大気の光学的厚さに対する太陽の伝達輝度の反転

金沢工業大学　　上野季夫

1. はじめに

最近，分布定数系における未知パラメータの推定が雑音を伴う測定値を用いてなされるようになった．換言すると，反転問題において，解のある汎関数により与えられた情報によって，既知構造の演算子の係数を同定する試みがなされた．観測された汎関数における小さい擾乱が当該解に大きい誤差を導入するかかる反転問題は古典的な意味で屢々不十分に提出されたものと言う（参照 Nashed[13]）．許容解にある附加的な制限を加えて，不十分におかれた問題がデータ擾乱に相対的な定常解を有するようになる．かかる問題は条件的に十分におかれたものとして知られている．不正確なデータをもつ条件的に十分におかれた問題の近似解に対する必要性は正則化を伴う革新を惹起した．それにより反転問題は性能（二次）汎関数の最小化に帰せられる．

近年，特に温度探索に主点をおいて，計算履行上の観点から若干の反転方法が吟味された．例えば，解の拘束による解析的正則化，統計的正則化，反復的正則化その他である（参照 Deepak[23]; Twomey[24]; Fymat and Zuev[25]）．更に，輻射輸達式の数学的反転は，リモートセンシングに対する強力な手段である．換言すると，地平面（又は水面）により境界された大気の構造及び組成の決定は演算子的及び予測的気象学においてのみならず，又離散値化された地球画像のパターン認識においても基本的に重要である．
若干の論文において（参照，Bellman, Kagiwada, Kalaba, and Ueno[1,2]; Kagiwada[22]; Bellman, Fymat, Ueno, and Vasudevan[5]; Kagiwada, Kalaba and Ueno[6]），不変埋蔵と準線形化を正則化汎関数の最小に応用して，大気の光学的厚さ，単1散乱及び位相関数の如き光学的性質及び其他が数値的に解かれた．この方法の多重散乱えの応用の経験によれば，良好な第1近似の選択が重要である．何故なればこの場合，その方法の収束性は迅速であり，反対に第1近似が貧弱であれば，その結果は発散してしまう．

この論文においては，不変埋蔵と準線形化を用いて，拡散性反射体により境界された，地球・大気系の光学的厚さが，最小自乗の意味で，底面における雑音入りの全分光学的輝度観測値から推定されることを論ずるものである．但し他の大気の光学的性質及び地平面の反射係数は既知とする．

2. 拡散反射及び伝達

簡単のため，拡散性反射面により境界された光学的厚さ t の平面平行，均質，非等方性散乱大気を考える（参照．Ueno and Wang[17]）．光学的深さ $t=0$ における頂面は単位面積あたり πF の輻射束により一様に方向 Ω_0 で照射されているとする．方向 Ω における平面 t の輻射の上向き強度を $I(t,+\Omega)$，且同様に，方向 Ω における平面 t の輻射の下向きの強度を $I(t,-\Omega)$ とする．ここに Ω とは $(\pm v=\cos\theta, \phi)$ $(0\leqslant v\leqslant 1,\ 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi)$ であり，θ は頂面における垂線から測った天頂角，ϕ は方位角である．位相関数は $P(\Omega,\Omega_0)$ で与えられ，これは1に規格化されている．更に，単1散乱に対する反射係数は λ により与えられ，これは，1に等しいか又は小さい正値である．

非保存的な場合に適当な輸達式は次に与えられる．

$$v\frac{d}{dt}I(t,v) = I(t,v)-\frac{\lambda}{4\pi}\int_{4\pi}P(\Omega,\Omega')I(t,\Omega')d\Omega', \tag{1}$$

ここに　$d\Omega'=dv'd\phi'$.　(1)式は次の境界条件により解かねばならない.

$$I(0,-\Omega) = \pi F\delta(\Omega-\Omega_0), \tag{2}$$

$$I(x,\Omega) = \int_{2\pi}k(\Omega,\Omega')I(x,-\Omega')v'd\Omega'/v, \tag{3}$$

ここに δ とはDiracのデルタ関数, Ω_0 は $(\theta_0=\cos^{-1}u,\phi)$ であり, 且 $k(\Omega,\Omega')$ とは双角反射度を表し, これは $-\Omega'$ で地上に入射した光が反射後 $+\Omega$ の方向に単1立体角内で反射される確率を示す. 完全拡散反射体の場合, それは次に与えられる.

$$k(\Omega,\Omega') = Av/\pi, \tag{4}$$

ここにAはLambertの則に従う地上の反射係数である. 頂面及び底面における全スペクトル拡散輝度は

$$I(0,+\Omega) = \frac{F}{4v}S(x,A;\Omega,\Omega_0), \tag{5}$$

$$I(x,-\Omega) = \frac{F}{4v}T(x,A;\Omega,\Omega_0), \tag{6}$$

ここに $S(x,A;\Omega,\Omega_0)$ 及び $T(x,A;\Omega,\Omega_0)$ は有限の地表面反射係数を有する散乱及び伝達関数である.

位相関数をLegendreの多項式(参照. Chandrasekhar[18], 頁177)に展開し,

$$P(\Omega,\Omega') = \sum_{m=0}^{M}(2-\delta_{0m})\{\sum_{l=m}^{M}c_l^m P_l^m(v)P_l^m(v')\}\cos m(\phi-\phi'), \tag{7}$$

ここに $P_l^m(v)$ は l 度 m 次の連合Legendre関数である.

$$c_l^m = c_l\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \quad (l=m,\ m+1,\cdots\cdots,M,\ 0\leq m\leq M), \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\delta_{0m} &= 1 \quad \text{if} \quad m=0\\ &= 0 \quad \text{otherwise}\end{aligned} \tag{9}$$

散乱及び伝達関数も同様にFourier分値に展開すると

$$S(x,A;\Omega,\Omega_0) = \sum_{m=0}^{M}S^{(m)}(x,A;v,u)\cos m(\phi-\phi_0), \tag{10}$$

$$T(x,A;\Omega,\Omega_0) = \sum_{m=0}^{M}T^{(m)}(x,A;v,u)\cos m(\phi-\phi_0). \tag{11}$$

不変埋蔵法に倣って(参照. Kagiwada and Kalaba[19]; Bellman and Ueno[20]; Ueno and Wang[17]) 散乱及び伝達関数のFourier分値, 即ち $S^{(m)}(x,A;v,u)$ 及び $T^{(m)}(x,A;v,u)$ は次式により支配される.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}S^{(m)}(x,A;v,u) + (\frac{1}{v}+\frac{1}{u})S^{(m)}(x,A;v,u) =\\ &= (2-\delta_{0m})\lambda\sum_{l=m}^{M}(-1)^{l+m}c_l^m\psi_l^m(x,A,v)\psi_l^m(x,A,u),\end{aligned} \tag{12}$$

及び

$$\frac{\partial}{\partial x} T^{(m)}(x,A;v,u) + \frac{1}{u} T^{(m)}(x,A;v,u) = (2-\delta_{0m})\lambda \sum_{l=m}^{M} C_l^m \phi_l^m(x,A,v)\psi_l^m(x,A,u), \tag{13}$$

ここに

$$\psi_l^m(x,A,v) = P_l^m(v) + \frac{(-1)^{m+l}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 S^{(m)}(x,A;v,w) P_l^m(w) \frac{dw}{w}, \tag{14}$$

及び

$$\phi_l^m(x,A,v) = e^{-x/v} P_l^m(v) + \frac{1}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 T^{(m)}(x,A;v,w) P_l^m(w) \frac{dw}{w}. \tag{15}$$

式(12)及び(13)は次の初期条件に支配される

$$S^{(m)}(0,A;v,u) = 4Avu\delta_{0m}, \tag{16}$$

$$T^{(m)}(0,A;v,u) = 0 \tag{17}$$

更に．Fourier 分値 $S^{(m)}$－及び $T^{(m)}$関数はその角変数について相互性を満足している．区間(0, 1)内において数値積分を施すと．式(14)及び(15)における積分は．和によって置換され，そのFourier分値S－及びT－関数は次に与えられる．

$$S_{ij}^{(m)}(x,A) = S^{(m)}(x,A;v_i,v_j), \qquad T_{ij}^{(m)}(x,A) = T^{(m)}(x,A;v_i,v_j). \tag{18}$$

式(18)中において $\{v_i\}$ は次数Nの転移Legendre多項式，$P^*(v) = P_N(1-2V)$，のN根の組である．かくて関数 $S_{ij}^{(m)}(x,A)$ 及び $T_{ij}^{(m)}(x,A)$ は次の微分方程式を満足する．

$$\frac{\partial}{\partial x} S_{ij}^{(m)}(x,A) + \left(\frac{1}{v} + \frac{1}{u}\right) S_{ij}^{(m)}(x,A) = (2-\delta_{0m})\lambda \sum_{l=m}^{M} (-1)^{l+m} C_l^m \psi_{li}^m(x,A)\psi_{lj}^m(x,A), \tag{19}$$

及び

$$\frac{\partial}{\partial x} T_{ij}^{(m)}(x,A) + \frac{1}{u} T_{ij}^{(m)}(x,A) = (2-\delta_{0m})\lambda \sum_{l=m}^{M} C_l^m \phi_{li}^m(x,A)\psi_{lj}^m(x,A), \tag{20}$$

ここに $m = 0, 1, 2, \cdots\cdots, M$; $i, j = 1, 2, \cdots\cdots, M$, 及び

$$\psi_{li}^m(x,A) = P_{li}^m + \frac{(-1)^{l+m}}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{j=1}^{M} S_{ij}^{(m)} P_{lj}^m \frac{w_j}{v_j}, \tag{21}$$

$$\phi_{li}^m(x,A) = e^{-x/v_i} P_{li}^m + \frac{1}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{j=1}^{M} T_{ij}^{(m)} P_{lj}^m \frac{w_j}{v_j}. \tag{22}$$

式(21)及び(22)中 W_j は V_j に応ずる．クリストフェル重価である．式(19)及び(20)は次の初期条件のもとで解かれねばならない．

$$S_{ij}^{(m)}(0,A) = 4Av_iv_j\delta_{0m}, \qquad T_{ij}^{(m)}(0,A) = 0 \tag{23}$$

3．反転問題

位相関数P，単1散乱に対する反射係数λ，及び地表面反射係数Aは共に既知とする．底面において N' 個の雑音の入った全伝達散乱輝度の観測値を得たと考えよう．それを b_{ijk} とする．ここに添字kは視角の方位角のk－分値を示す．ここに2次性能関数を極小にする．

$$\sum_{i,j,k}\{I(x,A;v_i,\phi_k;v_j,\phi_0) - b_{ijk}\}^2, \tag{24}$$

ただし

$$I(x,A;v_i,\phi_k;v_j,\phi_0) = \frac{F}{4v_i}\sum_{m=0}^{M} T^{(m)}(x,A;v_i,v_j)\cos m(\phi_k-\phi_0). \tag{25}$$

4. 準線形化

準線形化(参照, Bellman and Kalaba[21]; Kagiwada[22]; Kagiwada, Kalaba and Ueno[6])を以って、この反転問題はとける。さて、関数$S_{ij}^{(m)}$及び$T_{ij}^{(m)}$を夫々S_{mij}及びT_{mij}とかき、且同様に$\psi_{ki}^{m}=\psi_{mki}$, $\phi_{ki}^{m}=\phi_{mki}$, $P_k^m(\eta_j)=P_{mkj}$とかいて、T_{mij}, S_{mij}及びτに対する$(n+1)$次の近似線形微分方程式の系をうる。

$$\frac{\partial T_{mij}^{n+1}}{\partial\sigma} = \tau^n[f(T_{mij}^n, S_{mij}^n, \tau^n,\sigma) + \sum_{ij}[T_{mij}^{n+1} - T_{mij}^n]\frac{\partial f}{\partial T_{mij}^n} + \sum_{ij}[S_{mij}^{n+1} - S_{mij}^n]\frac{\partial f}{\partial S_{mij}^n} + (\tau^{n+1}-\tau^n)\frac{\partial f}{\partial\tau^n}], \tag{26}$$

$$\frac{S_{mij}^{n+1}}{\partial\sigma} = \tau^n\{g(S_{mij}^n,\tau^n,\sigma) + \sum_{i,j}[S_{mij}^{n+1} - S_{mij}^n]\frac{\partial g}{\partial S_{mij}^n} + (\tau^{n+1}-\tau^n)\frac{\partial g}{\partial\tau^n}\} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\tau^{n+1}}{\partial\sigma} = 0 \tag{28}$$

ここに

$$x=\sigma\tau\,(0\leqq\sigma\leqq 1.0), \tag{29}$$

$$f(T_{mij}^n, S_{mij}^n, \tau^n,\sigma) = -\frac{1}{u}T_{mij}^n + (2-\delta_{0m})\lambda\sum_{l=m}^{M} C_l^m\,\phi_{mli}^n(x,A)\psi_{mlj}^n(x,A). \tag{30}$$

$$g(S_{mij}^n,\tau^n,\sigma) = -(\frac{1}{v}+\frac{1}{u})S_{mij}^n + (2-\delta_{0m})\lambda\sum_{l=m}^{M}(-1)^{l+m}C_l^m\,\psi_{li}^m(x,A)\psi_{lj}^m(x,A), \tag{31}$$

式(30)中ψ_{mli}^n及びϕ_{mli}^nは共にガウスの数値積分形式において式(21)及び(22)中に与えられる。ここにS−及びT−関数のn次の近似は角の相互性の原理を満足する。

T_{mij}^{n+1}は線形微分方程式の系の解であるから、それを特別解g_{mij}及び同次解h_{mij}の線形結合の項で表すことができる。

$$T_{mij}^{n+1} = q_{mij}(\tau) + \tau\cdot h_{mij}(\tau). \tag{32}$$

g_{mij}に対する微分方程式の系は、gの適当な分値を式(26)及び(27)中T^{n+1}, S^{n+1}, 及びτ^{n+1}の存在するところに挿入してえられる。同様に、同次解に対する方程式の系は、$(n+1)$次の近似を含まないすべての項をおとして与えられる。但し、その初期ベクトル$h(0)$は1である。最終のものを除いて、零分値である。これらの数値積分は$0\leqq t\leqq\tau$の区間内において容易になされる。何故なれば初期条件の完全な組が与えられているからである。

かくて、式(24)を最小にするτ^{n+1}の値は、簡単な微分により、次の如く与えられる。

$$\tau^{n+1} = \sum_{i,j,k}[4v_i b_{ijk}F^{-1} - \sum_{m=0}^{M}q_{mijk}\cos m(\phi_k-\phi_0)]\,[\sum_{m=0}^{M}h_{mijk}\cos m(\phi_k-\phi_0)]/\sum_{i,j,k,m}[h_{mijk}\cos m(\phi_k-\phi_0)]^2 \tag{33}$$

式(33)は求める解である。

5. おわりに

本論文においては，不変埋蔵と準線形化を用いて，地平面における太陽の拡散輻射伝達強度の測定から大気の光学的厚さを求める反転問題の解析解を求めた．但し，他の光学的性質及び地平面の反射係数は既知とした．次の論文において，これらの数値計算値が議論されるであろう．

文　献

1. R. Bellman, H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno, 1965: On the identification of systems and the unscrambling of data-II. An inverse problem in radiative transfer. Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A. 53, 910-913.

2. ____, 1965: Inverse problems in radiative transfer: Layered media. ICARUS, 4, 119-126.

3. ____, 1965: Inverse problems in radiative transfer and wave propagation. The RAND Corporation Memorandum, RM-4281-ARPA.

4. R. Bellman, H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno, 1967: Numerical results for the estimation of source distribution from external radiation field measurements: Journal of Computational physics, 1, 457-470.

5. R. Bellman, A.L. Fymat, S. Ueno, and R. Vasudevan, 1974: Invariant imbedding and radiation dosimetry X. Inverse problem of determining a plane source in a finite isotropically scattering target slab. Mathematical Bioscience, 20, 315-325.

6. H. Kagiwada, R. Kalaba, and S. Ueno, 1975: Multiple Scattering Processes: Inverse and Direct. Addison-Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass..

7. S. Ueno, 1978: Inference of the atmospheric optical thickness from the total spectral radiance, in Proceedings of 11th Lunar and Planetary Symposium (edit. by M. Shimizu), Institute for Space and Aeronautical Science, Tokyo University, 6-12.

8. S. Ueno 1978: Estimation of the surface albedo using the noisy total radiance measurements, in Proceedings of 4th International Joint Conference on Pattern Recognition, November 7-10, Tokyo, Japan, 935.

9. Y. Haba, Y. Kawata, T. Kusaka, and S. Ueno; The system of correcting remotely sensed Earth imagery for atmospheric effects, in Proceedings of the 13th International Symposium on Remote Sensing of Environment. ERIM, University of Michigan, Ann Arbor, Michigan, April 23-27, 1979, University Press of Michigan, pp.1883-1894.

10. S. Ueno; Remote sensing-research experiences and problems. To appear in Proceedings of Workshop on Processes in Marine Remote Sensing, University of Manchester, June 26-30, 1979, University Press of South Carolina.

11. S. Ueno; Identification of the optical thickness in Earth-atmosphere system with a hybrid reflector. To appear in Astrophysics and Space Science.

12. S. Ueno, Y. Kawata, T. Kusaka, and Y. Haba; Ground albedo Mapping from remotely sensed Earth's imagery data. To be presented at IFAC Symposium on water and related land resorces Systems, May 28-31, 1980, Case Institute of Technology, Cleaveland, Ohio.

13. M.Z. Nashed (Editor), 1976: Generalized Inverses and Applications, Academic Press, New York.

14. S. I. Rasool, and S.H. Schneider, 1971: Atmospheric carbon dioxide and aerosols Effects of large increases on Global clinate. Sciences, 173, 138-141.

15. G. Yamamoto and M. Tanaka, 1972: Increase of global albedo due to air pollution. Journal of Atmospheric Sciences, 29, 1405-1412.

16. M.D. King, and B.M. Herman, 1979: Determination of the ground albedo and index of absorption of atmospheric particulates by remote sensing. Part I: Theory. Journal of Atmospheric Sciences, 36, 163-173.

17. S. Ueno and A.P. Wang, 1973: Scattering and transmission functions of radiation by a finite atmosphere with a reflecting surface. Astrophysics and Space Science, 23, pp.205-220.

18 S. Chandrasekhar, 1950: Radiative Transfer. Oxford University Press

19. H. Kagiwada and R. Kalaba, 1971: Invariant imbedding and radiation fields in finite isotropically scattering slabs bounded by a Lambert's law reflector, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 11, pp.1101-1109.

20. R. Bellman and S. Ueno, 1972: Invariant imbedding and Chandrasekhar's planetary problem of radiative transfer. Astrophysics and Space Science, 16, pp.241-248.

21. R. Bellman and R. Kalaba, 1965: Quasilinearization and Non-linear Boundary-Value Problems American Elsevier Publ. Co., Inc., New York.

22. H. Kagiwada, 1974: System Identification: Methods and Applications; Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass..

23. A. Deepak (Editor), 1977: Inversion Methods in Atmospheric Remote Sounding, Academic Press, New York.

24. S. Twomey, 1977: Introduction to the Mathematics of Inversion in Remote Sensing and Indirect Measurement, Elsevier Scientific Publ. Co., Amsterdam.

25. A.L. Fymat and V.E. Zuev (Editors), 1978: Remote Sensing of the Atmosphere: Inversion Methods and Applications, Elsevier Scientific Publ. Co., Amsterdam.