

第1種不完全複素楕円積分の全域かゝ一様近似

久原秀光, 島居達生, 杉浦洋
 (八代高専) (名古屋大序工学部)

1. まえがき. よく知られているように, 楕円積分の標準形は

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}, \quad \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}, \quad \int_0^z \frac{dz}{(1-kz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

の三種類に分かれ, それぞれ第1, 2, 3種不完全楕円積分という. 正数 $k < 1$ を母数, 実数 z をパラメタとよぶ.

楕円積分, 楕円関数の研究の歴史は古い. 楕円積分, 楕円関数 (理論および数値計算法) のくわしい文献が安藤の著書にある¹⁾. 楕円積分に対しては, まづに確立された算法があり, 数表およびプログラムも作成されている^{2,3)}. 第1種楕円積分の場合, 母数 k が1に近いかによって上昇 Landen 変換 (Ascending Landen Transformation) または下降 (Descending) Landen 変換が用いられる.

Landen 変換は, 母数を変えようとする積分変数の変換として従来考えられてきたが, われわれは, これを複素積分の変数変換として取扱う.

複素楕円積分の計算法は, 手記以前の竹内端三の著書にあるべき級数展開⁴⁾の他にないようである. このべき級数展開は z -平面的原真近傍では収束は速いが, 母数 k と原点からの距離の積 $|z|k$ が大きくなるとともに収束は遅くなる.

われわれは, まづ不完全複素楕円積分の定積分表示を Cauchy の積分表示から導く. まづに Landen 変換の Riemann 面の構造を明らかにし, 母数が大のとき上昇 Landen 変換の繰返しによって特異点を解消し, Gauss-Chebyshev 則によつて, その定積分を求めよう. 本方法は, 母数 k を固定すれば, 複素平面全体で一様近似となる. 上昇 Landen 変換の繰返しにより母数 k の列は2次収束することから本方法の収束も速い. 母数 k が小さいとき, 下降 Landen 変換により第1種楕円積分の計算は可能であるが, 全域かゝ一様近似の性質がないので, ここでは取り扱わない. 楕円積分を全域かゝ一様近似する方法の最初の着想は久原である⁵⁾. これは楕円積分を静電場の解釈し電荷置換法 (代用電荷法) で求める方法である.

本論文では, 第1種不完全複素楕円積分の算法について詳しく述べるが, 終の方には, 2種, 3種の場合にも適用できるであろう.

2. 不完全楕円積分の定積分表示. 第1種不完全楕円積分の被積分関数 (2.1)

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \quad (2.1)$$

に対応する Riemann 面は, 2枚の分葉 Π_1, Π_2 からなる. Π_1 上の $z=0$ で $f(0)=1$ とする. 分岐点 $\pm 1, \pm 1/k$

を結ぶ二つのスリット $S^+ = [1, 1/k]$, $S^- = [-1, -1/k]$ の下岸の真は, Π_1 に属し Π_2 の上岸に属するものとする. (図1).

さて, z -平面的任意の2点 z_0, z_1 を滑らかな曲線 C で結ぶ. まづ簡単のため曲線 C は, Π_1 上にあつてスリットを囲まないものとする. C 上の積分 (2.2)

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(z) dz \quad (2.2)$$

をスリット上の定積分として表示しよう. 被積分関数は, 分岐点を除き

全平面が正則であり, 無限遠点の近傍で $f(z) = O(z^{-2})$ である. 二つのスリット

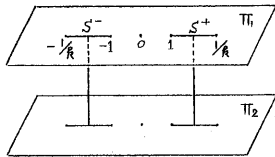


図1 楕円積分の被積分関数のRiemann面

S^+ , $S^- \in$, それぞれ単一周曲線 C^+ , C^- で囲み, 外部に対して Cauchy の積分公式を用いる.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

これを (2.2) に代入し, 積分順序を変更すれば

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C^-} f(\zeta) \log \frac{\zeta-z_0}{\zeta-z_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{C^+} f(\zeta) \log \frac{\zeta-z_0}{\zeta-z_1} d\zeta$$

となる. $z=z_0$, 周曲線 C^+ , C^- をスリット S^+ , S^- に逆方向. $z_1=0$, $z_0=z_1$ とおけば, 上式は

$$F(z) = \bar{F}(z, k) = \frac{1}{\pi} \int_0^{1/k} \log \frac{x+z}{x-z} \cdot \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}} \quad (2.3)$$

と定積分表示される. スリットの上岸, 下岸を $1/\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ は, 純虚数で符号が異なる: $\pm i$ を用いた. 対称関数のカットは実軸上のスリット $(-\infty, -1)$, $(1, \infty)$ である.

母数 k に対して, $k' = \sqrt{1-k^2}$ を補母数という. また, $F(1, k)$, $F(1, k')$ を完全楕円積分といい, 通常 K , K' で表わす.

周曲線 C_1 が, 一つのスリットを用いるとする. C_1 に沿って時計回りに一周積分すれば $2\pi k'$ となる. したがって, 原点からスリットを用いて戻りまわれば, 楕円積分 (2.3) に $2\pi k'$ が加えられることになる. 二つのスリットを囲む周曲線 C_2 上の積分は $4\pi k'$, 今葉 Π_1 と Π_2 を通る周曲線 C_2 上の積分は $4\pi k$ となる. (図2). これらの事実は楕円関数の二重周期を意味する.

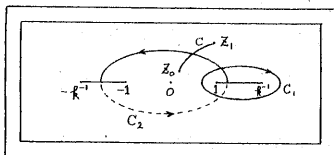


図2 Riemann面上の積分路

3. Landen 変換 楕円積分の母数 k が 0 または 1 のとき, その積分は初等的となる. 完楕円積分を求めるとき, 母数の大小に応じて上昇 Landen 変換, 下降 Landen 変換を繰返し, 漸近的に初等的な積分に帰着させる方法が用いられる²⁾. この完楕円積分の方法を複素楕円積分に適用した例はたいていようである. 完 Landen 変換

を解析接続により複素平面上に拡張すればよいわけであるので Landen 変換の Riemann 面を明確にする必要がある.

Landen 変換は母数の異なる二つの楕円積分を結びつける一つの積分変換として知られている. すなわち母数 h と k の二つの楕円積分 $F(z, h)$, $F(w, k)$ において, 母数に以下の関係があるとき

$$h = \frac{1-k'}{1+k'} \quad \text{あるいは} \quad k = \frac{2\sqrt{h}}{1+h} \quad (3.1)$$

変数変換

$$z = (h/k') w \sqrt{\frac{1-w^2}{1-k'^2 w^2}} \quad (3.2)$$

を行えば, 次が成り立つ.

$$F(z, h) = \frac{2}{1+h} \int_0^w \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2)(1-k'^2 w^2)}} = \frac{2}{1+h} F(w, k) \quad (3.3)$$

変換(3.2)を Landen 変換という^{*)}。係数の関係式(3.1)より $k > k'$ 。すなわち変換後係数は大きくなる。このように係数が大きくなる変換を上昇 Landen 変換、逆に下降 Landen 変換という。前者の場合、(3.2)を w に関する陰関数と見て、 w をその 1 価関数として階に表わさなければならぬ。

複素楕円積分の全域が一様近似に必要なのは上昇 Landen 変換であるから、これについて述べる。 z -平面上の単位円を w -平面上のスリット $[-1, 1]$ に写す $w = (z + z^{-1})/2$ は、Joukowski 変換の名で知られている。簡単なために $w = J(z)$ で表わす。Landen 変換は、 z^2 , w^2 -平面上の Joukowski 変換であることである。なぜならば Landen 変換(3.2)は

$$z^2 = \frac{1+k'^2}{(1-k')^2} + \frac{2k'}{(1-k')^2} J(k^2 w^2 - 1)/k' \quad (3.6)$$

と書けるからである。明らかに z^2 -平面上の実軸上の線分 $[1, (1+k')/(1-k')^2]$ は w^2 -平面上の中心 k^2 、半径 k'/k^2 の円に写る。上昇 Landen 変換の場合、 z を与え、一意に w を定むなければならぬが、Landen 変換(3.2)は w に関し、4 次の代数方程式である。よって w -平面上に適当に分葉を考へ、 $z = z^2$ と上昇 Landen 変換が単葉となるよう Riemann 面を構成することにする。Landen 変換の Joukowski 表現(3.4)から z -平面上の分枝点 $\pm 1, \pm (1+k')/(1-k')$ は分枝点である。 w -平面上の分枝点は(3.2)より $\pm 1, \pm 1/k$ である。 z -平面上に4枝の分葉 $\Pi_{j,z}, 0 \leq j \leq 3$, w -平面上に2枝の分葉 $\Pi_{j,w}, 0 \leq j \leq 1$ を考へる。分葉 $\Pi_{j,z}$ のスリットは

$$S_{j,z}^+ = [1, 1/k_0], \quad S_{j,z}^- = [-1, -1/k_0], \quad k_0 = (1-k')/(1+k') \quad (3.5)$$

とする。添字 z, w は、誤解の恐れがなければ略すことにする。

ここで、 Π_j 平面を右半平面 Π_j^+ と左半平面 Π_j^- に分ける。すなわち $\Pi_j = \Pi_j^+ + \Pi_j^-$ 。ここで Π_j^+ は Π_j の $\text{Re } z \geq 0$ より負の虚軸を除いた部分、 Π_j^- は Π_j の $\text{Re } z \leq 0$ より非負の虚軸を除いた部分である。そして右分葉のスリットを次のように連結する。

$$S_0^+ = S_1^+, \quad S_1^- = S_2^-, \quad S_2^+ = S_3^+, \quad S_3^- = S_0^-$$

後の都合上 S_0^+ の端点 $1, 1/k_0 \in P_2, Q_2$ で表わす(添字 z は以後しばしば省略)。スリットの連結 $S_0^+ = S_1^+$ の意味は S_0^+ の下岸と S_1^+ の上岸を糊合わせることにである。スリットの連結にともなう分葉 Π_j の左右の半平面が次の順序に連結され-巡する。(図3)。Landen 変換(3.4)と基本的な写像(平面上、

$$\Pi_0^+ \Pi_1^+ \Pi_1^- \Pi_2^- \Pi_2^+ \Pi_3^+ \Pi_3^- \Pi_0^- \quad \text{Joukowski 変換, 前平)} \text{ に分解し変換の過程を述べる。(図3).}$$

まず、平面上 $z \rightarrow z^2$ より、 z -平面上の右半平面は $s (= z^2)$ -平面上の一枚の分葉に対応するが全部で8枚となる。 z -平面上の虚軸は s -平面上の負の実軸に対応する。図3においては、異なる面上に対応する点やスリットは、その対応を明確にするために同じ記号を用いている。つまり $s (= z^2)$ -平面上から $t (= w^2)$ -平面上への変換は(3.4)より Joukowski 変換であるから s -平面上の2枝の分葉 $\Pi_{0,s}^+$ と $\Pi_{1,s}^+$ は t -平面上の一枚の分葉(=2つの領域 $\Pi_{0,t}^+$ と $\Pi_{1,t}^+$ からなる)に対応する。 $\Pi_{0,t}^+$ は t -平面上の円 $S_{0,t}^+$ の内部であり、他方 $\Pi_{1,t}^+$ は円の外側となる。いうまでもなく t -平面上の円 $S_{0,t}^+$ は、 s -平面上のスリット $S_{0,s}^+$ の像がある。 s -平面上において上下の位置関係にある負の実軸 O, A_0 および O, A_1 は、 t

w -平面において負の実軸 $O_0 A_0$ と円 S_0^+ 内のスリット $O_1 A_1$ に写る。スリット $O_1 A_1$ は、円 S_0^+ に関し半直線 $O_0 A_0$ と鏡像になっている。 w -平面の4枚の分葉の連結は図3を考慮されたい。

最後の段階の写像は兩平 $t (= w^2) \rightarrow w$ である。 w -平面の2枚の分葉が w -平面の一枚に対応するので結局 w -平面は2枚の分葉からなる。 w -平面の円 S_0^+ は、 \sqrt{t} により印形線 S_0^+, w に変形される。 w -平面で負の実軸とスリットとして糊付けされた2枚の分葉は、 w -平面で虚軸で接続された一枚の面に写る。各段階の変換は、解析的であるので1対1であるから考えている Landen 変換は、全平面で単葉関数となる。いま、上昇 Landen 変換であるので、 w -平面

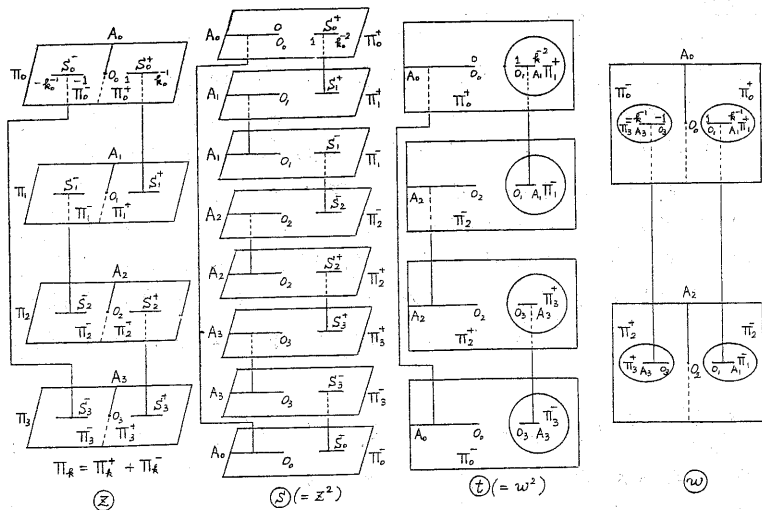


図3 Landen変換のRiemann面

- $O_0 : w = 0, z = 0 \in \Pi_0$
- $A_0 : w = \infty, z = \infty \in \Pi_0$
- $O_1 : w = 1, z = 0 \in \Pi_1$
- $A_1 : w = k^{-1}, z = \infty \in \Pi_1$
- $P : w = 1/\sqrt{1-k}, z = 1 \in \Pi_0$
- $Q : w = 1/\sqrt{1-k}, z = k_0 \in \Pi_0$

$$\operatorname{Re} F(z, k_0) = \begin{cases} k_0, & z \in S_0^+ \subset \Pi_0 \\ -k_0, & z \in S_0^- \subset \Pi_0 \\ 0, & z \in \Pi_0 \text{ の虚軸} \\ 2k_0, & z \in \Pi_1 \text{ の虚軸} \\ -2k_0, & z \in \Pi_3 \text{ の虚軸} \end{cases}$$

つぎに、Riemann面の分葉の分枝を与えておく。平方根 \sqrt{z} は、 $z = re^{i\theta}$, $r \geq 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ で定義されているものとする。これは FORTRAN の標準関数 CSQRT の都合に合わせてある。Landen変換(3.4)を w に関して解くとき、注意を要するのは Joukowski 逆変換の取扱いである。 w -平面の一枚の分葉に1対1に対応する z -平面の領域は、分葉 Π_0 と、それと連なる Π_1^+ , Π_3^- であり Landen 変換は単葉となる。そこでの上昇 Landen 変換の計算式は以下の通りである。補助的に(3.5)式で与えられる k_0 と次式の λ を用いる。

$$\lambda = \frac{z^2 - k_0^2}{z^2 - 1} \quad (3.6)$$

$$w = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} + \frac{k_0'}{k_0^2} \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}}, \quad z \in \Pi_0^+$$

$$w = -\sqrt{\frac{1}{k_0^2} + \frac{k_0'}{k_0^2} \frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}}, \quad z \in \Pi_0^-$$

$$w = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} + \frac{k_0'}{k_0^2} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}}, \quad z \in \Pi_1^+$$

$$w = -\sqrt{\frac{1}{k_0^2} + \frac{k_0'}{k_0^2} \frac{1-\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}}, \quad z \in \Pi_1^-$$

z-平面の与えられた分葉上で単葉となる Landen 変換の表式は一通りではないが、これらの計算式は材料的な開きの使用に都合のよい表現になっていることを注意しておく。

4. Landen 変換の反復と Gauss-Chebyshev 則 z-平面で定義された母数 k の楕円積分に対して上昇 Landen 変換を繰返す。

初期条件を $z_0 = z, k_0 = k$ と設定し

$$k_{n+1} = \frac{2\sqrt{k_n}}{1+k_n} \quad (4.1)$$

$$z_n^2 = (1+k_{n+1}')^2 \frac{z_{n+1}^2 (1-z_{n+1}^2)}{1-k_{n+1}^2 z_{n+1}^2}$$

を (3.7) に代入して z_{n+1} を

$$\text{解く。} \quad (4.2)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$
(注意: 前節の母数 k_0, k_1 は本節の母数 k_0, k_1 に相当する)。

分する z_0 z-平面上に与える積分として解釈することはより上式の右辺は $2^n k_0 / k_n$ と表わすこともできる。

さて、楕円積分の定積分 (2.3) に基づき、(4.3) は

$$\frac{1}{\pi} \int_1^{1/k_0} \frac{1}{\sqrt{(x_0^2-1)(1-k_0^2 x_0^2)}} \cdot \log \frac{x_0+z_0}{x_0-z_0} dx_0 = \frac{1}{\pi} \frac{k_0'}{k_n'} \int_1^{1/k_n} \frac{1}{\sqrt{(x_n^2-1)(1-k_n^2 x_n^2)}} \log \frac{x_n+z_n}{x_n-z_n} dx_n \quad (4.5)$$

と表わされる。Landen 変換により x_0 -平面のスリット $[1, 1/k_0]$ は、 x_n -平面の印形線に写るが、左辺の被積分関数の対称特異点、仮にスリット上にあつても、 x_n -平面では、対称特異点は印形線上にあるので、 x_n -平面のスリット $[1, 1/k_n]$ から離れることになる。1回の Landen 変換は、スリットの端点の代数的特異点を消去するだけでなく、スリット上の対称特異点を積分路 (いまの場合スリット) から離す効果を発揮している。このように変換変換により積分路から特異点を離すことは数値積分を行う上で必要なことである。スリットや円弧を境界とする Laplace 方程式の境界値問題を特異点を消去して代用積分法の手法で解く方法も同じ考え方に立脚している。

スリット上の定積分 (4.5) に基づき、端点の位相の代数的特異点は、Gauss-Chebyshev 則を用いれば、消去されるので、数値積分の誤差に影響する主要な特異点は x_n -平面の印形線上にある対称特異点である。

n 回繰返した後、母数 $k (= k_0)$ の楕円積分は、母数 k_n の楕円積分と次のように関係づけられる。

$$\int_0^{z_0} \frac{dz_0}{\sqrt{(1-z_0^2)(1-k_0^2 z_0^2)}} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z}{1+k_j} \right) \times \int_0^{z_n} \frac{dz_n}{\sqrt{(1-z_n^2)(1-k_n^2 z_n^2)}} \quad (4.3)$$

z_0 -平面の無限遠点は、 z_n -平面の無限遠点に対応するの?

$$\prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{z}{1+k_j} \right) = \frac{k_0'}{k_n'} \quad (4.4)$$

が成り立つ。 z_n -平面 $z=0$ から 1 まで積分

そこで、 α_0 -平面のスリット $[1, 1/k_0]$ が、 n 回の Landen 変換を経て α_n -平面に写る曲線 L_n (暗黙の内はスリット $[1, 1/k_n]$ を囲む卵形線と仮定して) を明確にする必要がある。

一般に母数 k の楕円積分 $F(z, k)$ の実部一定の等高線を考へる。明らかに

$$\operatorname{Re} F(z, k) = K, \quad z \in [1, 1/k], \quad \operatorname{Re} F(z, k) = -K, \quad z \in [-1, -1/k],$$

$$\operatorname{Re} F(z, k) = 0, \quad z \in \text{虚軸}$$

となるが、 $u + \lambda v = F(z, k)$ とおけば、楕円関数の二重周期性より $0 \leq u \leq K, 0 \leq v \leq K'$ の範囲で考えれば十分である。等高線

$$L = \{z; \operatorname{Re} F(z, k) = c, 0 \leq c \leq K\} \text{ あるいは } z = \operatorname{sn}(c + \lambda v)$$

は、 $z = x + \lambda y$ とおくと、 x, y の 4 次曲線がある。しかも $X = x^2, Y = y^2$ とおけば、等高線上は 2 次曲線となることに注意されている。

わけわけも、機械的な形式処理 (二つの 2 次多項式の整式計算を REDUCE で行った) により次の結果を得た。

$$A(x+Y)^2 + B(x+Y) + C(x-Y) + D = 0, \quad m = k^2, \quad a = \operatorname{sn}^2(c, k)$$

$$A = am(a-1)(am-1), \quad B = \frac{1}{2}(a^{2m}-2a+1)(am(2-a)-1) \quad (4.6)$$

$$C = -\frac{1}{2}(a^{2m}-1)^2, \quad D = a(a-1)(am-1)$$

いま、 $0 < c < K$ とおけば、 $0 < a < 1$ であるから係数の符号は、つねに

$$A > 0, \quad C < 0, \quad D > 0 \quad (4.7)$$

となる。係数 B だけは正負いづれの符号もとる得る。ついでながら $F(z, k)$ の虚部一定の等高線も、 (X, Y) 平面の 2 次曲線となる。

以上の事実に基づき楕円積分の実部一定の軌跡 L は卵形線となることを示される。卵形線 L が実軸を切る実は、次の 2 実数だけである。

$$P = \operatorname{sn}(c, k), \quad Q = \frac{1}{k_n} \cdot \frac{1}{\operatorname{sn}(c, k_n)} \quad (4.8)$$

したがって、おとされた α_0 -平面上のスリット $[1, 1/k_0]$ は、Landen 変換を n 回繰返したとき、 α_n -平面上の卵形線

$$L_n: z_n = \operatorname{sn}(c_n + \lambda v, k_n), \quad c_n = k_0 k_n' / k_0' \quad (4.9)$$

に写る。これが実軸を切る実は、(4.8)より直ちに

$$P_n = \operatorname{sn}(c_n, k_n), \quad Q_n = \frac{1}{k_n \operatorname{sn}(c_n, k_n)} \quad (4.10)$$

卵形線 L_n を内側と外側から最良近似する共焦点楕円を求める。ただし楕円の焦点は $1, 1/k_n$ である。これは二実数焦点とする楕円の族は

$$f(z, k) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z)(1-k_n z)}} \quad \text{と } c = c_1 \text{ と } E: \operatorname{Re} f(z, k_n) = c$$

$$c: \text{任意定数} \quad (4.11)$$

と書けることに注意する。いま $c=0$ ならば、楕円 E は原点を通り、

$$c = c_1 = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \log \frac{1 + \sqrt{k_n}}{1 - \sqrt{k_n}} \quad \text{ならば、楕円 } E \text{ はスリット } [1, 1/k_n] \text{ に縮退する。}$$

楕円の長軸方向の主軸は実軸であるが、実軸上の任意の1点 $x \in [0, 1]$ を頂点とする楕円(4.11)の他方の頂点は $(1-x) + k_n'$ である、このとき任意定数は $f(x, k_n) (= f((1-x) + k_n', k_n))$ である。

いま、 $1, 1/k_n$ を焦点とし、点 P_n を通る楕円 E_n 、点 Q_n を通る楕円 F_n とすれば

$$E_n: \operatorname{Re} f(z, k_n) = f(\operatorname{sn}(C_n, k_n), k_n), \quad (4.12)$$

$$F_n: \operatorname{Re} f(z, k_n) = f(1/(\operatorname{cn}(C_n, k_n)), k_n), \quad (4.13)$$

と表わされる。これらは、(4.9) によって楕円 L_n を内側と外側から挟む。

しかも、楕円の族(4.11)で楕円 L_n を内側と外側から詳細する限り、楕円 E_n, F_n は最大である。(図4)。この事実を証明しよう。

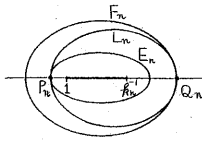


図4 2つの共焦点楕円に接する楕円族 L_n

楕円 L_n の法線ベクトルは $\bar{F}'(\zeta, k_n)$ となる。可成り高くなり、高度の最大値は k_n である。したがって法線ベクトルは内向きとなる。同様に楕円 E_n の点 ζ における法線ベクトル $F'(\zeta, k_n)$ も内向きとなる。

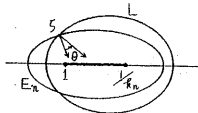


図5 楕円族と楕円の交点における法線ベクトルの交角

そこで、この法線ベクトルの向きを楕円のそれと反対側としておけば

$$\theta = \arg \bar{F}'(\zeta, k_n) - \arg F'(\zeta, k_n)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \arg(1/\zeta) + \arg(1/k_n \zeta) \}$$

となるから、 $0 < \theta < \pi/2$ で詳細できる。(図5)。

したがって、 E_n 上の点 ζ が正の向きに向ければ、点 ζ を通る楕円族の高度は、序に低くなる。ゆえに E_n を囲む最小の楕円族は L_n となる。 E_n と L_n の接点は原点に近い楕円族の一方の頂点 P_n である。同様に考えて楕円 F_n に接する最大の楕円族は中心 L_n であり、接点は Q_n となる。(証明終)。

ここで、楕円族の定積分表示(4.5)の右辺において積分区間の端点の位数1の代数的根は、Gauss-Chebyshev 則を用いるならば解消されるので、被積分関数の代数的根 $1, 1/k_n$ を除きスリット $[1, 1/k_n]$ を囲む正則領域の拡大による^{補正}、その積分則の精度は支配される。正確にいえば「積分区間の端点を焦点とする楕円族の最大である。被積分関数は代数的根 $1, 1/k_n$ を除き楕円族 L_n の内部で正則であるから、これに内接する4葉楕円族(4.12)で包まれる楕円 E_n に他ならない。

w -平面的スリット $[1, 1/k_n]$ を w -平面的単位円に写す Joukowski 変換は

$$z_n = \frac{1}{4} (k_n' - 1)(w + w') + \frac{1}{2} (1 + k_n')$$

w -平面的の原点を中心とし半径

$$\rho_n = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}, \quad \text{ただし } \rho_n \text{ は (4.9) によって } C_n \text{ を用いて } \rho_n = \frac{k_n' - \operatorname{sn}(C_n, k_n)}{1 - \operatorname{sn}(C_n, k_n)} \quad (4.14)$$

の円に写す。楕円族 L_n に外接する楕円 F_n に対応する w -平面的の同心円の半径は

$$\alpha_n = \frac{1+\sqrt{\gamma}}{1-\sqrt{\gamma}}, \quad \text{ただし } \gamma = \frac{1 - \text{SN}(C_n, k_n)}{1 - k_n \text{SN}(C_n, k_n)} \quad (4.15)$$

とる。

母数の二乗 k_0^2 を与えて Landen 変換を繰返したとき k_n^2, k_{n+1}^2, \dots 卵形線 L_n の頂点 P_n, Q_n の位置および L_n に内接あるいは外接する楕円の ρ_n, σ_n を卵形線の特徴量として表 1 に示す。

表 1. 卵形線の特徴付け

n	k**2	k'**2	P	Q	rho	sigma
0	1.56250000-02	9.84375000-01	1.000+00	6.400+01	1.000+00	1.000+00
1	3.95061730-01	6.04938270-01	7.500-01	2.120+00	3.400+00	5.400+00
2	9.47972960-01	5.20270360-02	6.210-01	1.660+00	5.800+01	9.480+01
3	9.99821600-01	1.78396880-04	6.120-01	1.630+00	1.740+04	2.840+04
4	1.00000000+00	1.98944540-09	6.120-01	1.630+00	1.560+09	2.550+09
5	1.00000000+00	2.47368320-19	6.120-01	1.630+00	1.250+19	2.050+19
0	5.00000000-01	5.00000000-01	1.000+00	2.000+00	1.000+00	1.000+00
1	9.70562750-01	2.94372520-02	9.240-01	1.100+00	2.220+01	2.420+01
2	9.99944200-01	5.57959210-05	9.170-01	1.090+00	1.190+04	1.300+04
3	1.00000000+00	1.94584910-10	9.170-01	1.090+00	3.410+09	3.710+09
4	1.00000000+00	2.36645540-21	9.170-01	1.090+00	2.800+20	3.050+20
0	9.84375000-01	1.56250000-02	1.000+00	1.020+00	1.000+00	1.000+00
1	9.99984500-01	1.55005120-05	9.980-01	1.000+00	1.020+03	1.020+03
2	1.00000000+00	1.50168490-11	9.980-01	1.000+00	1.050+09	1.050+09
3	1.00000000+00	1.40941090-23	9.980-01	1.000+00	1.120+21	1.120+21

$n=2$, 点 P_n, Q_n の極限は, SN 関数の母数 1 に近づく漸近表示より

$$P_\infty = \tanh\left(\frac{\pi}{2} \frac{k_0}{k_0'}\right), \quad Q_\infty = \coth\left(\frac{\pi}{2} \frac{k_0}{k_0'}\right) \quad (4.11)$$

とる (文献 2), p. 574). 卵形線 L_n の極限 L_∞ は, 中心 x_c が P_∞ と Q_∞ の中点で, 直径が $Q_\infty - P_\infty$ の円になる。母数 k_n は 1 に 2 次収束するのでもスリット $[1, 1/k_n]$ は, 1 点 1 に収束する。(図 6)。

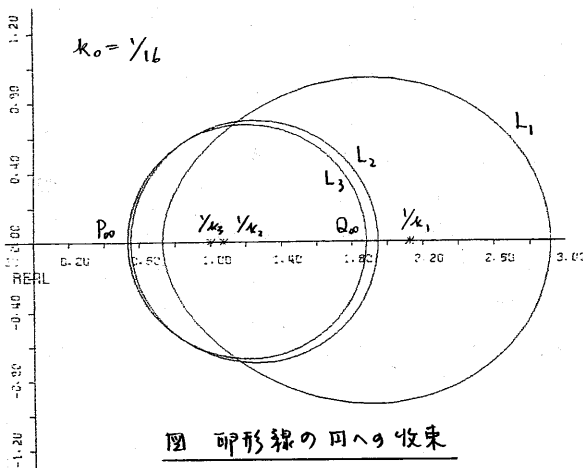


図 卵形線の円への収束

とる。 $n=2$ Δ_N^n は, 積分の打ち切り誤差である。

以上で楕円積分に代り Gauss - Chebyshev 則を適用するための前提条件の解析を終り, 算法の最終段階である数値積分について述べる。

Landen 変換を n 回行った後の定積分表示 (4.5) の右辺に代り, N 点 Gauss - Chebyshev 則を用いると

$$F(z_0, k_0) = \frac{k_0'}{k_0} \frac{1}{N\sqrt{k_n}} \times \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\log(z_j + z_0)/(z_j - z_0)}{\sqrt{(z_j + 1)(1 - k_n z_j)}} + \Delta_N^n$$

$$z_j = \frac{k_n^{-1} - 1}{2} \cos \frac{\pi}{N} \left(j + \frac{1}{2}\right) + \frac{k_n^{-1} + 1}{2} \quad (4.17)$$

Landen変換を十分多く繰返したとき z_n の極限值 z_∞ とする。母軌 k_n は 1 に収束するのび、積分区間の長さ l は 0 とする。標本数 N は $1/2$ である。したがって

$$F(z_0, k_0) = \frac{k_0'}{\pi} \log \frac{1+z_\infty}{1-z_\infty} \quad (4.18) \quad \text{が得られる。ここで } k_n' \rightarrow \frac{\pi}{2} \text{ を用いた。}$$

z_∞ -平面で、右辺の虚部一定の等高線は有名なポロロウスの円群となる。

Gauss-Chebyshev 則の誤差解析を行う。楕円積分 (4.5) の右辺の定積分を

$$\int_{1/k_n}^{1/k_n} \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(1-k_n^2 x^2)}} \log \frac{x-z_n}{x+z_n} dx = \int_{1/k_n}^{1/k_n} \frac{g(x)}{\sqrt{(x-1)(k_n^2-x)}} dx, \quad \text{係数と表現した}$$

と置き、一次変換 $x = (k_n^{-1}-1)t/2 + (k_n^{-1}+1)/2$ により、 x 軸の区間 $[1, 1/k_n]$ を t 軸の $[-1, 1]$ に移し、標準区間の N 点 Gauss-Chebyshev 則を考へる。このとき、Gauss 則の誤差解析により、その誤差は次式で表わされる。

$$\frac{1}{2N\pi} \int_C \frac{T_N(s)}{T_N(s)} g(x(s)) ds, \quad (4.19) \quad \text{積分路 } C \text{ は } t\text{-平面で } s \text{ リット } [-1, 1] \text{ を囲み、} g(x(t)) \text{ の正則領域内の任意の単一周曲線である。}$$

$T_N(s)$: N 次の第 1 種 Chebyshev 多項式

$T_N(s)$: $T_N(s)$ に対する第 2 種 Chebyshev 関数

t -平面の積分路 C を C_1 とし、 x -平面に対応する曲線を C_2 とすれば、 C_2 が (4.12) で与えられる楕円 E_n に接近する程その誤差評価は精密となる。 $g(x)$ の特異点は、分岐点 $-1, -1/k_n$ と対称特異点 $\pm z_n$ だけである。今右半平面だけ考へておくと、曲線 C_2 に近い特異点は z_n だけとなる。しかも z_n が円形線 L_n の実軸上の点 P_n となる。上の誤差は最大となる。そこで $z_n = sn(C_n, k_n)$ としよう。したがって周回積分 (4.19) の値は、被積分関数の点 P_n の近傍の振舞いに支配される。その鞍点は P_n の近傍で楕円 E_n の内側にあることになる。

これらのことを考へると $g(x)$ は、次のように近似される。

$$g(x) \approx \frac{\log(x-z_n)}{\sqrt{k_n(1+x)(1+k_n x)}}, \quad z_n = sn(C_n, k_n)$$

したがって、 k_n が 1 に十分近ければ、周回積分 (4.19) の値は $\pi / (N(Hz_n)5^{2N})$ となる。結局、楕円積分 (4.5) の誤差は

$$\Delta_N^n \approx \frac{2}{\pi} \frac{k_n'}{N} \frac{\beta_n^{-2N}}{1+sn(C_n, k_n)} \quad (4.20)$$

で表わされる。ここで、 β_n と α_n $P_n = sn(C_n, k_n)$ は表 1 に示されている。この誤差評価は、与えられた母軌 k ($=k_0$) だけに依存し z に無関係である。また、われわれの方法は、複素楕円積分に対する全域の一様近似の方法になっている。打切誤差 Δ_N^n の母軌に対する依存性は、次節の数値例を考へておいた。

5. 数値例。本方法の精度を確かめるために、別法の結果と比較する。別法とは、べき級数展開を用いた⁵⁾。これを標準として、誤差を測る。誤差を測る領域を $[0, 1]$ 区間とスリット $[1, 1/k]$ と z -平面の第 1 象限の 3 つに分ける。

- (1) $[0, 1]$ 区間を 100 等分し、101 個の分点における最大誤差を e_1 とする。
- (2) 半円区間 $[1, 1/k]$ を 200 等分し、分点上の最大誤差を e_2 とする。端点 $1/k$ では、折衷するための精度が得られたい。(倍精度演算と約 2 桁の桁の精度)。

(3) z-平面の第1象 $z = re^{i\theta}$ に標本点を次のようにとり, $r = r$ の最大誤差を e_l とする.

$$r = 8^l, \quad l = -22, -21, \dots, 0, 1, \dots, 22$$

$$\theta = \frac{m\pi}{100}, \quad m = 0, 1, \dots, 50.$$

計算結果を表2に示した. $e_j, j=1, 2, 3$ の中で e_2 がつねに最大である. そのための最大誤差は, スリット境界で生じている. 楕円積分 $F(z, k)$ の解析性からすれば当然の結果である. また事前誤差評価も実際の誤差の傾向を表わしている.

表2. 領域ごとの最大誤差

k**2= 1/64				k**2= 1/2					
n	N	e1	e2	e3	n	N	e1	e2	e3
1	1	1.03D-01	1.25D-01	9.87D-02	1	1	7.07D-04	1.30D-03	5.90D-04
1	2	3.93D-03	5.57D-03	3.55D-03	1	2	3.65D-07	1.29D-06	2.52D-07
1	3	1.80D-04	3.09D-04	1.53D-04	1	3	2.58D-10	1.73D-09	1.48D-10
1	4	9.38D-06	1.94D-05	7.55D-06	1	4	2.06D-13	2.63D-12	9.80D-14
1	5	5.26D-07	1.34D-06	4.00D-07	1	5	8.05D-16	5.69D-15	1.17D-15
1	6	3.08D-08	9.51D-08	2.22D-08					
2	1	3.63D-04	4.40D-04	3.45D-04	2	1	2.47D-09	4.54D-09	2.06D-09
2	2	4.53D-08	6.45D-08	4.08D-08	2	2	9.58D-16	2.84D-15	9.79D-16
2	3	7.06D-12	1.22D-11	5.99D-12					
2	4	1.11D-15	2.94D-15	1.40D-15	3	1	8.33D-16	1.99D-15	1.53D-15
3	1	4.05D-09	4.91D-09	3.85D-09					
3	2	8.88D-16	2.48D-15	1.39D-15					
4	1	7.92D-16	1.83D-15	1.20D-15					

k**2=63/64				
n	N	e1	e2	e3
1	1	1.03D-08	4.88D-07	1.88D-09
1	2	1.55D-15	2.97D-13	1.58D-15
2	1	1.11D-15	1.30D-13	9.93D-16

注. n: Landen変換の回数

N: Gauss-Chebyshev則の標本数

6. まとめ. 本論文において, われわれは第1種不完全複素楕円積分を複素Landen変換を用いて全域で一様近似する方法を示した. 計算法は, 次の三点に基づいて得られたものである. 1). 不完全楕円積分の定積分表示. 2) Landen変換のRiemann面への構成. この変換により積分区間上の対数特異点と端点の代数特異点を解消する. 3). Gauss-Chebyshev則の適用とその誤差解析.

最後に数値計算により本方法の有効性を確かめた.

参考文献

- 1) 宇野四郎: 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版, 1970.
- 2) Abramowitz M. and Stegun I. A.: Handbook of Mathematical Functions, Dover Pub., Inc., 1972.
- 3) 二宮亨三: ライブラリー・プログラム利用の手引(数値計算編), 名古屋大学数値計算センター, 1972.
- 4) 林花一, 森口繁一: 高等函数表(第2版), 岩波書店, 1967.
- 5) 竹内端三: 楕円函数論, 岩波書店, 1936.
- 6) 久原秀夫: 複素楕円積分の静電場の意味と対数関数による大域的近似法, 電磁学会-電磁界理論研究会資料, EMT-82-1, 1982.
- 7) 竹内端三: 函数論(新版), 下巻, 裳華房, 1967.
- 8) Byrd P. F. and Friedman M. D.: Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists, Springer-Verlag, 1954.
- 9) 村島定行, 久原秀夫: Riemann面へのゲージ関数の重ね合せによる二次ラプラス方程式の近似解法, 情報処理, 第21巻, 第5号, 1980.
- 10) 森正武: 数値解析と複素関数論, 筑摩書店, 1975.