

Δ-Y 変換による線形方程式の解法

中原 寛志[†], 高橋 浩光^{††}

[†]大阪府立大学工学部
数理工学科

〒 593 大阪府堺市学園町 1-1
hiro@na.ms.osakafu-u.ac.jp

^{††}岡山県立大学情報工学部
情報通信工学科

〒 719-11 岡山県総社市窪木 111
tak@c.oka-pu.ac.jp

あらまし 重みつき 2-連結平面的グラフに関連する実対称行列 A を考える. 線形方程式 $Ax = b$ は偏微分方程式を数値的に解く場合など多くの応用があり, この方程式を効率よく解くアルゴリズムについてを研究を行うことは重要である. 本稿では, グラフに関連する線形方程式を Δ-Y 変換を用いて解くアルゴリズムを提案し, このアルゴリズムの適用できる方程式の十分条件を示す. 計算量についても理論的な考察を行う. また, どのようなグラフに関連する方程式がこのアルゴリズムを用いるのに適しているかについても考察を行う.

キーワード 平面的グラフ, Δ-Y 変換, 埋め込み, マイナー, 線形方程式

An algorithm to solve a linear system of equations
by Δ-Y transformations

Hiroyuki Nakahara [†], Hiromitsu Takahashi ^{††}

[†] College of Engineering,
University of Osaka Prefecture
1-1 Gakuen-cho, Sakai, Osaka 593, JAPAN
hiro@na.ms.osakafu-u.ac.jp

^{††} Faculty of Computer Science and System
Engineering, Okayama Prefectural University
111 Kuboki, Soja, Okayama 719-11, JAPAN
tak@c.oka-pu.ac.jp

Abstract Let A to be a real symmetric matrix associated with a weighted 2-connected planar graph. it is important to study a fast algorithm to solve the linear system $Ax = b$, since the system has many various applicaions, for example to solve partial defferencial equations numerically. We propose a new algorithm to solve the linear system of equations by Δ-Y transformations, and prove the sufficient condition for using our algorithm. We estimate the complexity of our algorithms theoretically. We also describe what kind of graphs this algorithm can efficiently solve the system associated with.

key words planar graph, Δ-Y transformation, embedding, minor, linear system of equations

1 はじめに

Tutte は、3-連結な平面的グラフの埋め込みについて述べた.[1],[2] その方法は、周辺の頂点を除く各頂点が隣接する頂点の重心になるようにするというものである。具体的には線形方程式を解くことによって求めている。このような平面的グラフに関連する実対称行列 A と定数ベクトル b を考え、 $Ax = b$ という線形方程式を考える。このタイプの方程式は、数値解析においてしばしば現われ、考察を行うことは重要である。Tarjan らによって、時間計算量が $O(n\sqrt{n})$ であるアルゴリズムが提案されている.[5] このアルゴリズムはセパレーター定理に基づく係数部分の大きい複雑なアルゴリズムであり、著者が認めるように実用的ではない。本稿では、グラフに関連する線形方程式を解く新しいアルゴリズムを提案する。第2節では、準備として Δ - Y 変換の定義と性質について述べる。第3節では、グラフの変形に対しての方程式の操作法を提案し、その妥当性について述べる。また、この方法が適用できるための十分条件を示す。第4節では、アルゴリズムを提案し、計算量について評価を行う。また、どのようなグラフの場合に有効であるかについても考察を行う。

2 準備

この節では、 Δ - Y 変換の定義と性質について述べる。グラフ G における変形を以下のように定義する。

T-1 他の辺と直列につながっている辺を縮約する。(図1(a))

T-2 並列になっている辺の一方を縮約する。(図1(b))

T-3 3-星グラフを三角形に置き換える。(図1(c))

T-4 三角形を3-星グラフに置き換える。(図1(d))

この4つの変換を総称して Δ - Y 変換と呼ぶことにする。また、簡便のために、これらを組み合わせた2つの変換を定義する。

T-5 図2(e)において、左のグラフの三角形の部分に T-4 を行い、真ん中のグラフを得る。さらに、真ん中のグラフの直列の部分に T-1 を行い、右のグラフを得る。

T-6 図2(f)において、左のグラフの三角形の部分に T-4 を行い、真ん中のグラフを得る。さらに、真ん中のグラフの3-星グラフの部分に T-3 を行い、右のグラフを得る。

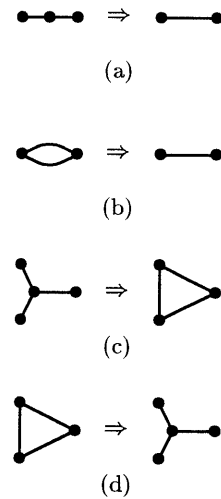


図1: Δ - Y 変換

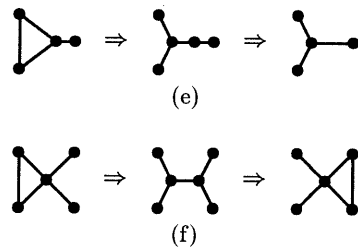


図2: 複合変換

任意の平面的グラフ G から辺の縮約と削除を行うことによって得られるグラフを G のマイナーと呼び、 G^* で表す。

また、任意のグラフ G が Δ - Y 変換を繰り返し用いることによって1辺のグラフに変形できるとき、 G は Δ - Y 変換によって縮小可能であると呼ぶことにする。

次の定理は重要である。

定理 1 任意の2-連結な平面的グラフは Δ - Y 変換によって縮小可能である。

定理1はEpifanov[3]によって最初に示された。また、Truemper[4]は次のような補題を示すことによってより簡潔な証明を与えた。

補題 2 G を2-連結な平面的グラフとする。もし G が Δ - Y 縮小可能ならば、 G の任意のマイナー G^* も Δ - Y 縮小可能である。

補題 3 G を 2-連結な平面的グラフとする. G を マイナーとする格子グラフが存在する.

補題 4 任意の格子グラフは、 Δ - Y 縮小可能である.

3 グラフに関連する行列と線形方程式

任意の多重辺を持たないグラフ $G = (V, E)$ を考える. ここで $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ は頂点の集合であり, $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ は辺の集合である. 任意の頂点と辺は, それぞれ非零の実数の重みをもつものとする. 重み関数を以下のように定義する.

$$w(v_i, v_j) = \begin{cases} 0 & (i \neq j \text{ かつ } v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接していない}), \\ \text{辺 } (v_i, v_j) \text{ の重み} & \\ (i \neq j \text{ かつ } v_i \text{ と } v_j \text{ が隣接している}), & \\ \text{頂点 } v_i \text{ の重み} & \\ (i = j \text{ のとき}) & \end{cases}$$

$w(v_i, v_j)$ を w_{ij} と略記し, $n \times n$ の正方行列

$$W_G = [w_{ij}]$$

をグラフ G に関連する行列と呼ぶ. この行列は, 定義より実対称行列である. c を任意の定数とする. 方程式

$$W_G x = c$$

をグラフ G と c に関連する線形方程式と呼び, $L_{G,c}$ で表す. グラフ G に対して Δ - Y 変換を行うときの, 頂点と辺の重みに対する操作について考える. ここでは, G は 並行辺を持たないと考えているので, T-2 を単独で用いることはない. T-1 から T-4 のうち 並行辺を生じる可能性があるのは, T-1 または T-4 のみである. ここでは, 並行辺を生じたときには直後に T-2 を行い, 並行辺を消去することにする. したがって, 操作として考えられるのは,

- (a) T-1 を行い, もし並行辺を生じれば, T-2 を行う.
- (b) T-3 を行う.
- (c) T-4 を行い, もし並行辺を生じれば, T-2 を行う.

の 3 通りである. それぞれの場合について, 頂点と辺の重みの操作を以下のように定義する.

- (a) 直列に接続されている辺を $(v_i, v_k), (v_k, v_j)$ とする. 新しい重みは, $w'_{ii} = w_{ii} - w_{ik}^2/w_{kk}$, $w'_{jj} = w_{jj} - w_{jk}^2/w_{kk}$, $w'_{ij} = w_{ij} - w_{ik}w_{jk}/w_{kk}$, $c'_i = c_i - c_k w_{ik}/w_{kk}$, $c'_j = c_j - c_k w_{jk}/w_{kk}$ とである.

- (b) G の頂点 v_l が次数 3 で 3 辺 $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_k, v_l)$ と接続しているとき, この頂点 v_l および 3 辺をのぞき, あらたに辺 $(v_i, v_j), (v_j, v_k), (v_k, v_i)$ を加える. 重みは $w'_{ij} = -w_{il}w_{jl}/w_{ll}$, $w'_{jk} = -w_{jl}w_{kl}/w_{ll}$, $w'_{ki} = -w_{kl}w_{il}/w_{ll}$, $w'_{ii} = w_{ii} - w_{il}^2/w_{ll}$, $w'_{jj} = w_{jj} - w_{jl}^2/w_{ll}$, $w'_{kk} = w_{kk} - w_{kl}^2/w_{ll}$, $c'_i = c_i - c_l w_{il}/w_{ll}$, $c'_j = c_j - c_l w_{jl}/w_{ll}$, $c'_k = c_k - c_l w_{kl}/w_{ll}$ とする.

- (c) G の中に三角形 $(v_i, v_j), (v_j, v_k), (v_k, v_j)$ が存在するとき, これらの辺をのぞき, 新たな頂点 v_l を加え, 辺 $(v_i, v_l), (v_j, v_l), (v_k, v_l)$ を加える. 重みは $w'_{ii} = w_{ii} - w_{ij}w_{ik}/w_{jk}$, $w'_{jj} = w_{jj} - w_{ij}w_{jk}/w_{ki}$, $w'_{kk} = w_{kk} - w_{ik}w_{jk}/w_{ij}$, $w'_{ll} = (w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{jk} + w_{ki}w_{ij})^2/w_{ij}w_{jk}w_{ki}$, $w'_{il} = (w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{jk} + w_{ki}w_{ij})/w_{jk}$, $w'_{jl} = (w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{jk} + w_{ki}w_{ij})/w_{ki}$, $w'_{kl} = (w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{jk} + w_{ki}w_{ij})/w_{ij}$, $c'_i = c_i$, $c'_j = c_j$, $c'_k = c_k$, $c'_l = 0$ とする.

補題 5 グラフ G に対して (a) から (c) のいずれかの操作を行ったグラフを G' とする. 方程式 $L_{G',c}$ に適当な式を加えたものの解は加えられた頂点に対応する変数以外は方程式 $L_{G,c}$ の解と一致する.

(証明)

- (a) $L_{G,c}$ の関連する部分の式は,

$$\begin{aligned} w_{ii}x_i + w_{ij}x_j + w_{ik}x_k + \sum w_{ip}x_p &= c_i, \\ w_{ij}x_i + w_{jj}x_j + w_{jk}x_k + \sum w_{jq}x_q &= c_j, \\ w_{ik}x_i + w_{jk}x_j + w_{kk}x_k &= c_k \end{aligned}$$

であり, $L_{G',c}$ の関連する部分の式は,

$$\begin{aligned} w'_{ii}x_i + w'_{ij}x_j + \sum w_{ip}x_p &= c'_i, \\ w'_{jj}x_j + w'_{ij}x_i + \sum w_{jq}x_q &= c'_j \end{aligned}$$

である $L_{G,c}$ において 3 番目の式を 1 番目と 2 番目の式に代入すると,

$$\begin{aligned} \left(w_{ii} - \frac{w_{ik}^2}{w_{kk}}\right)x_i + \left(w_{ij} - \frac{w_{ik}w_{jk}}{w_{kk}}\right)x_j \\ + \sum w_{ip}x_p &= c_i - \frac{c_k w_{ik}}{w_{kk}}, \\ \left(w_{jj} - \frac{w_{jk}^2}{w_{kk}}\right)x_j + \left(w_{ij} - \frac{w_{ik}w_{jk}}{w_{kk}}\right)x_i \\ + \sum w_{iq}x_q &= c_j - \frac{c_k w_{jk}}{w_{kk}} \end{aligned}$$

となり,

$$w'_{ii} = w_{ii} - \frac{w_{ik}^2}{w_{kk}},$$

$$\begin{aligned}w'_{jj} &= w_{jj} - \frac{w_{jk}^2}{w_{kk}}, \\w'_{ij} &= w_{ij} - \frac{w_{ik}w_{jk}}{w_{kk}}, \\c'_i &= c_i - \frac{c_k w_{ik}}{w_{kk}}, \\c'_j &= c_j - \frac{c_k w_{jk}}{w_{kk}}\end{aligned}$$

とおくと, $L_{G',c'}$ に

$$w_{ik}x_i + w_{jk}x_j + w_{kk}x_k = c_k$$

を加えたものの解は, $L_{G,c}$ の解と等しい.

(b) $L_{G,c}$ の関連する部分の式は,

$$\begin{aligned}w_{ii}x_i + w_{ij}x_j + w_{ik}x_k + w_{il}x_l + \sum w_{ip}x_p &= c_i, \\w_{ij}x_i + w_{jj}x_j + w_{ik}x_k + w_{jl}x_l + \sum w_{jq}x_q &= c_j, \\w_{ik}x_i + w_{jk}x_k + w_{kk}x_k + w_{kl}x_l + \sum w_{kr}x_r &= c_k, \\w_{il}x_i + w_{jl}x_j + w_{kl}x_k + w_{ll}x_l &= c_l\end{aligned}$$

であり, $L_{G',c'}$ の関連する部分の式は,

$$\begin{aligned}w'_{ii}x_i + w'_{ij}x_j + w'_{ik}x_i + \sum w_{ip}x_p &= c'_i, \\w'_{jj}x_j + w'_{ij}x_i + w'_{jk}x_k + \sum w_{jq}x_q &= c'_j, \\w'_{kk}x_k + w'_{ik}x_i + w'_{jk}x_j + \sum w_{kr}x_r &= c'_k\end{aligned}$$

$L_{G,c}$ において 4 番目の式を 2 番目, 3 番目および 4 番目の式に代入すると,

$$\begin{aligned}\left(w_{ii} - \frac{w_{il}^2}{w_{ll}}\right)x_i + \left(w_{ij} - \frac{w_{il}w_{jl}}{w_{ll}}\right)x_j \\+ \left(w_{ik} - \frac{w_{il}w_{kl}}{w_{ll}}\right)x_k = c_i - \frac{c_l w_{il}}{w_{ll}}, \\ \left(w_{jj} - \frac{w_{jl}^2}{w_{ll}}\right)x_j + \left(w_{ij} - \frac{w_{il}w_{jl}}{w_{ll}}\right)x_i \\+ \left(w_{jk} - \frac{w_{jl}w_{kl}}{w_{ll}}\right)x_k = c_j - \frac{c_l w_{jl}}{w_{ll}}, \\ \left(w_{kk} - \frac{w_{kl}^2}{w_{ll}}\right)x_k + \left(w_{jk} - \frac{w_{jl}w_{kl}}{w_{ll}}\right)x_j \\+ \left(w_{ik} - \frac{w_{il}w_{kl}}{w_{ll}}\right)x_i = c_k - \frac{c_l w_{kl}}{w_{ll}}\end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned}w'_{ii} &= w_{ii} - \frac{w_{il}^2}{w_{ll}}, \\w'_{jj} &= w_{jj} - \frac{w_{jl}^2}{w_{ll}}, \\w'_{kk} &= w_{kk} - \frac{w_{kl}^2}{w_{ll}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w'_{ij} &= w_{ij} - \frac{w_{il}w_{jl}}{w_{ll}}, \\w'_{jk} &= w_{jk} - \frac{w_{jl}w_{kl}}{w_{ll}}, \\w'_{ki} &= w_{ki} - \frac{w_{il}w_{kl}}{w_{ll}}, \\c'_i &= c_i - \frac{c_l w_{il}}{w_{ll}}, \\c'_j &= c_j - \frac{c_l w_{jl}}{w_{ll}}, \\c'_k &= c_k - \frac{c_l w_{kl}}{w_{ll}}\end{aligned}$$

とおくと, $L_{G',c'}$ に

$$w_{il}x_i + w_{jl}x_j + w_{kl}x_k + w_{ll}x_l = c_l$$

を加えたものの解は, $L_{G,c}$ の解に等しい.

(c) $L_{G,c}$ 関連する部分の式は,

$$\begin{aligned}w_{ii}x_i + w_{ij}x_j + w_{ik}x_i + \sum w_{ip}x_p &= c_i, \\w_{jj}x_j + w_{ij}x_i + w_{jk}x_k + \sum w_{jq}x_q &= c_j, \\w_{kk}x_k + w_{ik}x_i + w_{jk}x_j + \sum w_{kr}x_r &= c_k\end{aligned}$$

であり, $L_{G',c'}$ の関連する部分の式は,

$$\begin{aligned}w'_{ii}x_i + w'_{il}x_l + \sum w_{ip}x_p &= c'_i, \\w'_{jj}x_j + w'_{jl}x_l + \sum w_{jq}x_q &= c'_j, \\w'_{kk}x_k + w'_{kl}x_l + \sum w_{kr}x_r &= c'_k, \\w'_{ll}x_l + w'_{il}x_i + w'_{jl}x_j + w'_{kl}x_k &= c'_l\end{aligned}$$

である.

$$\begin{aligned}w'_{ii} &= w_{ii} - \frac{w_{ij}w_{ik}}{w_{jk}}, \\w'_{jj} &= w_{jj} - \frac{w_{ij}w_{jk}}{w_{ik}}, \\w'_{kk} &= w_{kk} - \frac{w_{ik}w_{jk}}{w_{ij}}, \\w'_{ll} &= \frac{(w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{ij} + w_{jk}w_{ki})^2}{w_{ij}w_{jk}w_{ki}}, \\w'_{il} &= \frac{w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{ij} + w_{jk}w_{ki}}{w_{jk}}, \\w'_{jl} &= \frac{w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{ij} + w_{jk}w_{ki}}{w_{ki}}, \\w'_{kl} &= \frac{w_{ij}w_{jk} + w_{ki}w_{ij} + w_{jk}w_{ki}}{w_{ij}}, \\c'_i &= c_i, \\c'_j &= c_j, \\c'_k &= c_k, \\c'_l &= 0\end{aligned}$$

とすると, $L_{G',c'}$ の 4 番目の式をその他の式に代入すると $L_{G,c}$ を得る. \square

グラフの $\Delta-Y$ 変換に対応して, 上記のように方程式を変形していくことができるとすると, 方程式 $L_{G,c}$ を解くことができる.

補題 6 グラフ G の重みを,

辺 (v_i, v_j) の重み < 0

頂点 v_i の重み $\geq |\sum v_i$ に接続する辺の重み|

とする. この条件は $\Delta-Y$ 変換後のグラフ G' においても成り立つ.

(証明)

(a)

$$\begin{aligned} w'_{ii} &= w_{ii} - \frac{w_{ik}^2}{w_{kk}} \\ &\geq -\left(\sum w_{ip} + w_{ik}\right) - \frac{w_{ik}^2}{-w_{ik} - w_{jk}} \\ &= -\sum w_{ip} + \frac{w_{ik}w_{jk}}{-w_{ik} - w_{jk}} \\ &\geq -\sum w_{ip} + \frac{w_{ik}w_{jk}}{w_{kk}} \\ &= -\left(\sum w_{ip} + w'_{ij}\right) \end{aligned}$$

同様に, w'_{jj} についても成り立つ. $w'_{ij} < 0$ は, 自明.

(b)

$$\begin{aligned} w'_{ii} &= w_{ii} - \frac{w_{il}^2}{w_{ll}} \\ &\geq -\left(\sum w_{ip} + w_{il}\right) - \frac{w_{il}^2}{-w_{il} - w_{jl} - w_{kl}} \\ &= -\sum w_{ip} + \frac{w_{il}w_{jl} + w_{il}w_{kl}}{-w_{il} - w_{jl} - w_{kl}} \\ &\geq -\sum w_{ip} + \frac{w_{il}w_{jl} + w_{il}w_{kl}}{w_{ll}} \\ &= -\left(\sum w_{ip} + w'_{il} + w'_{kl}\right) \end{aligned}$$

同様に w'_{jj}, w'_{kk} についても成り立つ. $w'_{ij} < 0, w'_{jk} < 0, w'_{ki} < 0$ は, 自明である.

(c)

$$\begin{aligned} w'_{ii} &= w_{ii} - \frac{w_{ij}w_{ik}}{w_{jk}} \\ &\geq -\left(\sum w_{ip} + w_{ik} + w_{ij}\right) - \frac{w_{ij}w_{ik}}{w_{jk}} \\ &= -\left(\sum w_{ip} + w'_{il}\right) \end{aligned}$$

同様に w'_{jj}, w'_{kk} についても成り立つ. $w'_{ll} \geq -\left(w'_{ii} + w'_{jj} + w'_{kk}\right), w'_{jl} < 0, w'_{kl} < 0$ は, 自明である. \square

2-連結平面グラフ $G = (V, E)$ を考える. 定理 1 より, G は $\Delta-Y$ 変換を用いて, 2 頂点のグラフに変形することができる. このとき, G に補題 6 のような条件を満たす重みが与えられているとして, G に対応する方程式 $L_{G,c}$ を考える. 補題 6 より, $\Delta-Y$ 変換にしたがって方程式 $L_{G,c}$ も常に変形して行くことができる. G の頂点を削除するとき, $L_{G,c}$ に含まれる式が一つ取り出され, 最後に 2 変数の方程式が残るが, これは容易に解くことができる. この変数の値を取り出された式に順に代入していくことにより, 全ての変数の値を求めることができる. このことをまとめて, 次の定理とする.

定理 7 G が 2-連結平面グラフであり, 重みが

辺 (v_i, v_j) の重み < 0

頂点 v_i の重み $\geq |\sum v_i$ に接続する辺の重み|

であるならば, 方程式 $L_{G,c}$ を解く $\Delta-Y$ 変換の操作の列が存在する.

4 アルゴリズム

この節では, グラフに関連する方程式を解くアルゴリズムについて述べる. G を任意の 2-連結グラフとする. 第 3 節で述べたように 個々の $\Delta-Y$ 変換に対応する操作は $O(1)$ で実行が可能であるから, $L_{G,c}$ の解を求めるアルゴリズムの効率性は, いかにかに短い $\Delta-Y$ 変換の列を求めることができるかどうかである. もし, G を 1 つの辺に縮小する $\Delta-Y$ 変換の列の長さが $O(s)$ ならば, $L_{G,c}$ を求めるアルゴリズムの時間計算量も $O(s)$ である. 本稿では, 補題 2 に基づいて G をマイナーとするようなグラフを求める. そのようなグラフとして Truemper[4] は, 格子グラフを用いているが, n 頂点の平面的グラフの格子グラフに埋め込むと頂点数が $O(n^2)$ となるような例が報告されている.[6] (図 3) 本稿では, 格子グラフの両端をつないで

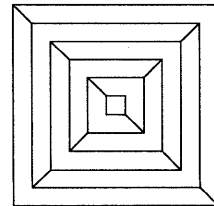


図 3: 格子に埋め込むと $O(n) \times O(n)$ 必要なグラフ

円柱状にしたグラフを用いる. このグラフを円柱グ

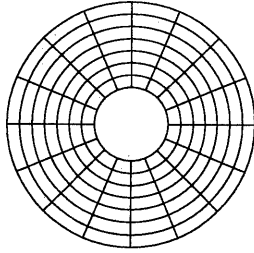


図 4: 円柱グラフ

ラフと呼ぶことにする。(図 4) 格子グラフに埋め込むことができるグラフは、少なくとも同じオーダーの頂点数の円柱グラフに埋め込むことができる。それに対して、図 3 のように $O(n)$ の頂点数の円柱グラフに埋め込めるが、 $O(n)$ の格子グラフには埋め込めない例がある。したがって、頂点数の観点からは G をマイナーとするグラフとしては、格子グラフより円柱グラフの方が適している。まず、円柱グラフの Δ - Y 変換の列を求めるアルゴリズムを示す。円柱グラフの同心円上の頂点数を g 、同心円の数を h とする。

アルゴリズム 1 (A) $h \leq g$ のときと、(B) $h > g$ のときにわけて処理する。

(A) $h \leq g$ のとき、

1. 最も外側の円上のある頂点に対して、T-3 を行う。(図 5(a))
2. 斜めの辺に対して T-6 を行う。そうすると形式的には斜めの辺が 1 つ斜め上の位置に移動することになる。この操作を繰り返すことによって、斜めの辺は内側から 1 番めと 2 番めの円の間に移動する。ここで、T-5 を行う。そうすると形式的には斜めの辺が 消去されたことになる。(図 5(b))
3. 1 および 2 と同様の操作を繰り返し用いることによって、同心円に垂直な方向の頂点の並びを消去することができる。(図 5(c),(d))
4. 1, 2, および 3 を繰り返し用いて同心円上の頂点数を 2 まで減らすことができる。
5. 後は、T-1 および T-2 によって、1 辺のグラフに変換できる。

時間計算量を評価する。1 および 2 の操作において定数時間でないのは、T-6 を繰り返し用いる部分である。したがって、時間計算量は、 $Ch + D$ である。また、3 は 1 および 2 を段数を変えて用いる。したがって、時間計算量は、 $O(h^2)$ である。

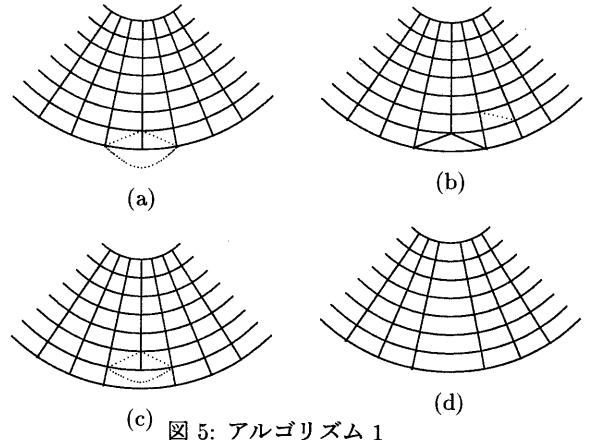


図 5: アルゴリズム 1

4 は、3 を $g-1$ 回繰り返し用いるので、時間計算量は $O(h^2g)$ となる。5 は、 $O(h)$ で処理できるから、全体としては $O(h^2g)$ となる。

(B) $h > g$ とき、

$2^{k-1} < g \leq 2^k$ となる k が存在する。以後、円上の頂点数を 2^k に拡張したグラフで考える。まず、最も内側の同心円を消去するアルゴリズムを示す。再帰的なアルゴリズムを用いる。

(I) $k = 2$ のとき、(図 6)

S-1 (a) の点線で囲まれた部分に T-3 を用いる。そのとき、並行辺を生じるがそれに T-2 を用いる。

S-2 (b) の右上の斜めの辺と右下の斜めの辺のそれぞれに T-6 を用いる。

S-3 (c) に T-4 を用いて、点線の部分を得る。

S-4 (d) の点線で囲まれた部分に T-3 を用いる。そのとき、並行辺を生じるがそれに T-2 を用いる。

S-5 (e) に斜めの辺に T-5 を用いる。

この様にして、最も内側の円を消去できる。このときの時間計算量は、同心円の数に依存せず $O(1)$ である。

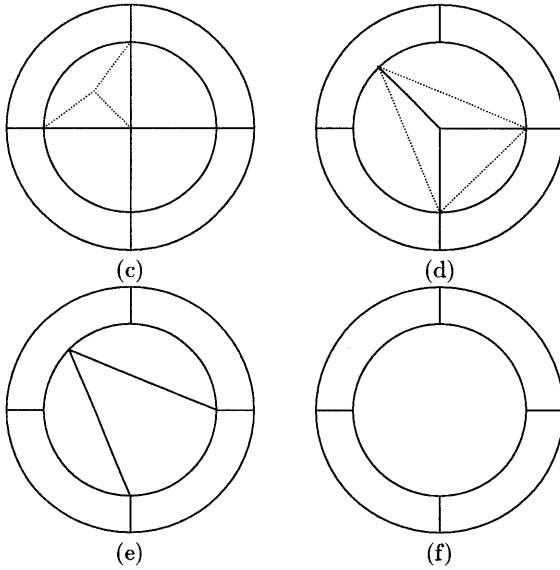
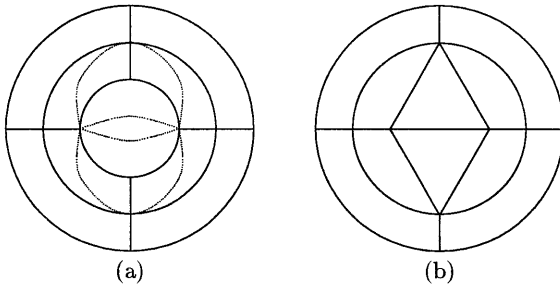


図 6: アルゴリズム 2 ($k=2$)

(II) $k \geq 2$ のとき, (図 7)

S-1 もっとも内側の円上の 1 つおきの頂点を
中心とする 3-星グラフに T-3 を用いる.

S-2 斜めの線を内側から $2^{k-1} + 1$ 段目に移動
する.

S-3 2 番目以降も同様にして内側から 2^{k-1} 段
目までの同心円上の頂点を半分にする.

S-4 $k = k - 1$ としてこの手続きを呼び出す.

1 つの同心円を消去するのに必要な時間計算量
を $t(g)$ とすると, S-2 および S-3 は 2 回目以
降は 2 段ずらすだけで良いことに注意して,

$$\begin{aligned}
 t(2^k) &= C2^k \cdot 2^k + t(2^{k-1}) \\
 &= C2^{2k} + C2^{2(k-1)} + t(2^{k-2}) \\
 &= C(2^{2k} + 2^{2(k-1)} + \dots + 2^{2 \cdot 3}) + t(2^2) \\
 &= C2^{2k} + D \\
 &\leq Cg^2 + D
 \end{aligned}$$

全体の時間計算量を $T(h, h)$ とすると

$$\begin{aligned}
 T(g, h) &\leq Ehg^2 + Fg^3 \\
 &\leq (E + F)hg^2
 \end{aligned}$$

したがって, 時間計算量は, $O(hg^2)$ である.

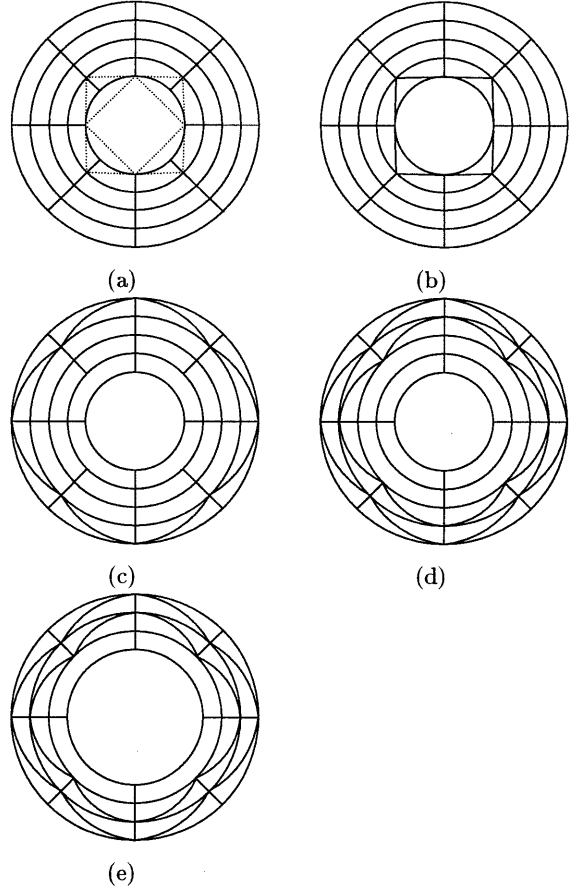


図 7: アルゴリズム 2 ($k \geq 3$)

次に, 任意の平面グラフを円柱に埋め込むアルゴリ
ズムの概要について述べる.

アルゴリズム 2 G を頂点数 n の任意の平面的グラ
フとする.

S-1 G をマイナーとするような, 全ての頂点の次数
が 3 以下のグラフ H を求める. これは, 次数が
4 以上の頂点に対して 辺の縮約の逆の操作を
行う. (図 8 参照) H の頂点数は, $4n - 12$ を 越
えることはないので, $O(n)$ である. 時間計算
量は $O(n)$ である.

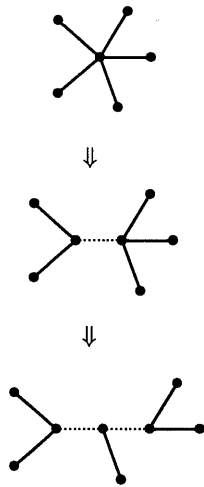


図 8: 頂点の次数を減らす方法

S-2 H の平面埋め込みを求める。これは、よく知られているアルゴリズムがあるのでそれを用いる。時間計算量は $O(n)$ である。[7], [8]

S-3 H の平面埋め込みに対して幅優先探索を行い、幅優先探索木を求める。同時に各頂点の番号付けとレベルも求める。このとき、木の深さを d 、各レベルの頂点数の最大値を l とする。明らかに $d < n$ かつ $l < n$ である。時間計算量は $O(n)$ である。

S-4 H の平面埋め込みを用いて G をマイナーとするような円柱グラフ C を求める。同心円の数は $O(d)$ であり、同心円上の頂点数の数は $O(l)$ となる。時間計算量は $O(dl)$ である。

実際のアルゴリズムは、アルゴリズム 2 の後にアルゴリズム 1 を用いる。このアルゴリズムが有効に働くかどうかは埋め込む円柱グラフのサイズに依存する。また、数値解析で用いられる実用上重要なグラフには、円柱グラフに埋め込むと $O(\sqrt{n}) \times O(\sqrt{n})$ となるものしばしば見受けられる。そのようなグラフに対しては、このアルゴリズムの時間計算量は、 $O(n\sqrt{n})$ となる。

5 結論

グラフに関連する線形方程式を Δ - Y 変換を用いて解くアルゴリズムを提案した。本稿で提案したアルゴリズムは万能ではないが、実用上の多くの方程式に対して有効に働くことが期待できる。また、今後の課題としては次のことが挙げられる。

1. このアルゴリズムを適用するための条件をより弱めること。
2. 埋め込みを求めるアルゴリズムを改良すること。
3. 計算機上に実装を行ない、実験によって理論を確かめる。

参考文献

- [1] W.T.Tutte, "Convex representation", *Proc. London Math. Soc.* (3) 10 (1960) 304-320
- [2] W.T.Tutte, "How to draw a graph", *Proc. London Math. Soc.* 13 (1963) 743-768.
- [3] G.V.Epifanov, "Reduction of a plane graph to an edge by a star-triangle transformation", *Doklady* 166 (1966) 13-17.
- [4] K.Truemper, "On the Delta-Wye Reduction for Planar Graphs", *J. Graph Theory* 13, 2 (1989) 141-148.
- [5] R.J.Lipton, D.J.Rose and R.E.Tarjan, "Nested dissection", *SIAM.J. Numer. Anal.* 16,2 (1979) 346-358.
- [6] L.G.Valiant, "Universality Considerations in VLSI Circuit", *IEEE Trans. Comp.* 30 (2) (1981) 135-40.
- [7] K.S.Booth, G.S.Looker, "Testing the consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms", *J. Comput. Syst. Sci.* 13 (1976) 335-379
- [8] J.Hopcraft, R.Tarjan, "Efficient Planarity Testing", *J. Assoc. Comp. Mach.* 21, 4, (1974) 549-568.
- [9] 高橋 浩光, 中原 寛志, 田中 覚 "平面グラフの $Y - \Delta$ 変換と連立 1 次方程式", 日本数学会応用数学科会講演アブストラクト (1993) 41-44.