれかに収束するが、最適解である保証はされていない。

さらに、(1) 式の bound は非常に緩くて、実用的ではない。ただ、最適解への収束条件として、筆者らによって適合度関数 fについて、最適解と 2 番目に良い解の比を 0 に漸近させることによって最適解が保証されることが示されている [8]。

そして、Davis によって、$\mu(k)$ の bound を 1/k にしても weak ergodicity と strong ergodicity を満たすことが conjecture として示唆されている。

References

[1] Davis, T. E., *Toward an Extrapolation of the Simulated Annealing Convergence Theory onto the Simple Genetic Algorithm.* PhD thesis, Gainesville: University of Florida, 1991.

[2] Goldberg, D. E. and Segrest, P., "Finite Markov Chain Analysis of Genetic Algorithms", in Grefenstette, J. J. (Ed.), *Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms '87.* Hillsdale, NJ: Lawrence Earlbaum Associates, 1987.

[3] Eshlman, L. J., Caruana, R. A., and Schaffer, J. D., "Biases inn the Crossover Landscape", in [35].

[4] Goldberg, D. E., "Genetic Algorithm and Walsh Functions: Part I, A Gentle Introduction; Part II, Deception and Its Analysis" *Complex Systems*, vol. 3, pages 129-171, 1990.

[5] Nix, A. and Vose, M. D., "Modeling genetic algorithm with Markov chains", *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 5:27-34, 1992.

[6] Suzuki, J., "A Markov Chain Analysis on a Genetic Algorithm", in [37], pages 146-153.

[7] Suzuki, J., "A Markov Chain Analysis on a Simple Genetic Algorithm", *IEEE Trans on System.manand Cybenetios*, vol25, No4, April,1995.

[8] Suzuki, J., Murata, T., and Davis, T. E., "An SA-like Strategy for GAs and its Markov Chain Analysis", in preparation.

[9] Syswerda, G., "Uniform Crossover in Genetic Algorithms", in [35].

[10] Vose, M. D. "Formalizing Genetic Algorithms", The IEEE Workshop on Genetic Algorithms, Simulated Annealing & Neural Nets held in Glasgow, May, 1990.

[11] Vose, M. D. and Liepins, G. E. "Punctuated Equilibria in Genetic Search", *Complex Systems*, 5:31–44, 1991.

[12] Rudolph, G. "Convergence Analysis of Canonical Genetic Algorithms". *IEEE Trans. on Neural Networks. special issue on Evolutional Computing*, vol. 5, No. 1, pages 96-101, Jan. 1994.

[13] Vose, M. D "Models of Genetic Algorithm"

[14] Qi,X. and Palmieri,F. "The Diversification Role of Crossover in the Genetic Aigorithm"

[15] Davis, D, H. and Principe, J. C. "A simulated Annealing Like Convergence Theory for the Simple Genetic Algorithm"

[16] Yamamura, M. , Satoh, H. and Kobayashi, S. "An Analysis of Crossover's Effect in Genetic Algorithms"

[17] Dejong, G. A. , Spears, W. H. and Gordon, D. F. "Using Markov Chains to Analyse GAFOs"

[18] Vose, M. D. and Wrigt, A. H. "Stability of Vertex Fixed Points and Application"

[19] Aytug, H. and Koehler, G. J. "Stopping Criteria for Finite Genetic Algorithms"

[20] Koehler, G. J. "A Proof of the Vose-Liepins Conjecture"

[21] Battachayya, S. and Koehler, G. J. "An Analysis of Non-Binary Genetic Algorithm"

[22] Hosino, T. "遺伝的アルゴリズム [1],[2]"

[23] Kobayashi, S. and Yamamura, M. "遺伝的アルゴリズムの基礎とその応用"

[24] Bethke, A. D., *Genetic Algorithms as Function Optimizers*. PhD thesis, University of Michigan, 1981.

[25] Davis, T. E. and Principe J. C., "A Simulated Annealing Like Convergence Theory for the Simple Genetic Algorithm", in [36], pages 174-181.

[26] De Jong, K. A., *An Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems*. PhD thesis, University of Michigan, Ann Arbor, Mich., 1975.

[27] Eiven, A. E., Aarts, E. H. L. and Van Hee, K. M., "Global Convergence of Genetic Algorithms: A Markov Chain Analysis", in Schwefel, H. P. and Männer, R. (Eds.), *Parallel Problem Solving from Nature*, Berlin and Heidelberg: Springer, pages 4-12, 1990.

[28] Geman S., & Geman, D., "Stochastic Relaxation, Gibbs Distributions and the Bayesian Restoration of Images", *IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intel., Pattern Analysis Machine Intelligence*, vol. 6, no. 6, Nov. 1984.

[29] Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.

[30] Holland, J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.

[31] Iosifescu, M., *Finite Markov Processes and Their Applications*. Chichester: Wiley, 1980.

[32] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D., & Vecci, M. P., "Optimization by Simulated Annealing", *Science*, 220 (4598).

[33] Liepins, G. E. and M. D. Vose, "Representational Issues in Genetic Optimization", *Journal. of Expt. Theor. Artif. Intell.*, vol. 2, pages 101-115, 1990.

[34] Seneta, E., *Non-negative Matrices and Markov Chains*. New York, NY: Springer Verlag, 1981.

[35] Schaffer, J. D. (Ed.), *Proceedings of International Conference on Genetic Algorithms '89*, MIT, MA, San Mateo: Morgam Kaufmann, 1989.

[36] Belew, R. K. and Booker, L. B. (Eds.), *Proceedings of International Conference on Genetic Algorithms '91*. San Diego: Univ. of California, CA, San Mateo: Morgam Kaufmann, 1991.

[37] Forrest, S. (Ed.), *Proceedings of an International Conference on Genetic Algorithms '93*. Urabama-Chanpaign: Univ. of Illinois, IL, San Mateo: Morgan Kaufmann, 1993.