最近の数値予報の進歩について
——如何にして、計算時間を縮めるか、それが問題だ——

住 明正
（気象庁 予報部 電子計算室）

1. はじめに

数値simulationは，自然科学の様々の分野で幅広く応用されていますが，数値予報ほど，厳しい社会的試練を受けている分野はないと思われます。なぜなら，自然科学系の他の分野の多くのsimulationは，主として境界値問題であり，定常問題であるのに対し，数値予報は，毎日毎日，異なる初期値から時間積分を行う初期値問題であり，しかも，その結果は，常に，「当った，当らない。」と多くの人々の（ある時には，無茶ともいえる）批判にさらされています。

承知の様に，数値予報は，大気の運動を記述する運動方程式や，熱力学的状態を記述する熱力学第一法則，及び，質量保存の式である連続の式などを時間積分してゆくところにあります。（具体的には，現象のスケールを考え，様々な近似が行なわれます。例えば，運動方程式の中の，垂直運動に関する部分は，静力学の式にして用いられています。）

大気の状態を記述する変数の数は，速度場として(u, v, w)，熱力学変数として2変数（例えば，Tとp），更に，通常の天気予報では，降水が非常に重要となりますので，水蒸気の変数qの6変数になります。一方，地球上の大気を表現するためには，或る種の空間的な近似を行う必要があります。細かな話は省略するとして，おおよそ，一つの波長を表現するのに，格子点で8ヶ必要だとしますと，明日，明後日の予報に不可欠な高低気圧の長さスケールは，1000km程度ですから，格子間隔は，

$$\Delta x \sim 1000\,\mathrm{km}/8 = 125\,\mathrm{km}$$

程度になります。この様な格子で，地球の全域を覆うとしますと，

$$4\pi a^2/(125\,\mathrm{km})^2 \sim 30\,\mathrm{K}$$

の格子点が必要となります。同様に，垂直にも，一定の数の層をとる必要があります。対流圏の高さが，大体10kmであり，高低気圧の垂直スケールは，これと同じですから，垂直には，8層程度必要です。結局，必要な変数の量は，

$$6\text{要素}(u,v,w,p,T,q) \times 30\,\mathrm{K}\,(\text{水平}) \times 8\,(\text{垂直}) = 1.4\,\mathrm{M}$$

となります。時間積分に関しては，現在の値と，過去の値と，時間変化量の3つのレベルが必要とすると，最低，17 Mbyte程度の記憶容量が必要となって来ます。現実の予報モデルには，この変数の他にも，境界条件として，地形や，海水温度，海氷分布などのデータが必要となります。

勿論，現在の計算機の容量は，大きくなったとは云え，未だ充分とはいい難いものがありますので，各地の予報センターでは，格子間隔を粗くしたり，領域を限定したりしているわけです。

最後に，気象庁の現業用のモデルについて触れてみたいと思います。気象庁では，2日以上，一週間程度の予報のために，北半球モデルを，明日予報のために，アジア地区モデルが，毎日，ルーチン的に運用され

	Regeional Model	Hemispheric Model
名称	12L-LFM	12L-NHMS
水平	127 Km at 60N	L_{max}=42(270 Km)
垂直	12 levels	12 levels
容量	~7MB	~7MB

表1. 気象庁のルーチンモデル

ています(表1参照)。ついでに、モデルの改良により、どれだけ、予報が良くなるかという一例を示したいと思います。電計室は、82年3月に、モデルを、6L-FLM(230km)から、10L-FLMに変更しましたが、そのimpactを図1に示します。tendency corr.とは、予報変化量と、実際の変化量の相関です。モデルの改良に伴い、精度が、向上したことがわかります。

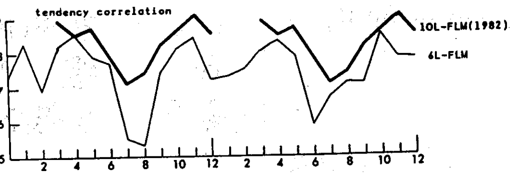


図1. 10L-FLMの時間変化量の相関

2. 数値予報の特長

2.1 数値予報モデルの計算上の特長

この節では、数値予報モデルの計算上の特長について考えてみたいと思います。

数値予報モデルは、初期値問題を解くものですから、その特長は、一言で言ってしまえば、"繰り返し演算"にあります。例えば、単なる2次元の移流の計算にしても、

$$\sum_{i,j}\left\{u_{ij}\frac{\phi_{i+1,j}-\phi_{i-1,j}}{2\Delta x}+v_{ij}\frac{\phi_{i,j+1}-\phi_{i,j-1}}{2\Delta y}\right\}$$

の様な、2重のDOループになりますし、更に、その上に、時間積分の繰り返しが加わります。今、もし、時間間隔を10分とすれば、1時間積分するのに6回、1日積分するのに144回も、同じアルゴリズムの計算を繰り返す必要があります。

その他に、数値予報モデルは、現業用モデルですので、計算時間の上限(業務の必要性等から決められた)が存在します。

このような数値モデルの特長を考えますと、演算速度の向上が、数値予報の将来にとって決定的に重要であることがわかります。それ故に、電計室も、常に最先端の計算機を導入しようと努力していますし、現在、各メーカーが、しのぎを削っている、Array type の super computer が、世界各国の気象センターに続々と購入されています。

しかしながら、計算機の演算速度を倍にすることと、時間積分の時間間隔を倍にすることとは、数値予報モデルに関する限り、同値です。数値予報の対象とする天気現象の最少時間スケールは、せいぜい、2~3日です。前に述べた原則をあてはめると、たかだか、6時間毎に、データをとれば、記述できるはずです。勿論、数値積分を繰り返すわけですから、精度も必要ですので、もう少し短い時間間隔をとる必要がありますが、それでも、一時間程度の時間間隔があれば充分なはずです。ところが、現実の予報モデルでは、特別の工夫なしには、時間間隔は、6分程度です(勿論、この時間も、格子間隔に依存します。ここでは、大体300km程度の格子を考えています。)。

この時間間隔が何により決まるのか、天気予報に必要な情報の質を落とすことなく時間間隔を大きくとることは出来ないのであろうか?このような問題は、長い間、数値予報関係者の課題でした。そこで、次節では、これらの問題についての取り組みについて触れてみたいと思います。

次節に移る前に、移流項を含む微分項(非線形項)の近似の方法について、簡単に触れておきたいと思います。

結論を先に述べますと、数値予報の方程式系は、種々の保存則を含んでいます。例えば、エネルギー保存則がその良い例です。この様な保存則が、近似された

方程式系でも満足されなければ、見せかけの source や sink が出来ることになり、数値積分の途中で、予報結果が実況と、大巾にくるって来ることになります。

その他に、非線形性に伴う問題があります。これは、非線形項は、波と波との相互作用により、次々と高次の波を作り出すのに、現実の近似系では、有限の波数で打ち切っているために、格子を用いると、別の波に間違って表現されてしまうこと(Aliasing)になります(図2参照)。ここで、$u=\sin kx$ とすると、

$$u\,\partial u/\partial x = k\sin kx\cos kx = k/2\cdot\sin(2kx)$$

となります。今、$2k$ が、k_{max} を超えたとすると、

$$\sin 2kx = \sin[(2k_{max}-2(k_{max}-k))x] = \sin 2k_{max}x\cdot\cos(2k_{max}-2k)x - \cos 2k_{max}x\cdot\sin(2k_{max}-2k)x,$$

今、$k_{max}=\pi/\Delta x$ ですから、任意の格子点で、

$$\sin 2k_{max}x_j=0,\quad \cos 2k_{max}x_j=1 \qquad x_j=j\cdot\Delta x$$

となります。つまり、k_{max} を超えた波は、$\sin 2kx=-\sin(2k_{max}-2k)x$ となり、$0<k<k_{max}$ の波に間違えられてしまいます。(このことが発生するのは、格子上で定義された函数を考えるからで、格子を用いず、函数展開を用いると、打ち切り波数を超えた波は、捨てられるので、Aliasing は発生しません。)このことが、引き続いて起きると、Aliasing により、エネルギーがたまり不安定を起こします。これを防ぐためには、エネルギーのみならず、渦度の2乗をも保存することが、有効で、そのためにも、水平差分のとり方には、いろいろな注意が必要となるわけです。その具体的な形には、ここでは、これ以上触れませんが、興味のある人は、Arakawa and Lamb (1977)，新田他 (1972) を参照して下さい。

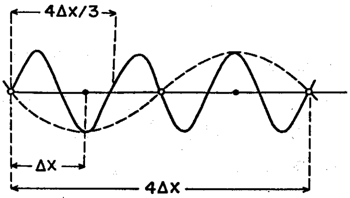


図 2 エリアシングによって波長 $4\Delta x/3$ の波が波長 $4\Delta x$ の波に間違って解釈される例

2.2 数値予報モデルの力学上の特長

大気現象を記述する方程式系の特長は、それが、種々様々の時空間スケールを持つ現象を記述することです。勿論、種々の現象には、それぞれ固有の時空間スケールがあり(図3参照)、それに基づいた、現象に固有の方程式系が導出されてはいます。しかしながら、我々の、日々の"天気"を simulate しようとする数値予報では、大規模な高・低気圧の動きから、その中に発生する前線や、降水なども総合して扱わなければならないので、どうしても、種々のスケールの現象を、一緒に扱わざるを得ません。

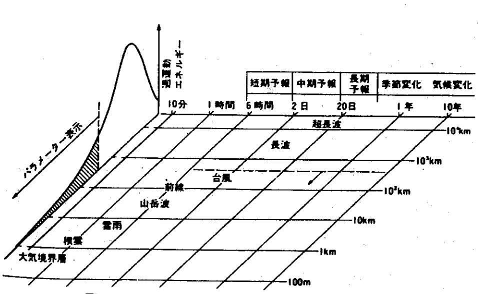


図 3 大気中の擾乱に対する代表的時間スケールと代表的水平スケール.

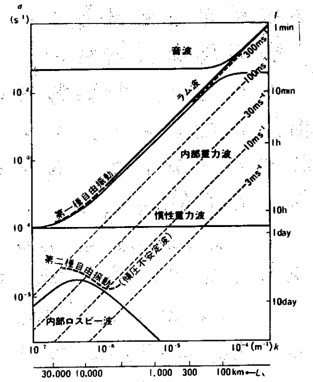
それでは、大気の方程式の中に、どのような種類の波動(大気中に存在する現象を、一応、波動と対応づけることにします)が存在するのでしょうか?図4は、気象学の教科書には、必ず、載っている、各種大気波動の図です。周期が、数分の音波、数時間の重力波と、周期が数日の傾圧不安定波や内部ロスビー波が存在します。この中で、毎日の天気変化に関係しているのは、波長が1000km以上の、傾圧不安定波や、内部ロスビー波です(今後は、これらの二つを、ロスビー波と呼ぶことにします)。通常の数値予報モデルでは、非圧縮を仮定したり、

静力学平衡を仮定したりして、音波を除去していますので、これからは、重力波とロスビー波のみを考えることにします。

時間積分に関しては、有名なCourant- Hilbert の条件があります。これは、一次元の移流型の方程式、

$$\partial u/\partial t + c\,\partial u/\partial x = 0$$

を考えると、格子間隔，Δx，で近似した時，積分が安定であるためには，$|c\Delta t/\Delta x| < 1$ でなければならないというものです。図4から分かるように、大気現象の位相速度は，300 m/s から，数cm/s以下と，幅広いスペクトラムを持っています。しかしながら，最も速い波（300 m/s）は，外部重力波で，天気に関係するロスビー波は，せいぜい，10 m/s といったところです。



つまり，前節で述べた様に，天気予報に必要な現象の予報には，原理的に，一時間程度の時間間隔で良いが，現実には，数分間の時間間隔をとっているというのは，ロスビー波と，外部重力波の位相速度の差に基づくものといえます。

「そんなに外部重力波が不必要ならば，方程式の中から（音波のように）除去してしまえば，話は簡単になるのではないか？」，と，考える人も多いことでしょう。事実，初期の数値モデルは，重力波を除去した，傾圧不安定波だけを記述する方程式を使用していましたし，それが，数値予報モデルの成功の，大きな要因でした。しかしながら，大気は，このような波だけで，閉じているわけではありません。数値予報の精度を向上させるためには，どうしても，ゆっくりと変化するような重力波も，きちんと，取り扱う必要があります。ところが，内部重力波も取り扱うような方程式系を用いると，それは，同時に，位相速度の速い波である外部重力波も発生する可能性があります。大気の方程式は，非線形ですので，初期値にいくら，このような重力波を含まないようにしておいても，積分の途中で，いくらでも作り出される可能性があります。現実の大気では，事実，このような外部重力波なども作り出されているのですが，大気の性質として，速やかに，分散してしまい，長い間，このような波が残ることは，ありません。つまり，大気の力学の性質として，ロスビー波を残すような性質があり（地衡風調節），このような性質を我々の数値モデルも持つ必要があります。

つまり，数値予報モデルの時間積分法としては，最も速い外部重力波について，数値計算上安定なこと，そして，不必要な外部重力波を，急速に減衰させる一方，ロスビー波に対しては，減衰がないことが，必要であるといえます。

この重力波と，ロスビー波の関係を，もう少し具体的にみてみましょう。簡単のために，一層のshallow water の式を用います。基本流がないと仮定し，線形化すると，

$$\frac{\partial u}{\partial t} - (f_0+\beta y)v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{-- (1)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (f_0+\beta y)u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \Phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0 \quad \text{--- (3)}$$

となります。大気現象は，基本的には渦運動ですので，(1)と(2)から，渦度と発散の式を作ると，

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\beta v+f_0 D=0 \quad \cdots(4) \qquad \frac{\partial D}{\partial t}+\nabla^2\phi-f_0\zeta+\beta u=0 \quad \cdots(5)$$

Helmholtzの定理より，流線函数，ψ，と，速度ポテンシャル，χ，を導入し，$e^{i(kx+ly+\sigma t)}$ の形の解を仮定すると，(4),(5),(3) は，

$$\left\{i\sigma-\frac{i\beta k}{(k^2+l^2)}\right\}\hat{\psi}+\left\{f_0-\frac{i\beta l}{(k^2+l^2)}\right\}\hat{\chi}=0 \quad \cdots(6)$$

$$\left\{-f_0+\frac{i\beta l}{(k^2+l^2)}\right\}\hat{\psi}+\left\{i\sigma-\frac{i\beta k}{(k^2+l^2)}\right\}\hat{\chi}+\hat{\phi}=0 \quad \cdots(7)$$

$$-\Phi(k^2+l^2) \quad +i\sigma\hat{\phi}=0 \quad \cdots(8)$$

となります。non-zero の解を持つ条件から，

$$\left(i\sigma-\frac{i\beta k}{k^2+l^2}\right)^2 i\sigma+\left(i\sigma-\frac{i\beta k}{k^2+l^2}\right)\Phi(k^2+l^2)+i\sigma\left(f_0-\frac{i\beta l}{k^2+l^2}\right)^2=0 \quad \cdots(9)$$

となります。簡単のために，$\beta=0$ とすると，(9) は3つの解を持ち，その解は，

$$\sigma_1=0, \quad \sigma_{2,3}=\pm\sqrt{f_0^2+\Phi(k^2+l^2)} \quad \cdots(10)$$

となります。σ_1が，ロスビー波に対応し，$\sigma_{2,3}$は，重力波に対応しています。ロスビー波は，(4),(5)から分かる様に，$D\equiv 0$ $\zeta=\nabla^2\phi/f_0$ となります。βの擾動が加わっても，この性質は変わらず，非常に小さい発散と，ほとんどバランスした線形項というのが，ロスビー波に対応します。

このような眼で，数値予報のもとの式を眺めてみます。各変数を代表的な量でスケーリングします。

$$u=Uu', \quad v=Vv', \quad x=Lx' \quad \cdots(10)$$

時間に関しては，速い時間t'と，遅い時間T'があると考えて，

$$t=t'/f_0+T'/(U/L) \quad \cdots(11)$$

とすると，例えば，u-momentum の方程式は，

$$f_0U\frac{\partial}{\partial t'}u'+\frac{U^2}{L}\frac{\partial u'}{\partial T'}+\frac{U^2}{L}u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{U^2}{L}v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+\frac{\Phi}{L}\frac{\partial z'}{\partial x'}-f_0Uv'=0 \quad \cdots(12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}u'+R_0\left(\frac{\partial u'}{\partial T'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\frac{\partial z'}{\partial x'}-v'=0 \quad \cdots(13)$$

となります。ここで，$R_0=U/(f_0L)\sim 10/(10^{-4}\cdot 10^6)=10^{-1}$ です。つまり，数値予報の式は，線形項と非線形項から成り立ち，線形項は，主として速い運動に関連し，非線形項は，主として遅い運動に関与しているということが出来ます。

以上のことを要約すると，数値予報の方程式系には，速い時間スケールの運動と，遅い時間スケールの運動が共存し，数値予報の本質は，このような方程式系で，速い時間スケールの運動をexciteすることなしに，遅い時間スケールの運動を時間積分してゆくところにあります。

3. 時間積分について

この節では，数値予報モデルの時間積分をどのようにやれば効率的かについて考えてみましょう。

通常，時間積分の解析については，単振動の方程式を用いて解析を行います。数値予報モデルは，速い振動数（β）と，遅い振動数（α）がありますので，

$$\frac{\partial h}{\partial t}=i\alpha h+i\beta h \quad \cdots(14)$$

と定式化されます。特別のことを考えなければ、Courant-Hilbert の条件より、

$$|(\alpha+\beta)\Delta t| \sim |\beta\Delta t| < 1 \qquad \cdots\cdots (15)$$

となります。その後の time integration scheme の選択は、その scheme の持つ特長によるわけです。しかしながら、これでは、本来、天気予報には全く不必要な（外部）重力波のために、全く無駄に（あるいは、非常に効率悪く）計算機を使用していることになります。そこで、何とかして、本来、天気予報に関連ある現象の予報のために、必要最低限の時間間隔で積分出来ないか、と、いろいろ工夫をするわけです。そのような計算上の工夫について、触れてみたいと思います。

3.1 Semi-implicit scheme

時間積分に関しては、explicit法が、絶対不安定、leap frog 法が中立、implicit法が、絶対安定ということは、昔から良く知られています。勿論、非線形の方程式である数値予報の式を、implicitで解くことは出来ませんが、線形の部分だけなら、部分的に、implicitにすることが可能です。線形項が重力波を引き起こす項であることを考えると、線形項を、implicitにすることは、時間積分の条件を安定にすることが、期待されます。

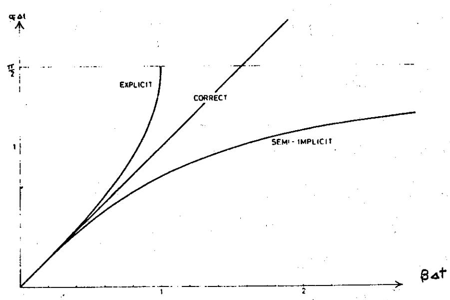


図5　$\beta\Delta t$ と $\sigma_c\Delta t$ の関係

提案されたスキームは、

$$\frac{h^{\tau+1}-h^{\tau-1}}{2\Delta t} = i\alpha h^{\tau} + i\beta\frac{h^{\tau+1}+h^{\tau-1}}{2} \qquad \cdots (16)$$

と書くことが出来ます。この式は、

$$\begin{pmatrix} h^{\tau+1} \\ h^{\tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i2\alpha\Delta t/(1-i\beta\Delta t) & 1+i\beta\Delta t/(1-i\beta\Delta t) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h^{\tau} \\ h^{\tau-1} \end{pmatrix} \qquad \cdots\cdots (17)$$

と書かれ、このMatrixの固有値は、

$$\lambda = \frac{i\alpha\Delta t \pm \sqrt{1+\beta^2\Delta t^2-\alpha^2\Delta t^2}}{1-i\beta\Delta t} \qquad \cdots (18)$$

となります。根号の中が正ならば、$|\lambda| = 1$ となり、このスキームは、中立となります。根号が正になる条件は、

$$1+\beta^2\Delta t^2 > \alpha^2\Delta t^2 \qquad \cdots (19)$$

で、重力波については常に成立（$\alpha\sim 0$とする）し、ロスビー波については($\beta\sim 0$)、

$$\alpha^2\Delta t^2 < 1$$

つまり、ロスビー波についての、Courant-Hilbert の条件になります。

それでは、何故に、semi-implicit 法では、不安定な積分が、中立になるのでしょうか？

簡単のために、$\alpha\equiv 0$、とすると、$h^{\tau} = e^{i(\sigma_c\Delta t)\tau}$ とおいて、(16)は、

$$\sin(\sigma_c\Delta t)/\Delta t = \beta\cos\sigma_c\Delta t \;;\quad \sigma_c = \tan^{-1}(\beta\Delta t)/\Delta t \qquad \cdots (20)$$

となります。同様のことを、explicit で考えると、$\sigma_e = \sin^{-1}(\beta\Delta t)/\Delta t$ となります。この、σ_cとσ_e とβとの関係が、図5に示してあります。この図から、semi-implicit法では、高周波の振動数を、低周波側にmodifyすることにより、長い時間間隔を可能にしているということが出来ます。

それでは、具体的に、数値予報の式にどのように応用するのでしょうか？前と同様に、一層の、渦度方程式・発散方程式を考えます。渦度方程式は、ゆっくりと変化する項が大部分ですので、発散方程式と、連続の式を考えます。

$$\partial D/\partial t = N_D - \nabla^2\Phi \quad ; \quad \partial\Phi/\partial t = N_\Phi - \bar{\Phi} D \qquad \cdots (21)$$

ここで、差分形、$\delta_t\Phi = \Phi^{\tau+1} - \Phi^{\tau-1}$, $\bar{\Phi}^\tau = (\Phi^{\tau+1} + \Phi^{\tau-1})/2 = \delta_t\Phi + \Phi^{\tau-1}$ ，を導入すると、(21)は、

$$(1 - \bar{\Phi}\cdot 4\Delta t^2 \cdot \nabla^2)\,\delta_t D = 2\Delta t\cdot N_D - \nabla^2\left(N_\Phi(2\Delta t)^2 - \bar{\Phi}(2\Delta t)^2 D^{\tau-1}\right) \quad \cdots (22)$$

という、Helmholtz型の方程式になります。時間間隔が延びたかわりに、楕円型問題を解く、という余分の計算が入って来ます。そこで、この計算が、如何に早く解けるかが、この方式を採用するか、否かの、規準になります。

さて、このようなスキームを用いて積分するのですが、本当に、正解を与えているか否かが問題になります。"正解"が分りませんので、厳密に近似解の精度を議論することは出来ませんが、通常、explicitで、時間間隔を細かくとった結果と比較して、スキームの精度を考えています。図6は、電計室の前のルーチン

PS 1980 2 13 12 Z T = 192　　RR24 1980 2 13 12 Z T = 192

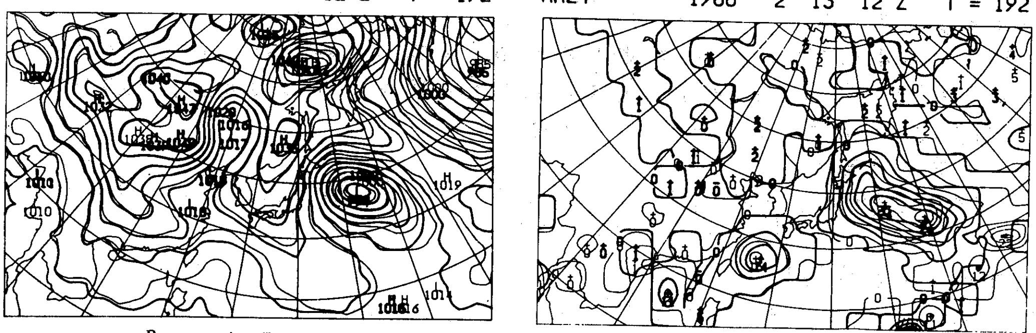


図6.　P_s 1980年2月13日12Z　T = 192　　RR_{24} 1980年2月13日12Z　T = 192

モデルであった4L-NHMでの8日予報の例です。細い線が、時間間隔6分のexplicit、太線が、時間間隔20分のsemi-implicitです。8日間予報して、その差は、実用上問題にならない程度です。

3-2. Split法

もう一つの方法は、split法です。一般的に時間積分は、

$$\Phi^{n+1} = (\mathbb{E} + \mathbb{A}\Delta t)\Phi^n \qquad ---- (23)$$

と書けますが、今、$\mathbb{A} = \mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2$ のとき、これを、

$$\Phi^{n+1} = (\mathbb{E} + \mathbb{A}_1\Delta t)(\mathbb{E} + \mathbb{A}_2\Delta t)\Phi^n \qquad ---- (24)$$
$$= (\mathbb{E} + (\mathbb{A}_1 + \mathbb{A}_2)\Delta t + \mathbb{A}_1\mathbb{A}_2\Delta t^2)\Phi^n$$

と近似する方法です。明らかに、一次の精度で、近似は成り立っています。このようなsplit法が、計算時間の短縮につながるのは、数値予報モデルでは、非線形項は、各種の保存則を満たすように複雑で、計算量が多いのに、ゆっくりした運動に対応しているので、時間間隔を長くとり、計算する回数を減らし、線形項は、計算量も大したことがないので、時間間隔を短かくとり安定性の条件を満たすようにすることが出来るからです。要するに、

$$\Phi^{n+1} = (\mathbb{E} + \mathbb{NL} + \mathbb{L})\Phi^n \qquad (25)$$

と定式化すると、split法では、

$$\Phi^{n+1} = (E + NL\Delta t)(E + L\delta t)^N \Phi^n \qquad --- (26)$$

と定式化出来ます（ここで、$N\delta t = \Delta T$）。

しかしながら、この方式では、時間短縮は可能になるものの、精度の点での疑問が残りますし、保存則を満足させることも出来ません。

3.3 Economical Explicit scheme

前述の split scheme は、時間短縮が出来るものの、差分に伴う保存則を満足させることが出来ないことや、精度の点でも不満があった。このような点を改良するように考え出されたのが、電計室で開発された、Economical Explicit Scheme（Tatsumi, 1983）である。

これは、短い時間間隔δt毎に積分するが、非線形項は、緩かな時間ΔT毎に、計算しようというのである。つまり、(14)は、

$$\frac{h^{\tau+1} - h^{\tau-1}}{2\delta t} = i\alpha h^N + i\beta h^\tau \quad (\tau = 0, 1, 2, \cdots, 2N) \qquad \cdots (27)$$

ここで、$h^0 = h^{N-1}$, $h^{2N} = h^{N+1}$

と書ける。この差分解の安定性を調べるには、matrixを解かねばならないのであるが、ここでは、$\delta t \to 0$ の極限の場合のみを考えます。そうすると、(27)は、

$$\partial h/\partial \tau = i\alpha h^N + i\beta h \qquad --- (28)$$

と書け、計算をすると、

$$h^{N+1} - h^{N-1} = \frac{\alpha}{\beta} h^N (e^{2i\beta\Delta t} - 1) + h^{N-1} (e^{i2\beta\Delta t} - 1) \qquad ---- (29)$$

となります。この安定性は、

$$\lambda^2 + \frac{\alpha}{\beta}(1 - e^{2i\beta\Delta t})\lambda - e^{2i\beta\Delta t} = 0 \qquad ---- (30)$$

の根をで与えられます。この2根は、

$$\lambda = i\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\Delta t \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\beta\Delta t} \qquad .... (31)$$

で与えられます。根号の中が正であれば、$|\lambda| = 1$ となりスキームは中立となります。$\alpha^2\Delta t^2 < 1$ ならば、根号の中は正になりますので、ゆるい時間スケールによる条件で良いことになります。

実際は、(28)は、

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(h - h^\tau) = i(\alpha+\beta)h^\tau + i\beta(h - h^\tau) \qquad --- (32)$$

と書けますので、$i(\alpha+\beta)h^\tau$ は、explicit の時間変化そのものです。そこで、従来の保存性などを考慮した差分スキームが使用出来ることになり、残りの correction term $h' = h - h^\tau$ の計算も、linear なので、計算時間が節約出来ることになります。

さて、このEconomical Explicit Scheme の精度です。これについては、先程の、semi-implicit の場合と同様に、実際に積分して、explicit の場合と比較をする、という方法をとります。図7は、図6と全く同様の図です。比較をしてみれば、実用上、ほとんど有意な差がありませんので、このスキームは、explicitで、短い時間stepで計算したのと同じ結果を与える、と、言って良いと思います。

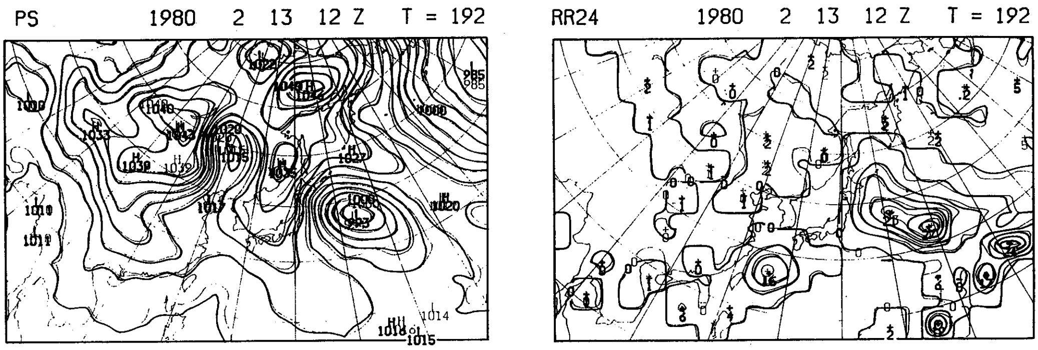


図7. EES と Explicit scheme の差

この後の check は，現実に，予報として当っているか，否か，ですが，これは非常に難しい問題です。つまり，数学的手法の不備なのか，物理的な問題かを，結果から判別する必要があるからです。

4. おわりに

数値予報モデルの最近の精度向上の理由を考えてみると，大気の力学に関する理解が深まった面もあるが，何といっても，計算機が，大型・高速化し，数値予報モデルの精度が向上したことがあげられる。その意味からも，初期値問題の，より有効な，高速の，解法の algorism が開発されるならば，計算機の演算速度の向上と伴に，数値予報に対して，大きな impact を与えることになるでしょう。事実，FFT の algorism が，他の科学・工学の分野と同様に，数値予報の分野に与えた impact は，global な spectral model の採用に対し，非常に大きなものでした。

今日の話が，数値予報モデルに用いられている様な力学系に対する興味を，多少なりとも引き出すことが出来，数値予報にも応用可能なアルゴリズムの開発の一つの刺激となれば，幸いです。

参考文献

数値予報モデルの定式化や，スキームなどについては，和文では，

新田尚ほか，1972：気象力学に用いられる数値計算法，気象研究ノート，110

岸保 ほか，1978：数値予報（上，下），気象研究ノート，134

を参照して下さい。英文では，

Numerical Methods used in Atmospheric Models ; GARP Publication Series No.17

General Circulation Models of the Atmosphere ; Methods in Computational Physics, vol.17(1977).

を参照して下さい。Economical Explicit Scheme については，

Tatsumi,Y.,1983: An Economical Explicit Time Integration Scheme for a Primitive Model,Journal of the Meteorological Society of Japan,269-288.

を参照して下さい。