代数方程式の全根同時解法の重根における挙動

田辺國士
（統計数理研究所）

昨年C&Aシンポジウムで発表した代数方程式の全根同時解法[10]の重根、近接根がある場合におけるふるまいについて新たな知見を得たので報告する。
複素係数をもつn次の代数方程式,

$$P(z) \equiv z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n \tag{1}$$

を考える。この方程式の全根を同時並行的に求める反復解法にはDK法,

$$z_i^+ = z_i + \varphi_i \tag{2}$$

$$\varphi_i \equiv - \frac{P(z_i)}{\prod_{j \neq i} (z_i - z_j)} \quad (i = 1, \cdots, n) \tag{3}$$

や Aberth法[2]

$$z_i^+ = z_i + f_i \tag{4}$$

$$f_i \equiv \frac{P(z_i)/P'(z_i)}{1 - \frac{P(z_i)}{P'(z_i)} \sum_{j \neq i} \frac{1}{z_i - z_j}} \quad (i = 1, \ldots n) \tag{5}$$

などがよく知られている。ここでは、[10]で提案した反復解法,

$$z_i^+ = z_i + \psi_i \tag{6}$$

$$\psi_i = \varphi_i \left(1 + \sum_{j \neq i} \frac{\varphi_j}{z_i - z_j}\right) \tag{7}$$

が(2~5)の方法に比べて好ましい性質を持っており、特に重根の高精度計算に都合がよいことを示そう。解法(6~7)は次のような性質をもっている[10]。

補題1) z_i $(i = 1, \ldots, n)$ が $-c_1/n$（根の重心）を中心とする十分大な円

$$| z + c_1/n | = \rho \tag{8}$$

の周上に等間隔に並んでいるならば，$i=1,\dots n$ に対して

$$z_i^+ + c_1/n \doteqdot \left(1-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right)(z_i + c_1/n) \qquad (9)$$

となる。

<u>補題II)</u> 任意の初期値 z_i^0 $(i=1\dots n)$ に対して

$$z_i^{k+1} = z_i^k + \psi_i^k \qquad (k=0,1,\dots\infty) \qquad (10)$$

とおくと常に

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} z_i^k}{n} = -\frac{c_1}{n} \qquad (k=1,2,\dots\infty) \qquad (11)$$

が成り立つ。(重心不変性)

<u>定理III)</u> 方程式のすべての根 α_i $(i=1,\dots,n)$ が単根でありかつ近似解 z_i $(i=1\dots n)$ が十分分離されている。すなわち

$$|z_i-\alpha_i| \ll |\alpha_i-\alpha_j| \qquad (\forall i \neq \forall j) \qquad (12)$$

とするならば，誤差 $e_i \equiv z_i-\alpha_i$，$e_i^+ \equiv z_i^+-\alpha_i$ の間には次の関係が成り立つ。

$$e_i^+ = e_i\Big(\sum_{j\neq i}\sum_{\substack{k\leq j\\ k\neq i}} \frac{e_j}{\alpha_i-\alpha_j}\frac{e_k}{\alpha_i-\alpha_k} + \sum_{j\neq i}\sum_{k\neq j} \frac{e_j}{\alpha_i-\alpha_j}\frac{e_k}{\alpha_j-\alpha_k} + O(e_j e_k e_l)\Big) \qquad (13)$$

したがって $e_i=O(e)$ $(i=1,\dots,n)$ のとき $e_i^+=O(e^3)$ となるから 反復解法(6-7)は3次収束する。

次に重根の場合について考えよう。いま

$$P(z) \equiv \prod_{\lambda=1}^{m}(z-\alpha_\lambda)^{n_\lambda} \qquad (m\leq n) \qquad (14)$$

$$\alpha_\lambda \neq \alpha_\mu \ (\lambda\neq\mu), \quad \sum_{\lambda=1}^{m} n_\lambda = n \qquad (15)$$

とする。今 z_i $(i=1,\dots,n)$ を (1) の根の近似解とし、I_λ を根 α_λ を近似する z_i の添字集合とする。また、

$$I_\lambda \cap I_\mu = \phi \quad (\lambda \neq \mu), \quad \bigcup_{\lambda=1}^{m} I_\lambda = \{1, 2, \dots, n\} \tag{16}$$

$$\# I_\lambda = n_\lambda \quad (\lambda = 1, \dots m)$$

と仮定する。ここで $\{1, \dots, n\}$ から $\{1, \dots m\}$ への写像 ( ) を

$$(i) \equiv \lambda \quad (i \in I_\lambda \text{ のとき}) \tag{17}$$

と定義しておく。今 $e_i \equiv z_i - \alpha_{(i)}$, $e_i^+ \equiv z_i^+ - \alpha_{(i)}$,
とするとき次の性質が成りたつ。

補題V) z_i $(i \in I_\lambda)$ が異なる λ で十分分離されている。すなわち

$$|z_i - \alpha_{(i)}| \ll |\alpha_{(i)} - \alpha_\lambda| \quad (\forall (i) \neq \forall \lambda) \tag{18}$$

し、z_i $(i \in I_\lambda)$ が十分小さな円

$$|z - \alpha_{(i)}| = \rho' \tag{19}$$

の円上で等間隔に並んでいるならば、$i \in I_\lambda$ に対して

$$z_i^+ - \alpha_{(i)} \fallingdotseq \left(1 - \frac{3}{2n_\lambda} + \frac{1}{2n_\lambda^2}\right)(z_i - \alpha_{(i)}) \tag{20}$$

が成りたつ。

これは解法(6-7)が重根に対しては一次以上の収束性を持たないことを示している。ところが大変都合のよいことに 重心

$$w_\lambda = \left(\sum_{i \in I_\lambda} z_i\right) / n_\lambda \tag{21}$$

は次のような性質をもつ。

定理V) $\varepsilon_\lambda \equiv w_\lambda - \alpha_\lambda$, $\varepsilon_\lambda^+ \equiv w_\lambda^+ - \alpha_\lambda$ とおくとき、条件(18)の下で

$$\varepsilon_\lambda^+ = \varepsilon_\lambda \Bigg(\sum_{\mu \neq \lambda} \sum_{\substack{\nu \leq \mu \\ \nu \neq \lambda}} \frac{n_\mu \varepsilon_\mu}{\alpha_\lambda - \alpha_\mu} \frac{n_\nu \varepsilon_\nu}{\alpha_\lambda - \alpha_\nu}$$

$$+\sum_{\mu\neq\lambda}\sum_{\nu\neq\mu}\frac{n_\mu\varepsilon_\mu}{\alpha_\lambda-\alpha_\mu}\,\frac{n_\nu\varepsilon_\nu}{\alpha_\mu-\alpha_\nu}$$

$$+\,O(e_j e_k e_l)\,)\qquad (22)$$

が成り立つ。

これは，近似解 z_i 自身は収束が遅くても重心 w_λ は十分速く根に収束する可能性があることを示している。(22)と(13)は式を比べるとその相似性に気がつかれるであろう。ただし(22)式における成分

$$O(e_i e_j e_k)\qquad (22)$$

に注意。もしこれが $O(\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\varepsilon_\nu)$ で置き換えられるならば好ましいのであるが，筆者が試みた範囲ではその可能性がないようである。これを支持する数値実験の結果も出ている。

以下，上に述べた事実に基づいて重根を高精度で求める試みについて述べる。もちろん，一般に計算精度が δ のとき，k 重根は $O(\delta^{1/k})$ の精度でしか数値的に決定することはよく知られている。したがって，より高精度で重根を求めることにはトリックが必要である。すなわち，a prioriに「重根である」あるいは「近接根ではない」という情報を用いて，重根の値をより高精度に求めようというわけである。

反復(6-7)を繰り返すと単根はかなり早く精度一ぱい求めることが出来る。収束の遅いものは重根か近接根に収束しようとする近似解である。興味深いことに，反復が十分進んだ段階では補題D)の仮定が近似的に成り立ち，$\varphi_i^k = z_i^{k+1} - z_i^k$ は(20)より

$$\varphi_i^{k+1} \doteqdot \left(1-\frac{1}{2n_\lambda}+\frac{1}{2n_\lambda^2}\right)\varphi_i^k \qquad i\in I_\lambda \qquad (23)$$

であるから，比 $\varphi_i^{k+1}/\varphi_i^k \equiv r_i^k$ を観察すれば z_i^k が(何重根(近接根)に近づこうとしているかが

$$\tilde{n}_i \equiv \frac{3+\sqrt{1+8r_i^k}}{4(1-r_i^k)}\qquad (24)$$

から推定出来る。$\tilde{n}_i$ がほぼ等しい z_i^k の添字の集合を

$$I = \bigcup_{n_\lambda = n_{(i)}} I_\lambda \qquad \text{（ただし } n_{(i)} = \hat{n}_i \text{ に近い自然数）}$$

と見做し、試みに $P(\tilde{w})$ を計算する。ただし

$$\tilde{w} = \Big(\sum_{i\in I} z_i^k\Big)/(\# I) \qquad (25)$$

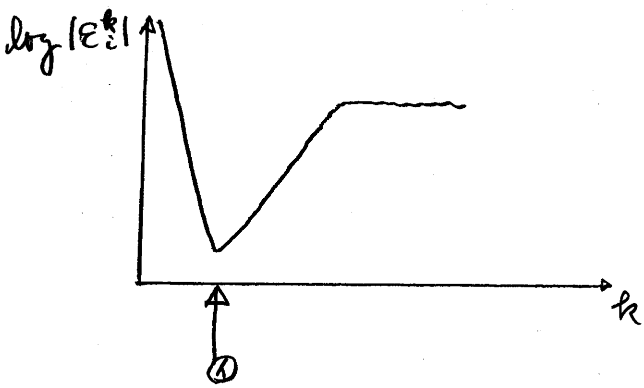
$|P(\tilde{w})|$ が $|P(z_i^k)|$ にくらべて十分小さくなるならば $I = I_\lambda$ と考える。もしそうでなければ、

$$|z_i^k - z_j^k| \qquad (i, j \in I) \qquad (26)$$

を用いてクラスタリングし、個々の I_λ を見付ける。それが妥当かどうかは、$|P(\hat{w})|$ の値が $|P(z_i^k)|$ より十分小さいかで判断する。ただし

$$\hat{w} = \Big(\sum_{i\in I_\lambda} z_i^k\Big)/(\# I_\lambda) \qquad (27)$$

以上のような手続きで各 z_i^k がどの I_λ に属するかが正しく求まったと仮定する。このとき定理Ⅴによって w_λ は α_λ に十分速く収束することが予想される。実際 $\varepsilon_\lambda^k \equiv w_\lambda^k - \alpha_\lambda$ は最初のうちは急速に減少してゆく。しかしある限度以上反復を実行してゆくと逆に誤差がふえ下図のようになる。



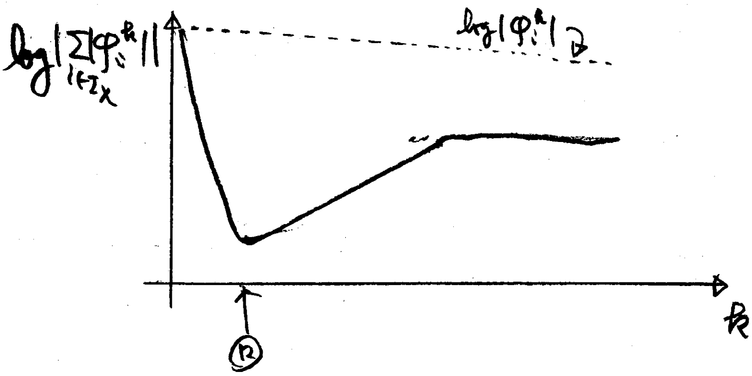
このことは[7]においても観察されている。従って矢印のところで反復を停止できれば都合がよい。ε_λ を観測することはできないから これに代るものが必要となる。都合のよいことに

$$\sum_{i\in I_\lambda} \psi_i^k \to 0 \qquad (k \to \infty) \qquad (28)$$

であるが、定理Vより この収束は個々のφ_i^kよりも速く
0に収束することが予想される。実際

$$x_i^k \equiv \left|\sum_{i \in I_x} \varphi_i^k\right| \qquad (29)$$

の動きは下図のようになる。



多くの場合 ⓐの矢印と ⓑの矢印はほとんど一致する。そこで

$$x_i^k < x_i^{k+1} \qquad (30)$$

となった段階で $I_{(i)}$ に属する近似の反復を止めることにする。筆者の経験では重根が複数個ある場合でも、停止する点は同じになるようである。研究会で、数値実験の結果を詳しく述べたい。

参考文献

1. DURAND, E., NUMERISCHE MATHEMATIK 1960
2. KERNER, I.O., " 1966
3. ABERTH, O. MATHEMATICS OF COMPUTATION 1973
4. FARMER & LOIZOU, BIT 1975
5. 山本哲朗, 数理科学 157 1976
6. 山本・古金・野倉, 情報処理 18 1977
7. 伊理・山下・寺野・小野, 京大数理解析研究所講究録 339, 1978
8. 小野令美, 情報処理 20 1979
9. 伊理正夫, 数値計算, 朝倉書店 1981
10. 田辺國士, C&Aシンポジウムメモ, 1982 "A NEW ALGORITHM OF SIMULTANEOUS ITERATION TOWARDS ALL ROOTS OF A COMPLEX POLYNOMIAL"