

粒径分布推定の計算法とその誤差解析

金谷健一, 石川 修
(群馬大学工学部情報工学科)

1. はじめに

空間に分布している粒子の粒径分布をその空間を切、た断面上に現われる粒子の切り口の大きさの分布から逆算することは「積分幾何学」, 「ステレオロジー」などと呼ばれる分野の重要な問題のひとつである。^{1), 2)} これは生物学,³⁾ 医学,⁴⁾ および金属結晶中の析出物の大きさの分布を顕微鏡写真から求める問題として金属学⁵⁾ などでも重要な問題とな、ている。また粒体工学においても粒径分布をこの方法で求めることが試みられている。⁶⁾

粒子の形としては球状粒子の場合が最もよく研究されているが、その場合の公式は別の場合にも応用できるという利点がある。たとえば、円盤が分布している空間を平面で切り、その断面上の円盤の切り口の長さ分布から円盤の半径分布を求める公式は、定数倍であることを除けば、球状粒子の場合と同じである。これを用いると金属や岩盤の内部のクラックを円盤で近似して、その大きさの分布を切断面上の切り口の長さの分布から求めることができる。⁷⁾

一方、線状粒子や板状粒子のような異方性粒子の場合や、曲線や曲面からなる内部組織の巨視的異方性を測定する方法は、考え方としては古く、Buffonにさかのぼり、具体的手法としては Hilliard⁸⁾ により提案され、金谷⁹⁾ により Buffon 変換として一般化され、粉体工学¹⁰⁾ や材料科学¹¹⁾ に、またコンピューターによる画像認識¹²⁾ などに応用されている。

ここでは球状粒子の粒径分布を推定する種々の公式を体系的に分類し、その誤差の理論的評価を行な、た著者らの研究¹³⁾ を報告する。

2. 基礎方程式と離散近似

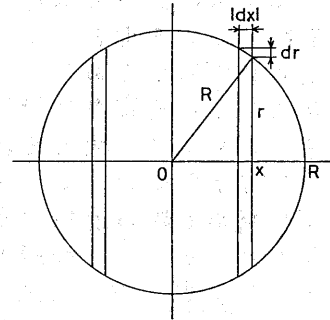


図1 球の半径と切り取られた円の半径の関係

種々の大きさの球が空間中に分布してるとし、球の半径の密度分布を $F(R)$ で表わす。すなわち、半径 R から $R+dR$ の球の数が単位体積当り $F(R)dR$ であるように $F(R)$ を定義する。その空間を平面で切ると平面で切られた球の切り口は円になる。切断面の単位面積当りに存在する円の半径の密度分布を $f(r)$ で表わす。すなわち半径 r から $r+dr$ の円の数が $f(r)dr$ であるように $f(r)$ を定義する。球は空間に一様に分布しているとし、これを切る平面は無限に広が、ているとする。次に $F(R)$ と $f(r)$ の関係を考える。半径が R から $R+dR$ の球が平面で切られる確率は球の中心が平面から R 以内にある確率に等しい。定義より単位体積当り $F(R)dR$ の球があるからその確率は平面の単位面積当り $2RF(R)dR$ である。一方その面で切られた半径 R から $R+dR$ の球が半径 r から $r+dr$ の円の切り口を生じる確率は図1からわかるように $|2dx|/2R = |d(\sqrt{R^2-r^2})|/R = rdr/R\sqrt{R^2-r^2}$ である。これに切られる確率 $2RF(R)dR$ をかけて、すべての可能な R で積分すれば次式を得

る。

$$f(r) = 2r \int_r^{R_{\max}} \frac{F(R) dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2.1)$$

ここで R_{\max} は半径の最大値である。また、切る面は無限に広いと仮定したが、切る面を有限としても面をランダムにおいて平均をとれば同じである。

さて、式(2.1)を実際に計算機を用いて計算するためには、積分を総和に置きかえなければならない。ところが、従来の文献では極めて粗い近似計算が紹介されているのみであり、その誤差の評価などにはま、たく関心が払われていないのが現状である。さて、近似の仕方によりいろいろの計算方法が考えられるが、どの場合も区間 $[0, R_{\max}]$ を n 個の小区間に分割して積分を n 個の値の和で近似する。精度の良い結果を得ようとするれば、大きな n をとればよいことになるが、 $f(r)$ を得るにはヒストグラムを作らなければならない。そのときデータ数(断面上のデータは実際には有限個しか得られない)に比べ分類の区間の幅が狭すぎるとばらつきが大きくなり、しまい、ある程度より大きい n をとることはできない。

これを避けるには分布密度関数 $f(r)$ のかわりに半径 r 以下の切り口の単位面積当たりの個数を表わした累積分布関数 $\Phi(r)$ を用いればよい。種々の平滑化によつてなめらかな真の分布関数を推定することもできる。したがつて、以下では累積分布関数 $\Phi(r)$ はなめらかな関数として正確に得られているとする。同様に分布密度 $F(R)$ のかわりに、半径が R 以下の球の単位体積当たりの個数を表わす累積分布関数 $\Psi(R)$ を用いることにする。さて、式(2.1)の両辺を積分すれば

$$\Phi(r) = 2\bar{R}N - 2 \int_r^{R_{\max}} \sqrt{R^2 - r^2} F(R) dR, \quad (2.2)$$

となる。ただし N は単位体積当たりの球の個数、 \bar{R} は半径の平均である。それぞれ次式で表わされる。

$$N = \int_0^{R_{\max}} F(R) dR, \quad (2.3)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{N} \int_0^{R_{\max}} R F(R) dR. \quad (2.4)$$

式(2.2)を部分積分すれば $\Phi(r)$ と $\Psi(R)$ の関係に変換でき次のようになる。

$$\Phi(r) = 2N(\bar{R} - \sqrt{R_{\max}^2 - r^2}) + 2 \int_r^{R_{\max}} \frac{R \Psi(R) dR}{\sqrt{R^2 - r^2}} \quad (2.5)$$

ここで数値解法として2通りが考えられる。ひとつは式(2.5)の積分を離散化して連立一次方程式の形に改め、それを数値的に解く方法であり、最終的に

$$\Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n A_{ij} \Psi(a_j), \quad (2.6)$$

の形になる。ただし a_i はあらかじめ定めた分点における半径の値であり、 A_{ij} は定数である。前もつて逆行列 B_{ij} を計算しておけば断面上の半径分布から粒子の半径分布を

$$\Psi(a_i) = \sum_{j=1}^n B_{ij} \Phi(a_j), \quad (2.7)$$

の形で計算できる。もうひとつは、式(2.5)を解析的に解き、 $\Psi(R)$ を $\Phi(r)$ で表わしておき、それを数値的に解くことによつて、式(2.7)の形を直接求める方法である。前者を「陰公式」、後者を「陽公式」と呼ぶことにする。

3. 陰公式の分類

まず陰公式について考える。区間 $[0, R_{\max}]$ に分点 $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$ をとると式(2.2)は次のようになる。

$$\Phi(a_i) = 2N\bar{R} - 2 \sum_{j=i+1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR, \quad (3.1)$$

$$i = 0, 1, \dots, n$$

ここで $U(i, j) = \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} F(R) dR$

とかくと、 $\sigma(i, j)$ の近似の仕方の代表的なものは次の4通りであろう。

$$(方法1) \quad \sigma(i, j) \sim \sqrt{a_j^2 - a_i^2} \int_{a_{i-1}}^{a_j} F(R) dR = \sqrt{a_j^2 - a_i^2} [\Phi(a_j) - \Phi(a_{i-1})], \quad (3.2)$$

$$(方法2) \quad \sigma(i, j) \sim \frac{1}{2} (\sqrt{a_{j-1}^2 - a_i^2} + \sqrt{a_j^2 - a_i^2}) \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(R) dR, \quad (3.3)$$

$$(方法3) \quad \sigma(i, j) \sim \sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2} \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(R) dR, \quad (3.4)$$

$$(方法4) \quad \sigma(i, j) \sim \frac{1}{h_{j-1}} [\Phi(a_j) - \Phi(a_{i-1})] \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sqrt{R^2 - a_i^2} dR. \quad (3.5)$$

ただし $a_{j-1/2} = (a_{j-1} + a_j)/2$, $h_j = a_{j+1} - a_j$ とおいた。(方法1~3) は各区間において $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ を定数で近似したものであるが、それらは $R = a_i$ に特異点を持ち導関数はそこで無限大となるのであまり良い近似とは言えない。他方分布関数 $F(R)$ のほうはなめらかな曲線と仮定しているから、 $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ ではなく $F(R)$ を定数に置き換え積分を解析的に計算すれば、より精度の高い近似が得られるはずである。 $\Phi(R)$ が区間 $[a_{j-1}, a_j]$ において1次式で近似できるとすると、 $F(R) = d\Phi(R)/dR \sim [\Phi(a_j) - \Phi(a_{j-1})]/h_{j-1}$ となり、(方法4) を得る。各方法において $\Phi(a_0) = 0$ となるように $2NR$ をそれぞれ決めれば係数行列は各々以下のようにになる。

$$(方法1) \quad A_{ij} = \begin{cases} 2[-(a_{j+1} - a_j) + \sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_j^2 - a_i^2}] & j < n \\ 2[a_n - \sqrt{a_n^2 - a_i^2}] & j = n \end{cases} \quad (3.6)$$

$$(方法2) \quad A_{ij} = \begin{cases} -(a_{j+1} - a_{j-1}) + \sqrt{a_{j+1}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_{j-1}^2 - a_i^2} & j < n \\ a_n + a_{n-1} - \sqrt{a_n^2 - a_i^2} - \sqrt{a_{n-1}^2 - a_i^2} & j = n \end{cases} \quad (3.7)$$

$$(方法3) \quad A_{ij} = \begin{cases} 2[-(a_{j+1/2} - a_{j-1/2}) + \sqrt{a_{j+1/2}^2 - a_i^2} - \sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2}] & j < n \\ 2[a_{n-1/2} - \sqrt{a_{n-1/2}^2 - a_i^2}] & j = n \end{cases} \quad (3.8)$$

$$(方法4) \quad A_{ij} = \begin{cases} -(a_{i+1} - a_{i-1}) & j < i = n \\ -(a_{i+1} - a_{i-1}) + \frac{1}{h_i} (\rho_{i, i+1} - \rho_{i, i}) & i = j < n \\ -(a_{j+1} - a_{j-1}) + \frac{1}{h_j} \rho_{i, j+1} - \frac{h_{j-1} + h_j}{h_{j-1} h_j} \rho_{i, j} + \frac{1}{h_{j-1}} \rho_{i, j-1} & i < j < n \\ a_{n-1} + a_n - \frac{1}{h_{n-1}} (\rho_{i, n} - \rho_{i, n-1}) & i < j = n \\ a_{n-1} + a_n & i = j = n \end{cases} \quad (3.9)$$

ただし、 $\rho_{ij} = a_j \sqrt{a_j^2 - a_i^2} - a_i^2 \log(a_j + \sqrt{a_j^2 - a_i^2})$ とおいた。また、以上において根号の中が負にな、たり定義されないときはその根号全体を0とみなし、また $\sum_{j=0}^{i-1}$ のように意味を持たない場合も0とみなした。以後も同様とする。また、従来、文献に見られるものは分布密度によ、て表わされているが、

すべてが(方法1)か(方法3)に等価であることがわかる。

4. 陽公式の分類

式(2.1)はAbel型積分方程式に変換でき、これを解析的に解くと

$$\Phi(R) = N - \frac{1}{\pi} \int_R^{R_{\max}} \frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2 - R^2}}, \quad (4.1)$$

となる。これは、 $r=R$ が特異点となるのでこれ以上の積分はできず、よ、て $\Phi(r)$ について表わすことはできない。再び分点として $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$ を選べば、次式を得る。

$$\Phi(a_i) = N - \frac{1}{\pi} \sum_{j=i+1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{f(r)dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}}. \quad (4.2)$$

$\nabla(i, j) = \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(r) / \sqrt{r^2 - a_i^2} \cdot dr$ とおくと $\nabla(i, j)$ の近似の方法として、陰公式同様、種々の方法が可能であるが、以下に示す通りが考えられる。

$$\text{(方法5)} \quad \nabla(i, j) \sim \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - a_i^2}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(r) dr. \quad (4.3)$$

$$\text{(方法6)} \quad \nabla(i, j) \sim \frac{1}{\sqrt{a_{j-1/2}^2 - a_i^2}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(r) dr. \quad (4.4)$$

$$\text{(方法7)} \quad \nabla(i, j) \sim \frac{1}{h_{j-1}} [\phi(a_j) - \phi(a_{j-1})] \int_{a_{j-1}}^{a_j} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - a_i^2}}. \quad (4.5)$$

(方法5)は(方法1)、(方法6)は(方法3)、(方法7)は(方法4)に各々対応している。(方法7)は分布関数 $\phi(r)$ を区分的に一次式で近似する。すなわち、区間 $[a_{j-1}, a_j]$ での微分を $f(r) = d\phi(r)/dr \sim [\phi(a_j) - \phi(a_{j-1})] / h_{j-1}$ で近似して得る。式(4.5)の右辺は $j=1, i=0$ のとき収束しないようにみえるが式(2.1)からわかるように $r=0$ の近傍で $f(r) = O(r)$ であるから収束する。よ、て、 $i=0$ の場合に限り $r=0$ の近傍で $\phi(r)$ を2次関数で近似し $\phi(r) = (r/h_0)^2 \phi(a_1)$ とおいて積分を実行することにする。各方法において $\Phi(a_0) = 0$ となるように N を決めれば係数行列は各々以下のようになる。

$$\text{(方法5)} \quad B_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a_{j+1}} - \frac{1}{a_j} \right) & j < i \leq n \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_i} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{i+1}^2 - a_i^2}} \right] & j = i < n \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{a_{i+1}} - \frac{1}{a_j} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{i+1}^2 - a_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_j^2 - a_i^2}} \right] & i < j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{a_n} - \frac{1}{\sqrt{a_n^2 - a_i^2}} \right] & i < j = n \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{a_n} & i = j = n \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\text{(方法6)} \quad B_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{a_{j+1/2}} - \frac{1}{a_{j-1/2}} \right) & i < i \leq n \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{a_{i+1/2}} - \frac{1}{a_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{i+1/2}^2 - a_i^2}} \right] & i = i < n \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{a_{j+1/2}} - \frac{1}{a_{i-1/2}} \right) + \frac{1}{\sqrt{a_{j+1/2}^2 - a_i^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{i-1/2}^2 - a_i^2}} \right] & i < j < n \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{a_{n-1/2}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n-1/2}^2 - a_i^2}} \right] & i < j = n \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\pi} \frac{1}{a_{n-1/2}} & i=j=n \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{h_i} - \frac{1}{h_i} (\log a_2 - \log a_1) + \frac{1}{h_i} (\rho_{i2} - \rho_{i1}) \right] & i=j=1 \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{h_i} - \frac{1}{h_i} (\log a_2 - \log a_1) \right] & 1=j<i \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{h_j} \log a_{j+1} - \frac{h_{j-1}+h_j}{h_{j-1}h_j} \log a_j + \frac{1}{h_{j-1}} \log a_{j-1} \right) \right] & 1<j<i \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{h_i} \log a_{i+1} - \frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}h_i} \log a_i + \frac{1}{h_{i-1}} \log a_{i-1} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{h_i} (\rho_{i,i+1} - \rho_{ii}) \right] & i=j<n \\ \frac{1}{\pi} \left[-\left(\frac{1}{h_j} \log a_{j+1} - \frac{h_{j-1}+h_j}{h_{j-1}h_j} \log a_j + \frac{1}{h_{j-1}} \log a_{j-1} \right) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{h_j} \rho_{i,j+1} - \frac{h_{j-1}+h_j}{h_{j-1}h_j} \rho_{ij} + \frac{1}{h_{j-1}} \rho_{i,j-1} \right] & i<j<n \\ \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{h_{n-1}} (\log a_n - \log a_{n-1}) - \frac{1}{h_{n-1}} (\rho_{in} - \rho_{i,n-1}) \right] & i<j=n \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{h_{n-1}} (\log a_n - \log a_{n-1}) & i=j=n \end{array} \right. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

(方法7) $B_{ij} =$

ただし $\rho_{ij} = \log(a_j + \sqrt{a_j^2 - a_i^2})$ とおいた。

5. 陰公式の誤差

各近似により生じる誤差を評価するために、ここでは n が大きい場合の誤差の漸近的な形を導く。区間 $[0, R_{\max}]$ の分割 $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = R_{\max}$ は等間隔である必要はないので、まず分割の仕方を決めておく。 $m(R)$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} ([a, b]$ 間の分点数) / $n = \int_a^b m(R) dR$ で定義し、「分点密度」と呼ぶことにする。当然、 $\int_0^{R_{\max}} m(R) dR = 1$ である。また、 $m(R)$ が区間 $(0, R_{\max})$ でなめらかな増加関数である分割の片考える。さらに、有限の n に対する分割は次に示すように行なうものとする。

$$h_i = 1/n m(a_i) + O(1/n^2) \quad (5.1)$$

ここで $h_i = a_{i+1} - a_i$ は i 番目の小区間の長さである。代表的な例を以下に示す。

$$(I) \quad \text{半径の等分割} \quad a_i = R_{\max} (i/n) \quad , \quad m(R) = 1/R_{\max} \quad (5.2)$$

$$(II) \quad \text{断面積の等分割} \quad a_i = R_{\max} \sqrt{i/n} \quad , \quad m(R) = 2R/R_{\max}^2 \quad (5.3)$$

$$(III) \quad \text{体積の等分割} \quad a_i = R_{\max} \sqrt[3]{i/n} \quad , \quad m(R) = 3R^2/R_{\max}^3 \quad (5.4)$$

次に「残差」 $\Delta\phi(a_i)$ を $\phi(a_i) = (\text{近似式}) + \Delta\phi(a_i)$ で定義し、それぞれの方法について残差の漸近的評価を求めた。以下にそれを示す。

$$(方法1) \quad \Delta\phi(a_i) = \frac{1}{n} \left[\int_{a_i}^{a_n} \frac{R F(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)} - \int_{a_0}^{a_n} F(R) \frac{dR}{m(R)} \right] + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (5.5)$$

$$(方法2) \quad \Delta\phi(a_i) = \frac{C_2 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5.6)$$

$$(方法3) \quad \Delta\phi(a_i) = \frac{C_3 \sqrt{a_i} F(a_i)}{m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (5.7)$$

$$(方法4) \quad \Delta\phi(a_i) = -\frac{1}{6n^2} \left[\int_{a_i}^{a_n} \frac{R F'(R)}{\sqrt{R^2 - a_i^2}} \frac{dR}{m(R)^2} - \int_{a_0}^{a_n} F'(R) \frac{dR}{m(R)^2} \right] + O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right) \quad (5.8)$$

式(5.5)は $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ を各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ で $R = a_j$ において Taylor 展開し、剰余項の総和を積分で近似することによ、て得られる。 $O(1/n\sqrt{n})$ は総和を収束する特異積分で近似したときに生じたものである。式(5.6)は、各小区間 $[a_{i-1}, a_i]$ において Lagrange 補間公式を適用し、剰余項の総和を計算することにより得られる。この場合、特異点 $R = a_i$ での近傍での誤差が主要項となり、定数 C_2 を正確に定めるのは困難であるが、総和を発散積分におきかえ漸近的に評価すれば $C_2 \sim -5\sqrt{2}/12$ となる。式(5.7)は、各小区間 $[a_{j-1}, a_j]$ で $R = (a_{j-1} + a_j)/2$ において $\sqrt{R^2 - a_i^2}$ を Taylor 展開し、剰余項の総和を計算すれば得られるが、定数 C_3 が異なることを除けば(方法2)と同じである。ここでも $R = a_i$ の近傍での誤差が主要項であり、 C_3 の近似値を求めれば $C_3 \sim (48 - 31\sqrt{2})/24$ となる。式(5.8)は $\Re(R)$ を区分的に一次式と近似しているので、誤差項は式(2.5)の $\Re(R)$ について各小区間 $[a_{j-1}, a_j]$ ごとに Lagrange 補間公式を適用し、剰余項の総和を積分で近似すれば得られる。

$\Delta\Phi$ を i 番目の要素が $\Delta\phi(a_i)$ であるようなベクトルとすると、 $\Phi = A\Re + \Delta\Phi$ であるから $\Re = B\Phi - B\Delta\Phi$ となる。ゆえに、解 $B\Phi$ に含まれている誤差は

$$\Delta\Re(a_i) = -\sum_{j=1}^n B_{ij} \Delta\phi(a_j) \quad (5.9)$$

で与えられる。そして $B_{ij} = O(1/n)$ であることより誤差に関するオーダーは $\phi(a_i)$ のものと同じであることがわかる。したが、て、(方法1)は $O(1/n)$ (方法2)と(方法3)は $O(1/n\sqrt{n})$ 、(方法4)は $O(1/n^2)$ である。

6. 陽公式の誤差

$\Delta\Re(a_i)$ を $\Re(a_i) = (\text{近似式}) + \Delta\Re(a_i)$ で定義し、各方法について残差の漸近的評価を求め、以下にそれを示した。

$$(方法5) \quad \Delta\Re(a_i) = \frac{C_5 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad (6.1)$$

$$(方法6) \quad \Delta\Re(a_i) = \frac{C_6 f(a_i)}{\sqrt{a_i} \sqrt{m(a_i)} \sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) \quad (6.2)$$

$$(方法7) \quad \Delta\Re(a_i) = \frac{C_7 f'(a_i)}{\sqrt{a_i} m(a_i)^{3/2} n^{3/2}} + \frac{C_7' f'(0)}{m(0) n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (6.3)$$

式(6.1)および式(6.2)は、各小区間 $[a_{j-1}, a_j]$ において $1/\sqrt{r^2 - a_i^2}$ を $r = a_j$ および $r = (a_{j-1} + a_j)/2$ で Taylor 展開し、剰余項の総和を計算することによ

り得られる。ここでも $r=a_i$ の近傍での誤差が主要項となる。陰公式の場合と同様にして C_5, C_6 の近似値を求めれば $C_5 \sim -3\sqrt{2}/4\pi$, $C_6 \sim -(97\sqrt{2}-96)/96\pi$ となる。式(6,3)は、各区間において $\phi(r)$ に Lagrange 補間公式を適用し、剰余項の総和を計算することによ、て得られる。ここでは、第一項は積分の計算の $r=a_i$ の誤差、第二項は N の計算の $r=0$ の近傍での誤差である。 C_7, C_7' の近似値は各々 $C_7 \sim 5\sqrt{2}/24$, $C_7' \sim -1/12\pi$ となる。

さて、以上に得られた結果を比較してみれば、陰公式において誤差のオーダーの大きいことがわかる。これは式(2,2), すなわち陰公式の積分方程式に較べ、対応した式(4,1)の積分の方が特異性が高いからである。このため、同じ近似を施しても陽公式の誤差の方が大きくな、てしまう。

7. 数値実験とまとめ

例として R_{\max} は 1, 単位体積当りの球の数は 1 とし、次のような分布密度を考える。

$$F(R) = 30R^2(R-1)^2. \quad (7.1)$$

平均半径は $1/2$ である。分布関数は

$$\Phi(R) = R^3(6R^2 - 15R + 10), \quad (7.2)$$

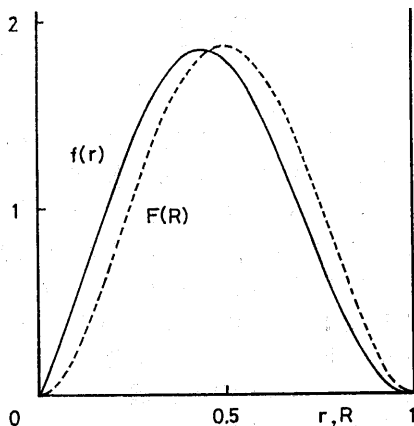
となる。これに対応した断面上の分布関数は式(2,2) より得られ

$$\begin{aligned} \phi(r) = & 1 + 24\sqrt{(1-r^2)^5} + \frac{5}{2}(13r^2-10)\sqrt{(1-r^2)^3} \\ & - \frac{15}{4}r^2(r^2+2)(\sqrt{1-r^2} - r^2 \log \frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r}), \end{aligned} \quad (7.3)$$

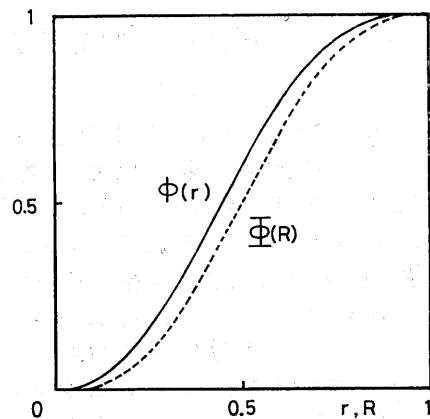
となる。式(7.1)~(7.3)は図2(a)(b)に示してあいた。さて、式(7.3)を入力値として用いれば、真の出力は式(7.2)で表わされる。また、簡単のために分割方法としては半径の等分割、すなわち、 $a_i = i/n$ (式(5,2))を用いる。したが、て $m(R) = 1$ である。誤差の大きさとしては $\|\Delta\Phi\|_{\infty} = \max |\Delta\Phi(a_i)|$ と $\|\Delta\Phi\|_1/n = \sum_{i=1}^n |\Delta\Phi(a_i)|/n$ を用いた。結果を図3(a)(b)に示した。これから収束のオーダーは先に求めた漸近的評価によく一致していることがわかる。図4(a)~(c)は陽公式についての誤差の分布を示したものである。 $n=30, 60, 120$ について破線でその漸近的評価式の値を、実線で計算値を示した。これらは非常によく一致していることがわかる。(方法5)の場合に少しずれているのは N の計算の誤差 ($O(1/n)$) が無視できない大きさを持つためと考えられる。以上の誤差の漸近的評価から陰公式、特に(方法4)が高精度であり、実際に用いればかなり良い結果の得られることが予想される。一方、陽公式は逆行列が不要であることや漸近的な誤差が入力として用いる断面上の分布から推測できるなどの利点がある。たとえば、予想される誤差の漸近的な値を用いて数値解を修正したり、「加速」を用いて真の解への収束を早めることなどもできる。

文 献

- 1) Kendall, M. G. and Moran, P. A.: *Geometrical Probability*, Charles Griffin, London (1963).
- 2) DeHoff, R. T. and Rhines, F. N.: *Qualitative Microscopy*, McGraw-Hill, New York (1968) (牧島邦夫監訳: 計量形態学, 内田老鶴園新社 (1972)).
- 3) Underwood, E. E.: *Stereological Stereology*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1970).
- 4) Santaló, L. A.: *Integral Geometry and Geometric Probability*, Addison-Wesley, London (1976).
- 5) Weibel, E. R.: *Stereological Methods*, Vols. 1, 2, Academic Press, New York (1979, 1980).
- 6) 諏和紀夫: 定量形態学, 岩波書店 (1977).
- 7) 日本金属学会編: 材料検査法 (講座 現代の金属学, 実験技術集 7), 日本金属学会 (1978).
- 8) Okaya, T. and Inoue, T.: Estimation of particle size distribution by the measurement on cross sections, *Proc. Int. Symp on Powder Technology '81*, pp. 72 - 80, 粉体工学会 (1982).
- 9) Oda, M.: A method for evaluating the effect of crack geometry on the mechanical behavior of cracked rock masses, *Mech. Materials* (to appear).
- 10) Hilliard, J. E.: Determination of Structural Anisotropy, *Stereology - Proc. 2nd Int. Congress for Stereology, Chicago, 1967 -*, (ed. H. Elias), pp. 219 - 227, Springer, Berlin (1967).
- 11) Kanatani, K.: Stereological determination of structural anisotropy, *Int. J. Engng Sci.* (to appear).
- 12) 金谷健一: ステレオロジーによる異方性粒子の配向性の測定法, 粉体工学誌 (予定).
- 13) 金谷健一: 構造異方性によるしずみを決定するステレオロジーの理論, 材料科学 (予定).
- 14) 金谷健一: 平面の傾きと運動の検出, 情報処理学会コンピュータビジョン研究会 24-1 (1983).
- 15) 金谷健一, 石川 修: ステレオロジーによる粒径分布を求める数値解法の研究, 粉体工学誌 (予定).
- 16) Scheil, E.: Die Berechnung der Anzahl und Größenverteilung kugelförmiger Körper mit Hilfe der durch ebene Schnitte erhaltenen Schnittkreise, *Z. Anorg. Allgem. Chem.*, Vol. 201, pp. 259 - 264 (1931).
- 17) Saltykov, S. A.: The determination of the size distribution of particles in an opaque material from a measurement of the size distribution of their sections, *Stereology - Proc. 2nd Int. Congress for Stereology, Chicago, 1967 -*, (ed. H. Elias), pp. 163 - 173, Springer, Berlin (1967).
- 18) Wicksell, S. D.: The corpuscle problem. A mathematical study of a biometric problem, *Biometrika*, Vol. 17, pp. 84 - 99 (1925).
- 19) Cruz-Orive, L. M.: *Size Distribution*, Lecture Notes, Department of Anatomy, Univ. Bern (1977).

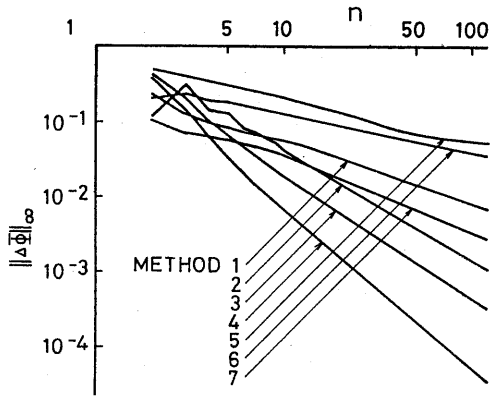


(a) 分布密度関数

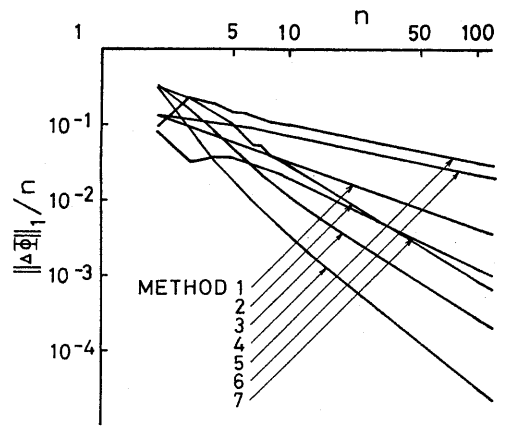


(b) 累積分布関数

図2 球の分布と断面上の円の分布

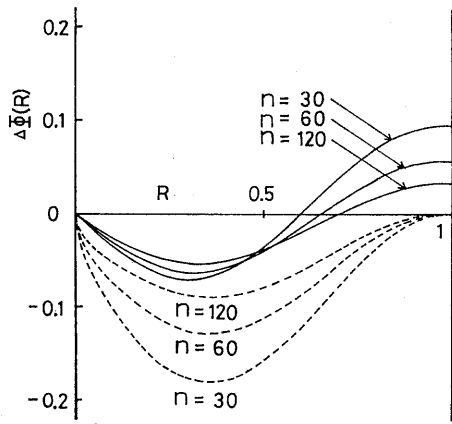


(a) $\|\Delta\Phi\|_\infty$

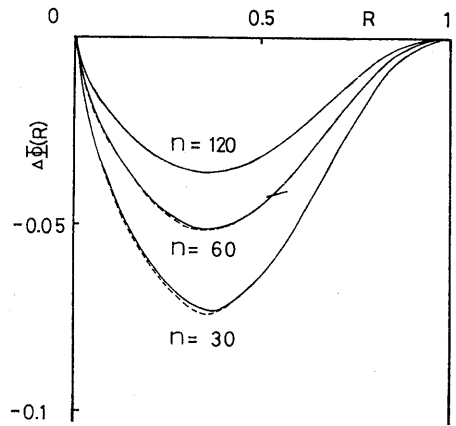


(b) $\|\Delta\Phi\|_1/n$

図3 図2の分布に対する(方法1)~(方法7)の誤差

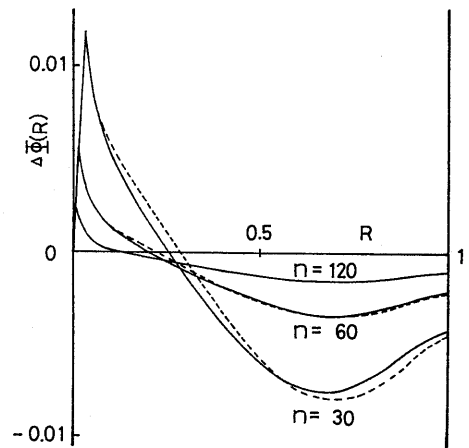


(a) 方法5



(b) 方法6

図4 図2の分布に対する誤差の漸近的評価式の値(実線)と計算値(破線)



(c) 方法7