

## 非線形モデルにおける異常振動の例

熊野長次郎 (三菱総合研究所)

非線形現象をモデル化し、数値解析を行った場合、現場担当者が予め想定していた結果と大幅に異なることが時々ある。主な原因として、

1. モデルが現象を忠実に反映していないこと。
2. 微分方程式を解く場合のスキームの選択が適切でないこと。
3. 時間差分  $\Delta t$ 、空間差分  $\Delta x$  の取り方に問題があること。

等々が挙げられる。

これらの中で、1については表だって取り上げられることは希である。又、2、3については、解の収束性・安定性について詳細な研究が成されているが、この成果を現実の問題に適用する場合、戸惑うことがある。例えば、

1.  $\Delta t \rightarrow 0$  の時、真の解に収束するといっても、計算時間の制約等から、 $\Delta t$  は大きい方が望ましい。どの程度の  $\Delta t$  であれば、真の解をよく近似するか？
2.  $\Delta t$  の自動調整を行っている場合は、許容誤差の設定をどの様にするか？
3.  $\Delta x$  は一定であるべきか否か？
4. インプリシット・スキームは安定であるといっても、各タイム・ステップを処理する場合の非線形連立方程式が収束しない場合は、どの様な対応をとればよいか？

等の問題である。現実には、これらについて深刻に悩まなければならないのは、モデル自身に難点がある場合が多い。

ここでは、我々の解析グループが、ここ1~2年の間に取り扱った整流器の解析、同期機の連動解析、管路網の水撃現象の解析を例にとり、これらの問題を議論する。

### 1. 整流器の解析

図1.1に示す様な、6個のダイオードによる三相交流の整流モデルについて検討する。ダイオードを理想スイッチとして解析した場合、図1.2の  $t = t_1$  付近で発散する。(インプリシット・スキームを用いた場合は、非線形連立方程式が解けなくなる。) 読者は何が原因と考えられるであろう？

まず考えられるのは、ダイオードを理想スイッチとして扱っていることである。そこで、ダイオードを更に精密にモデル化する。結果は余り改善されない。

次に、整流器のみの機能をシミュレートするために、 $a, b, c$  相のインダクタンス  $L$  を除去する。この時は、ダイオードを理想スイッチとして扱っても、図1.2に示す自明の解とよく一致する。

ここまできれば、結論は明らかである。即ち、ダイオードの切り換えにより、図1.2の  $t = t_1, t_2, t_3, \dots$  付近で、インダクタンス  $L$  を流れる電流は、ハビサイド関数に近い形で変化するため、 $L$  の両端に極めて大きな起電力が発生することが原因である。

この様な、超高周波成分を含む伝送路を解析するためには、先述が教える様

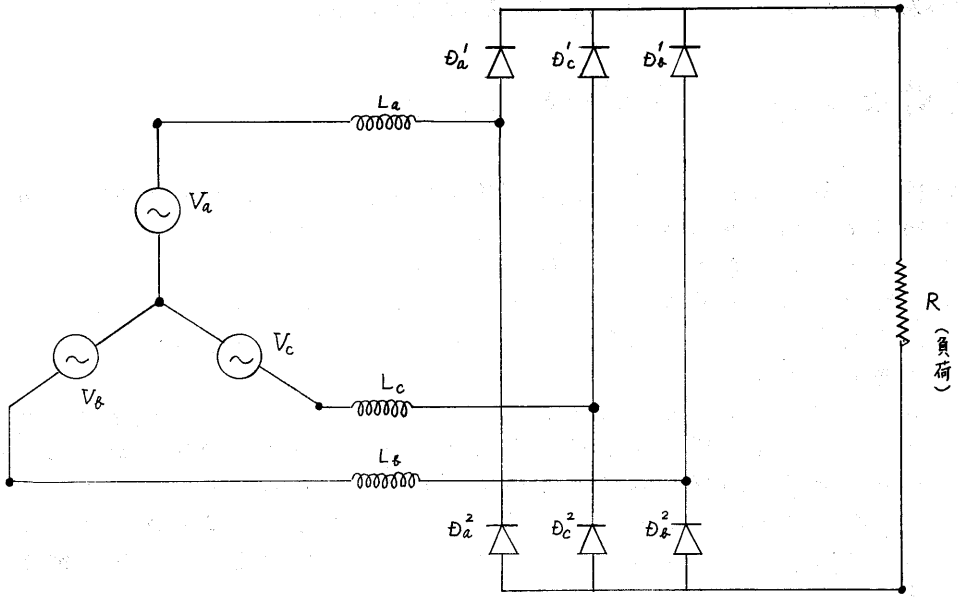


図 1.1 整流器解析の対象回路図

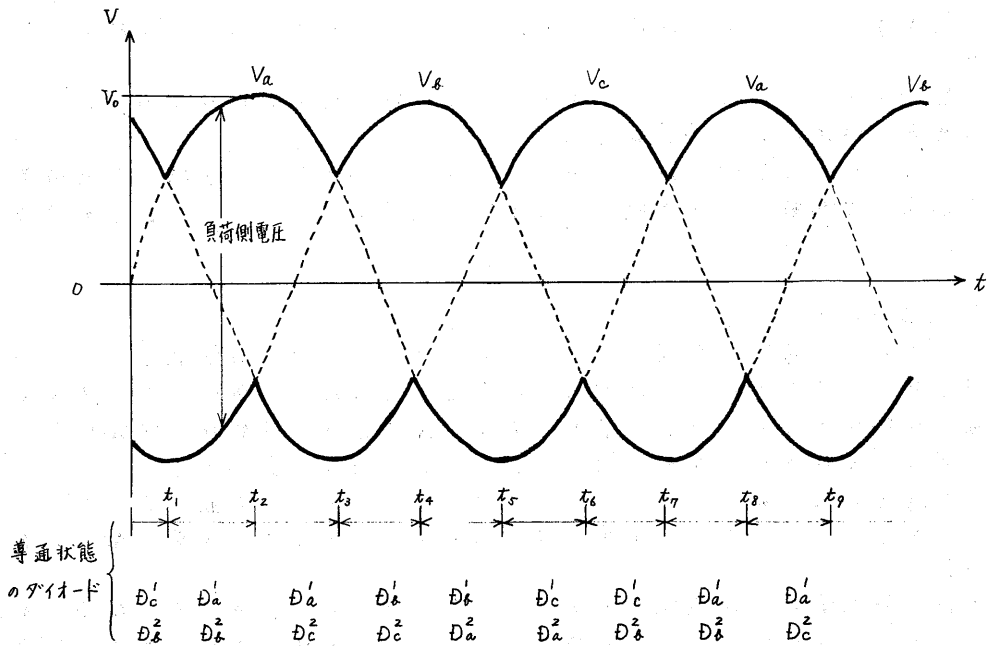


図 1.2  $L=0$  の場合の解析結果

に、伝送線の構造に従ってマクスウェルの方程式を解くか、等価な分布定数回路を設定しなければならない。

尚、3.で述べる管路網の水撃現象の解析でも、ここでの議論のアナロジーが成立する。

## 2. 同期機の連動解析

同期機は、直流励磁により回転子に発生する磁界と図2.1に示す固定子巻線の励磁電流による回転磁界の異極同士が引き合うことにより回転子が回転する機械である。

ここでは、同期発電機と同期電動機を結線し、発電機側に外部トルクを加えていった時に、どのような現象が現われるかをシミュレートしてみる。

モデルとして、図2.3に示す等価回路を考える。

但し、添字 $i$ の値1, 2, 3, 4はそれぞれ固定子巻線A相, B相, C相, 界磁巻線に対応するものとし、

- $r_i$  : 2極当りの巻線 $i$ の抵抗
- $l_i$  : " の漏れインダクタンス
- $n_i$  : " の巻回数
- $p$  : 極対数 (= 極数 / 2)
- $J$  : 回転子の慣性モーメント
- $i_i$  : 巻線 $i$ の電流
- $\psi_i$  : 2極当りの巻線 $i$ の鎖交磁束
- $\tilde{\theta}_i$  : 巻線 $i$ の磁軸から $d$ 軸に至る回転角 (図2.2参照)
- $\theta_i$  : " の電気角 ( " )
- $v_f$  : 界磁電圧 (定数)
- $T_e$  : 機械損トルク  $T_e = T_e(\omega)$  で与えられる。
- $T_o$  : 外部トルク
- $T$  : 電気トルク
- $\omega$  : 回転子の角速度  $\omega = \dot{\theta}$  (図2.2参照)
- $\theta$  : " の電気角  $\theta = \theta_1$  ( " )
- $G$  :  $d$ 軸磁化力
- $\phi$  :  $d$ 軸磁束  $\phi = \phi(G)$  : 強磁性体の磁化特性を示す一価関数

を意味するものとする。

念のため、電気トルク $T$ が $-p^2 \sum_{i=1}^4 n_i i_i \phi \sin \theta_i$ で与えられることを確認しておく。

瞬時における電氣的入力エネルギーを $dA_e$ 、機械的出力エネルギーを $dA_m$ 、磁界のエネルギー増加を $dA_f$ とし、電動機内の損失を無視すると、

$$dA_e = dA_m + dA_f \quad \text{--- (1) が成立する。}$$

一方、

$$dA_e = p \sum_{i=1}^4 E_i i_i dt = p \sum_{i=1}^4 n_i i_i d\psi_i = p \sum_{i=1}^4 n_i i_i (d\phi \cos \theta_i - \phi \sin \theta_i d\theta)$$

$$dA_m = T d\theta = T / p d\theta$$

$$dA_f = p G d\phi = p \sum_{i=1}^4 n_i i_i \cos \theta_i d\phi$$

と計算される。

これを(1)式に代入することにより、 $T = -p^2 \sum_{i=1}^4 n_i i_i \phi \sin \theta_i$ が得られる。

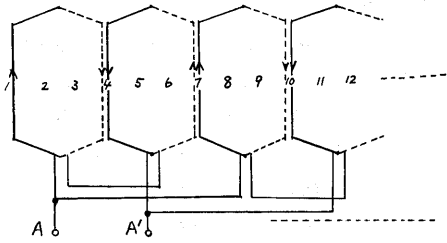
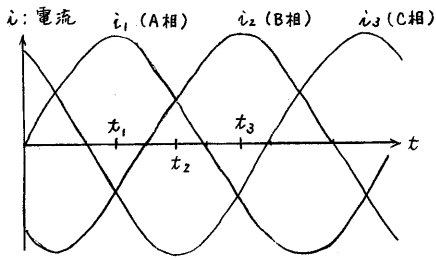
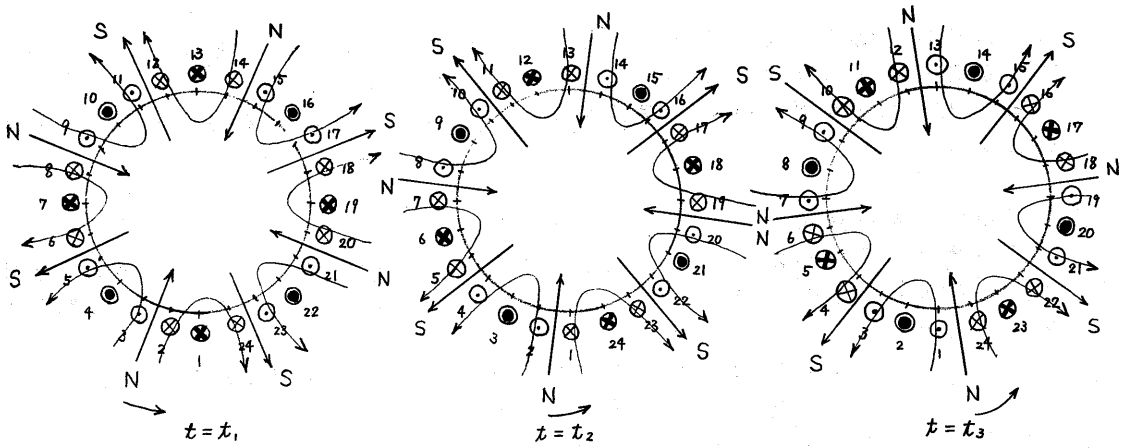


図 2.1 三相 8 極 (4 極対) による回転磁界の発生

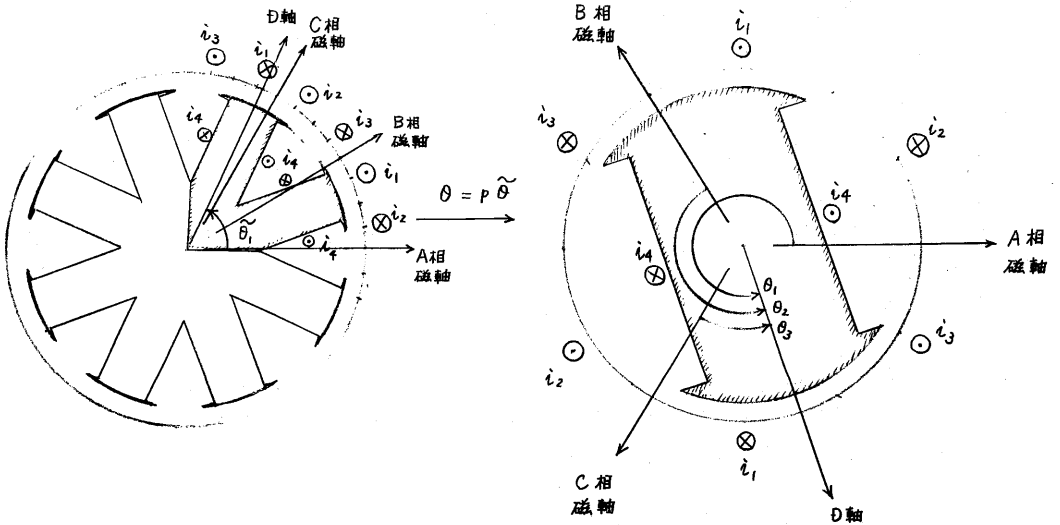
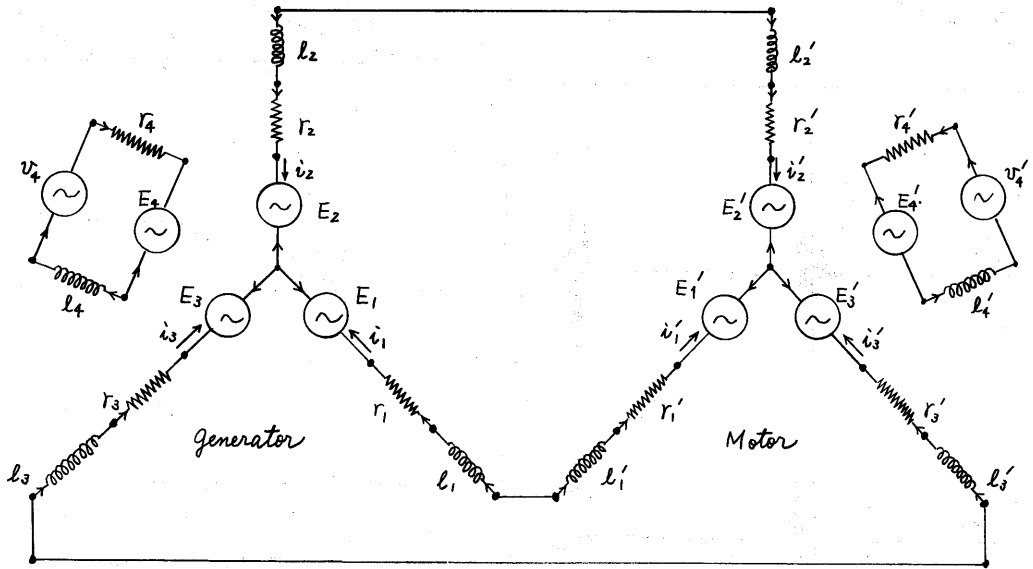


図 2.2 回転子の回転角と電気角の関係



$$\begin{aligned}
 & \circ E_i = n_i \dot{\varphi}_i, \quad \varphi_i = \phi \cos \theta_i \quad \text{for } i = 1, 2, 3, 4 \\
 & \phi = \phi(G), \quad G = \sum_{i=1}^4 n_i i_i \cos \theta_i \\
 & J \dot{\omega} + T_e = T_o + T, \quad T = -p^2 \sum_{i=1}^4 n_i i_i \phi \sin \theta_i \\
 & \dot{\theta} = p \omega \\
 & \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta - 2\pi/3 \\ \theta - 4\pi/3 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$\circ E'_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) についても同様である (但し、 $T_o' = 0$ )

図 2.3 同期機連動解析の等価回路図

さて、計算結果はどの様なものであるだろうか？ 図 2.4 に示す様に  $t = 20$  秒の少し前の辺からカオス的挙動が始まり、やがて回転子は静止する。その後、徐々に回転し、40 秒の手前で先と同様な擾乱を繰り返す。

原因は何であろうか？ 先ず、陽公式の 4 次のルンゲ・クッタを用いたために解が不安定になったのではないかと考えられる。そこで、 $dt$  を  $1/10$  倍にして計算を行ったが、解の挙動は変化しない。

次に、汎用の回路解析プログラム ASTAP を用いて計算を行った。ASTAP は、絶対 A 安定な 2 次のギア法を採用しているが、図 2.5 に示す様に擾乱は解消されない。

ここまで来れば、問題はモデル自身にある様である。実際、回転磁界と  $d$  軸 (回転子の直流励磁による磁界) の相差角が大きくなると同極同志が反発し合い擾乱を起こして停止することは充分考えられる。図 2.4 中の  $\phi$  ( $d$  軸磁束) が、この時に低下していることも、この推論を裏付けている様に思える。

ところが、現場担当者の意見では、擾乱発生時の角速度は 40 RPM 以下で

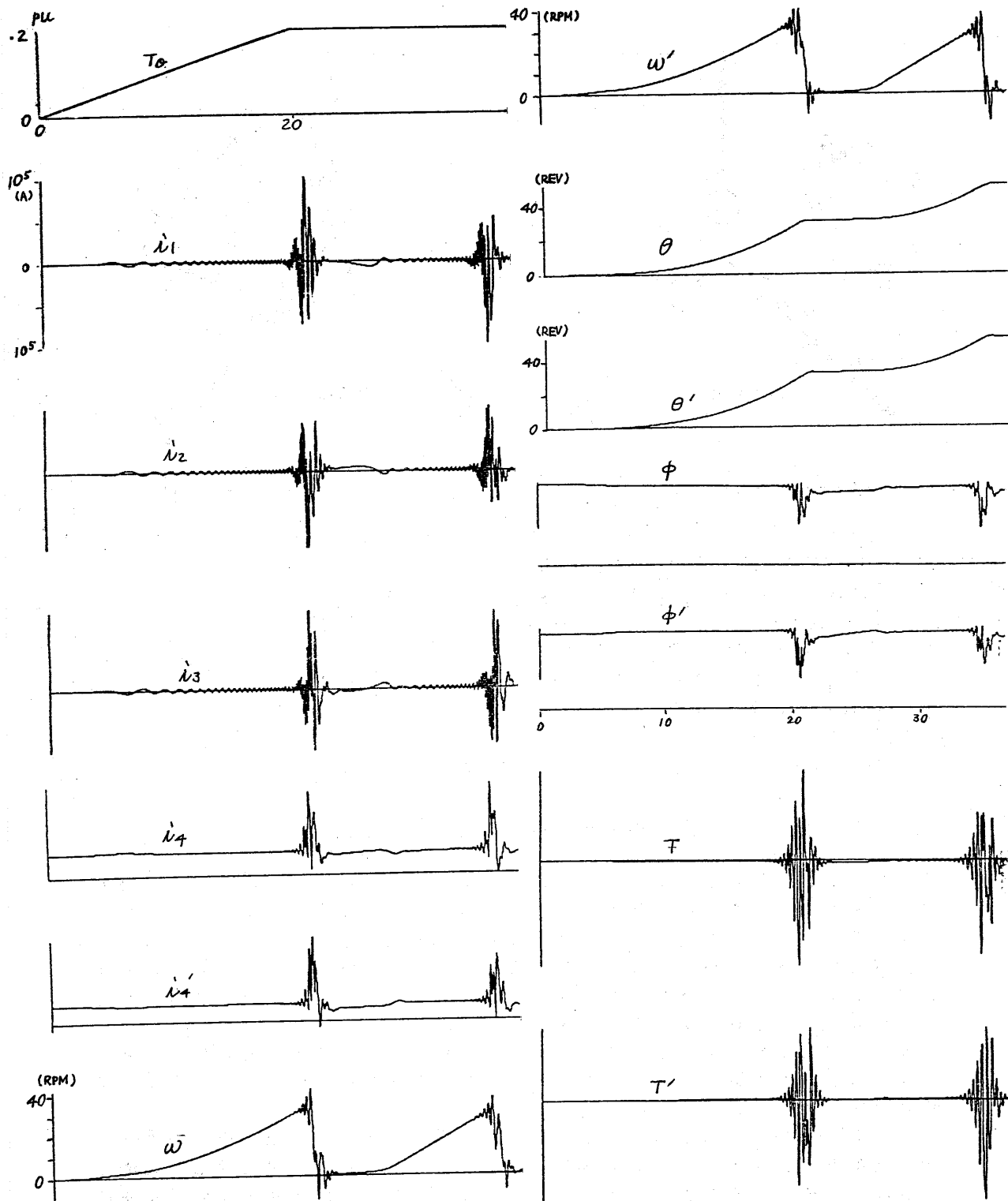


図 2.4 4 次のルンゲ・クッタ法による計算結果 ( $\Delta t = 0.02$ )

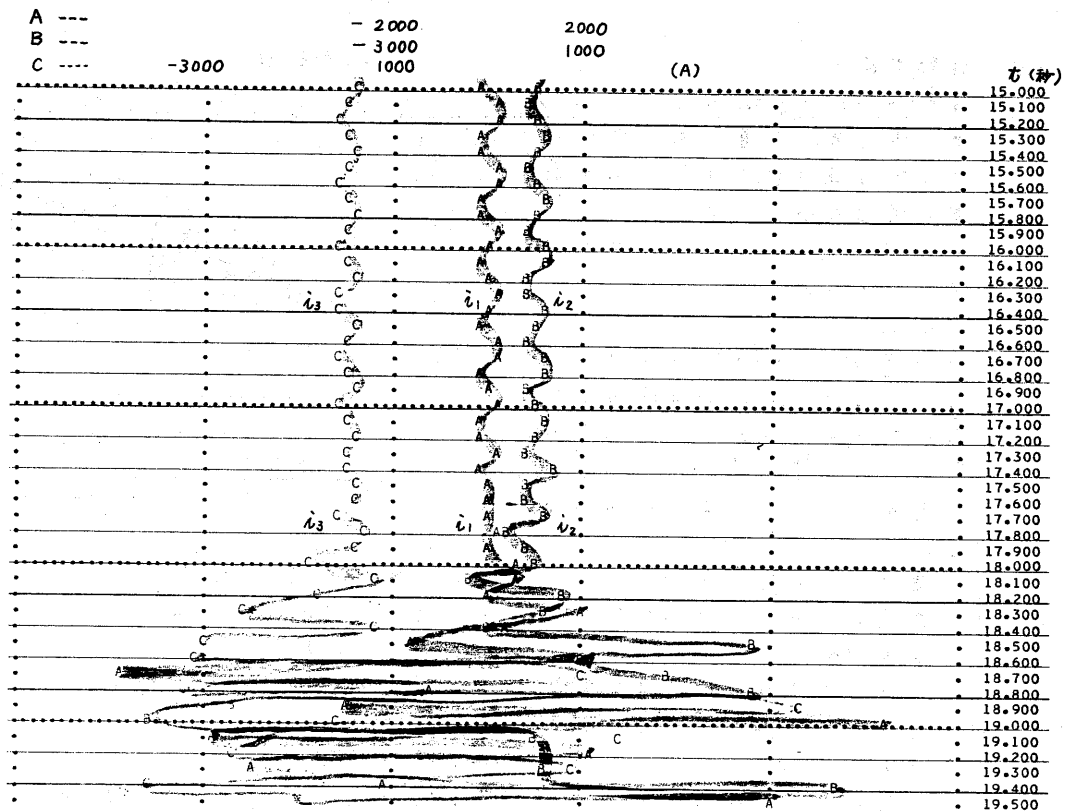


図 2.5 ASTAP (2 次のギャ法) による計算結果

足格速度の約  $1/10$  程度である。この様な現象が起こる筈がないとの事である。読者の御考えは如何なものであろうか？

### 3. 管路網の水撃現象の解析

近年、安全管理上の問題等により各種用水路が開水路から閉水路に変わりつつある。ところが、流量調節装置のバルブは開度が小さな所で、非線型性の高い大抵抗となるため水撃現象が現われる。単管路の場合は、アリエビにより詳細な研究が成されている。管路上に分岐管や貯水槽が存在する場合に挙動がどの様に変化するであろうか？

これを解析する場合、本来は対象領域全体に対してナビヤ・ストークスの方程式を設定し、与えられた初期条件・境界条件のもとで、単一スキームを用いて解くことが明解な結果を導く様に思われる。

しかしながら、貯水槽等の制御装置の特性は、非圧縮流体としての取り扱いに基づく集中定数回路で表現されることが一般的である。このため、管路部分に対してのみ、ナビヤ・ストークスの方程式を設定し、制御装置との境界条件をうまく与えることにより全体を計算する方法が広く採用されている。

ここでは、この境界条件のうまい与え方について議論する。先ず、単管路に対するナビヤ・ストークスの方程式を示す。

① 運動方程式

$$\rho \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial t} + \rho \frac{\partial R}{\partial z} = 0 \quad \dots (1)$$

オ一項は単位質量に働く重力+圧力、  
オ二項は運動量変化  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{V^2}{2})$ 、  
オ三項は摩擦力であり、

$$R = \frac{f}{2D} V|V| \quad (\text{ダルシ・ワイズバッハ})$$

等であらわれる。

② 連続式

$$\frac{\partial H}{\partial z} + \frac{V^2}{g} \frac{\partial V}{\partial z} + V(\frac{\partial H}{\partial z} - \sin \theta) = 0 \quad \dots (2)$$

この式は、圧縮流体の連続式

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho A) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho AV) = 0 \quad \text{に対し、}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{1}{E_v} \rho, \quad \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{D}{E} A, \quad \alpha = \sqrt{\frac{E_v \rho}{(1 + \frac{E_v \rho}{E} \frac{D}{\rho})}}$$

を考慮することにより得られる。

但し、

- |  |                                      |
|--|--------------------------------------|
| $g$ : 重力の加速度 ( $m/s^2$ )                     | $\theta$ : 管路勾配 (上向きを正) (度)          |
| $\alpha$ : 圧縮波の伝播速度 ( $m/s$ )                | $\rho$ : 流体の密度 ( $t \cdot s^2/m^4$ ) |
| $D$ : 管径 ( $m$ )                             | $\delta$ : 管厚 ( $m$ )                |
| $E_v$ : 流体の体積弾性係数 ( $t/m^2$ )                | $E$ : 管材料の弾性係数 ( $t/m^2$ )           |
| $H$ : 有効水頭 即ち、 $Z$ (水頭) + $\frac{p}{\rho g}$ | $V$ : 流速 ( $m/s$ )                   |
| $p$ : 圧力 ( $t/m^2$ )                         | $t$ : 時刻 ( $s$ )                     |
| $x$ : 管路に沿った距離 ( $m$ )                       |                                      |

を意味するものとする。

(1), (2)式を離散化するスキームとして、双曲型偏微分方程式の特徴を利用した特性曲線法、開水路の解析等に用いられている 2-step Lax-Wendroff 法、及び 4点インポリット法等が挙げられる。前二者は陽公式であり、三角スキームである。後者は陰公式であり、ボックススキームである。

さて、境界条件の設定が問題となるのは三角スキームの場合である。特性曲線法の場合は、図 3.2 に示す様に、特性曲線 S 上で成立する常微分方程式を離散化した式が有力であるのに対して 2-step Lax-Wendroff 法では適当な境界条件が見当たらない。従来は、運動方程式にボックススキームを適用している様である。又、連続式を採用する場合もあるらしい。いずれにせよ、バルブとの境界条件は本解析の最も重要な部分であるにも拘らず明解さを欠いている。果して、

図 3.3 に見られる様に、運動方程式を境界条件とした方法では説明の難しい結果が得られている。読者は、どのような境界条件を設定されるであろうか？

ところで、(1), (2) 式を有効水頭  $H$ 、流量  $Q$  に関する式に書き換え、 $\frac{\partial H}{\partial z}$  を  $\frac{H_2 - H_1}{\Delta z}$ 、 $\frac{\partial Q}{\partial z}$  を  $\frac{Q_{21} - Q_1}{\Delta z}$  として離散化すれば、

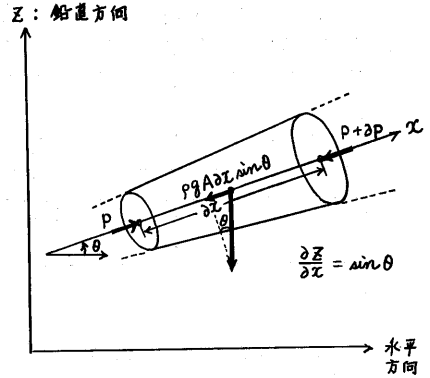


図 3.1 1次元の流れ

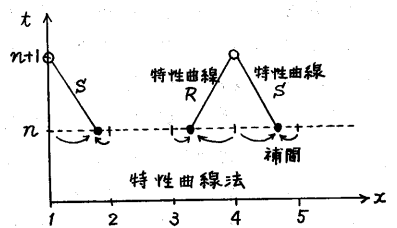
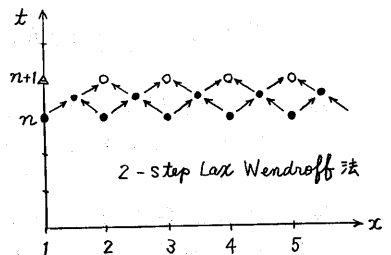


図 3.2 三角スキーム



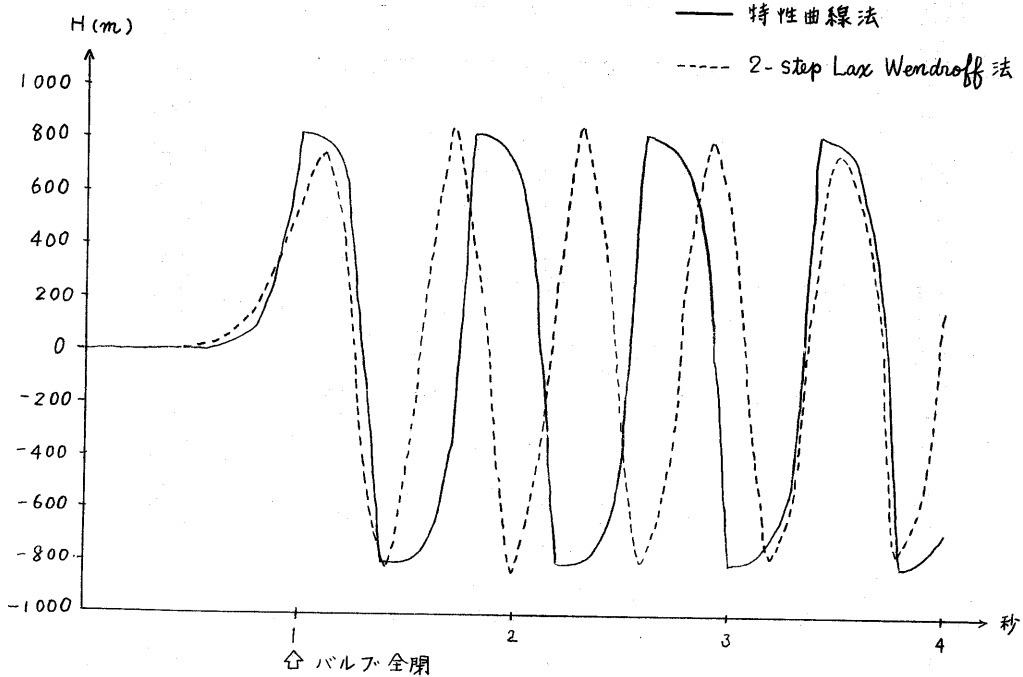


図 3.3 緩閉塞の場合のバルブ直前の有効水頭の変化

$$H_{i+1} - H_i = \frac{\Delta x}{gA} \cdot \frac{dQ_i}{dt} + \frac{1}{gA^2} (Q_{i+1} - Q_i + \frac{f \cdot \Delta x}{2D} |Q_i|) Q_i \quad \dots (3)$$

$$Q_i - Q_{i+1} = \frac{gA \Delta x}{\alpha^2} \cdot \frac{dH_i}{dt} + \frac{g}{\alpha^2} Q_i (H_i - H_{i-1} - \Delta x \sin \theta) \quad \dots (4)$$

が得られる。これは管路部分が  
図 3.4 で示す分布定数回路で表現されることを意味している。

仮に、管路部分の流れを他の制御装置と同様に定常な非圧縮流体と見做せば、どのような回路表現となるであろうか？ (2)式が  $\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$  で置き換えられるため、図 3.5 で示す集中定数回路で表現される。この様な回路でバルブを急閉塞すれば、バルブ付近に無限に近い圧力が発生する。これは、1の整流器解析と全く同様の議論であることに注意されたい。(ダイオードとバルブが対応する。)

分布定数回路表現を行った効用として、大規模な管路網の解析が汎用の回路解析プログラムを利用して行える事が掲げられる。図 3.6 は ASTAP を用いて解析を行った結果である。

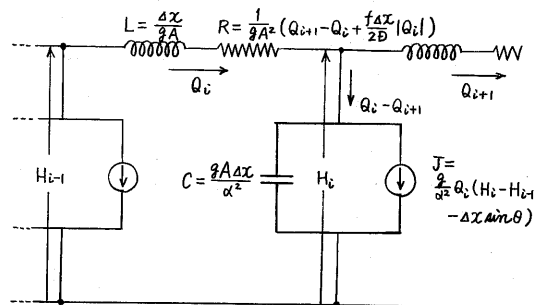


図 3.4 圧縮流体の分布定数回路

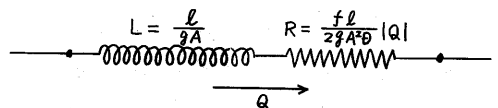


図 3.5 定常非圧縮流体の回路

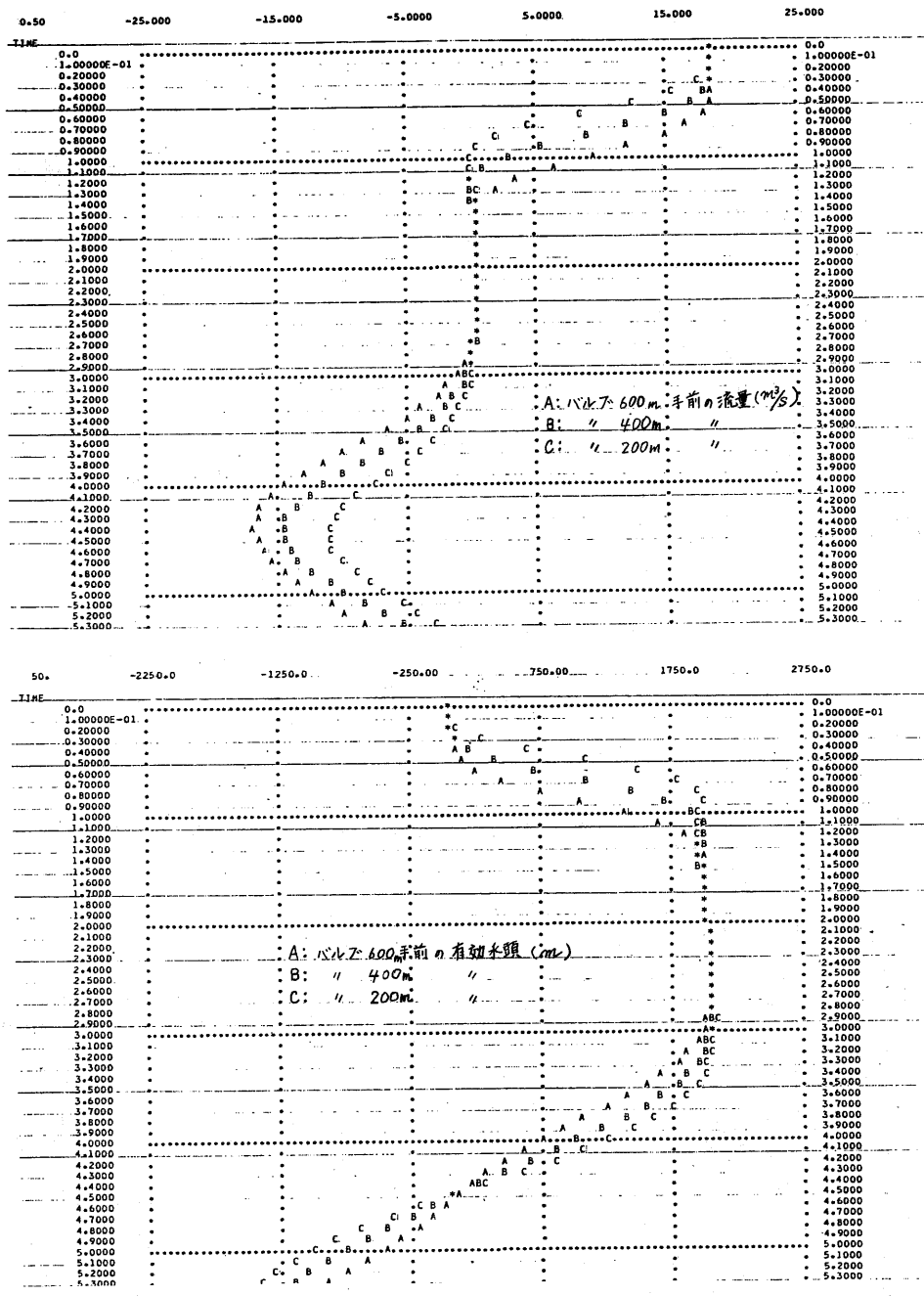


図 3.6 ASTAP による計算結果 ( $\Delta t = 0.05$  秒)

と、ところで、管路網の場合、各管路長に大きなばらつきがあるため、 $\Delta x$  を全体で一律にとるのは困難である。相接する管の  $\Delta x$  に大きな差がある場合、接点で圧力波が反射し高周波成分が載ることになる。ギア一法の様はステイツフの公式を用いる場合は、解析対象とする周波数成分に合わせて  $\Delta t$  を決めればよい。