

誤差関数を扱う数式処理算法の数値計算による実現

横尾英俊 片桐理和 (山形大学 工学部)

1. まえがき

誤差関数(確率積分)は初等関数ではないが、比較的取り扱い易い素直な性質を有し、確率・統計、熱伝導や流体力学では現象の記述に重要な役割を果たすことが多い。そのため、古くからその数表⁽¹⁾が作成され、それらの分野の数値計算で利用されてきている。

しかし、問題によっては、一般的な数値計算法よりも、その性質を積極的に利用した固有の算法の期待できる関数でもある。筆者らは第2節で述べる常微分方程式の解析的な解法を目的に、誤差関数とその周辺関数が数個のパラメータで記述できることに着目し、そのような算法のひとつを構成した⁽²⁾。

しかし、実際にその算法によって本格的な計算を行なうには算法の実現し易い数式処理システムが必要であり、かなり普及したとは言え、数式処理が数値計算ほど身近な存在とは言えない今日、特に最終的に必要な結果が(2.8)式で示される数値であることを考慮して数値計算によって算法を実現することを試みた。そこでは、係数を浮動小数点表現した解析的な形で式を表現し、それに対する解析的な演算に加え、必要に応じて数値積分等の数値計算を利用することができる。その結果、厳密な数式処理的な手法による場合や純粋に数値解析的な手法による場合よりも少ない記憶容量で、しかも両手法の長所を生かして、精度の高い解を得ることができた。

2. 誤差関数と微分方程式

変数 η に関する誤差関数を(2.1)式

で定義し、応用例において重要な繰り返し積分を(2.2)式で定義する。

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (2.1)$$

$$i^j \operatorname{erf} \eta = \int i^{j-1} \operatorname{erf} \eta d\eta, \quad (2.2)$$

$$j = 1, 2, \dots,$$

$$i^0 \operatorname{erf} \eta = \operatorname{erf} \eta.$$

(2.2)式は不定積分によって定義したが、これより得られる漸化式

$$i^j \operatorname{erf} \eta = \frac{1}{2j} (2\eta i^{j-1} \operatorname{erf} \eta + i^{j-2} \operatorname{erf} \eta), \quad (2.3)$$

$$j = 1, 2, \dots,$$

及び

$$i^{-1} \operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-\eta^2) \quad (2.4)$$

とで $i^j \operatorname{erf} \eta$ を定義し直すと、(2.3)式より $\phi_j(\eta) = i^j \operatorname{erf} \eta$ は関数 f についての微分方程式

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2\eta \frac{df}{d\eta} - 2j f = 0 \quad (2.5)$$

を満足することがわかる。(2.5)式にはもうひとつ独立な解として、

$$\phi_j(\eta) = \exp(-\eta^2) \frac{d^j}{d\eta^j} \exp(\eta^2) \quad (2.6)$$

が存在する。但し、現実の物理現象等が(2.5)式のような齊次方程式で記述できることはまれで、例えば、流体力学の境界層理論では次のような境界値問題が知られている。(3)

$$\frac{d^3 f_i}{d\eta^3} + 2\eta \frac{d^2 f_i}{d\eta^2} - 4i \frac{df_i}{d\eta} = R_i(\eta),$$

$$R_i(\eta) = \begin{cases} 0 & i=0, \\ -4 \left\{ 1 - \left(\frac{df_0}{d\eta} \right)^2 + f_0 \frac{d^2 f_0}{d\eta^2} \right\} & i=1, \\ -4 \sum_{j=0}^{i-1} \left\{ f_{i-j-1} \frac{d^2 f_j}{d\eta^2} - \frac{df_{i-j-1}}{d\eta} \frac{df_j}{d\eta} \right\} & i=2, 3, \dots, \end{cases} \quad (2.7)$$

$$f_i(0) = \frac{df_i(0)}{d\eta} = 0 \quad i=0, 1, \dots,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df_0(\eta)}{d\eta} = 1,$$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{df_i(\eta)}{d\eta} = 0 \quad i=1, 2, \dots$$

原問題では特に、表面摩擦応力とよばれる量を算出するために、

$$\frac{d^2 f_i(0)}{d\eta^2} \quad i=0, 1, \dots, \quad (2.8)$$

の値が必要である。

方程式(2.7)は $df_i/d\eta$ に関し2階の常微分方程式であり、良く知られた解法によって、境界値問題の解は以下のように記述することができる。

$$\frac{df_i}{d\eta} = \beta_i h_i(\eta) - g_i(\eta) H_i(\eta) + h_i(\eta) G_i(\eta), \quad (2.9a)$$

$$h_i(\eta) = \sqrt{2^i (2i)!} \phi_{2i}(\eta), \quad (2.9b)$$

$$g_i(\eta) = \frac{1}{2^i \sqrt{2^i (2i)!}} \psi_{2i}(\eta), \quad (2.9c)$$

$$H_i(\eta) = 2^{i-1} \sqrt{\pi} \int_0^\eta R_i(\xi) h_i(\xi) \exp \xi^2 d\xi, \quad (2.9d)$$

$$G_i(\eta) = 2^{i-1} \sqrt{\pi} \int_0^\eta R_i(\xi) g_i(\xi) \exp \xi^2 d\xi, \quad (2.9e)$$

$$\beta_0 = 1, \quad (2.9f)$$

$$\beta_i = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \{ H_i(\eta) - G_i(\eta) \} \quad i=1, 2, \dots. \quad (2.9g)$$

しかし、解は i の増加に伴って長大な式となり、このような計算を手計算によって実行することは困難で、筆者らの知る限りでは、解析的な解が得られているのは $df_2(\eta)/d\eta$ までである。従って、(2.8)式等の算出には、数値計算などの援用が必要となる。次節では、(2.9)式で現われる微積分、極限計算を解析的に行なう算法を示し、それを数値計算によって実現することでこうした量を求めることを試みる。

3. 演算算法

3.1 誤差関数を含む関数の集合

誤差関数を含むより一般的な関数を(3.1)式によって定義し、これを基本形式とよぶ。

$$y(c, l, m, n; \eta) = c \cdot \exp(-l\eta^2) \cdot \eta^m \cdot \operatorname{erf}^n \eta, \quad (3.1)$$

$c = \text{定数}$,

$l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$m, n = 0, 1, 2, \dots$

基本形式の和の作る環を K で表わすと、(3.2)式より K は微分演算に閉じていることがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} y(c, l, m, n; \eta) &= y(-2cl, l, m+1, n; \eta) \\ &+ y(cm, l, m-1, n; \eta) \\ &+ y\left(\frac{2cn}{\sqrt{c}}, l+1, m, n-1; \eta\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

又、前節で導入した関数については、明らかに、

$$\phi_j(\eta), \psi_j(\eta) \in K, \quad j=0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

が成立する。

K は積分については閉じてはいないが、 K 上で表現できない場合のみを、

$$\text{INT}(l, m, n; \eta) = \int_0^\eta y(l, m, n; \xi) d\xi \quad (3.4)$$

と表わし、これを積分形式とよぶことにする。例えば、

$$\begin{aligned} \text{erf} \sqrt{l} \eta &= 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \int_0^\eta \exp(-l\xi^2) d\xi, \\ l &= 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

は K の元ではなく、積分形式によって次のように表現される。

$$\text{erf} \sqrt{l} \eta = 2\sqrt{\frac{l}{\pi}} \cdot \text{INT}(l, 0, 0; \eta). \quad (3.5)$$

そして、(3.2)式を変形することによって、任意の基本形式の不定積分を基本形式と積分形式との線型結合で表現する再帰算法が得られる。即ち、

$$\begin{aligned} &\int_0^\eta y(c, l, m, n; \xi) d\xi \\ &= \text{function integral}(c, l, m, n; \eta); \\ &\quad \text{if } c=0 \text{ then } 0 \\ &\quad \text{else if } m=0 \wedge l \neq 0 \text{ then} \\ &\quad \quad \text{if } l=1 \text{ then} \\ &\quad \quad \quad y\left(\frac{\sqrt{c}}{2(n+1)}, l-1, m, n+1; \eta\right) \\ &\quad \quad \text{else } c \cdot \text{INT}(l, m, n; \eta) \\ &\quad \text{else if } l=0 \text{ then} \\ &\quad \quad y\left(\frac{c}{m+1}, 0, m+1, n; \eta\right) \\ &\quad \quad - \text{integral}\left(\frac{2cn}{\sqrt{c}(m+1)}, 1, m+1, n-1; \eta\right) \\ &\quad \text{else } y\left(-\frac{c}{2l}, l, n-1, n; \eta\right) \\ &\quad \quad + \text{integral}\left(\frac{(m-1)c}{2l}, l, m-2, n; \eta\right) \\ &\quad \quad + \text{integral}\left(\frac{nc}{\sqrt{c}l}, l+1, m-1, n-1; \eta\right) \\ &\text{end;} \end{aligned} \quad (3.6)$$

この算法が任意の基本形式に対し実際に評価可能であることは容易に確認できる。さらに、重要な点は基本形式の不定積分を、

「互いに異なる積分形式 S_i と $C_i \in K$ $i=1, 2, \dots, N$ に対し、

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + \dots + C_N S_N \in K$$

となる必要十分条件は

$$C_i = 0, \quad 1 \leq i \leq N.$$

という意味で K 上で独立な積分形式に展開しているという点である。従って、任意の K の元に対し、 K 上で表現可能な不定積分はこの算法だけで求めることができる。今後は、積分形式と言え、この算法の結果現われるものだけをさすことにする。

(例)

$$f(\eta) = f_1(\eta) + f_2(\eta),$$

$$f_1(\eta) = 3\pi \exp(-2\eta^2) \eta \operatorname{erf}^2 \eta,$$

$$f_2(\eta) = -4\sqrt{\pi} \exp(-\eta^2) \eta^2 \operatorname{erf}^3 \eta,$$

とすると、算法 integral によって

$$\int f_1(\eta) d\eta = -\frac{3}{4}\pi \exp(-2\eta^2) \operatorname{erf}^2 \eta + 3\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{INT}(3, 0, 1; \eta),$$

$$\int f_2(\eta) d\eta = 2\sqrt{\pi} \exp(-\eta^2) \eta \operatorname{erf}^3 \eta - \operatorname{erf}^4 \eta + \frac{3}{4}\pi \exp(-2\eta^2) \operatorname{erf}^2 \eta - 3\sqrt{\pi} \cdot \operatorname{INT}(3, 0, 1; \eta),$$

と求まり、その結果

$$\int f(\eta) d\eta = 2\sqrt{\pi} \exp(-\eta^2) \eta \operatorname{erf}^3 \eta - \operatorname{erf}^4 \eta$$

が得られる。

次に、基本形式と積分形式とから、加算と乗算によって作られる関数の集合を G で表わすと、 K は G の部分環となる。特に、 G の元のうち、

$$f(\eta) = \prod_{j=0}^{\mathcal{L}} g_j(\eta), \quad (3.7)$$

$$g_0(\eta) = \text{基本形式},$$

$$g_j(\eta) = \text{積分形式}, \quad j=1, 2, \dots, \mathcal{L}$$

と表現されるものを (G 上の) 項とよび、 \mathcal{L} を f の積分因子数とよぶことにする。($g_j(\eta)$ は 2 節の $g(\eta)$ とは無関係である。) つまり、基本形式は積分因子数が 0 の項であり、積分形式は積分因子数が 1 の項である。一般の G の元はいくつかの項の和として表現される。

3.2 G 上の微積分

G の元の微分がまた G の元となることは自明で、その算法も特に考慮を必要としない。

一方、項 (3.7) の不定積分は、

$$G_0(\eta) \equiv \int g_0(\eta) d\eta \quad (3.8)$$

を求め、 c を定数として、

$$g_j(\eta) = c \cdot G_0(\eta), \quad j=1, 2, \dots, \mathcal{L}$$

の場合には、

$$\int f(\eta) d\eta = \frac{1}{c(\mathcal{L}+1)} \{c \cdot G_0(\eta)\}^{\mathcal{L}+1} \in G$$

と容易に求まり、その他の場合には、言わゆる部分積分

$$\int f(\eta) d\eta = G_0(\eta) \prod_{j=1}^{\mathcal{L}} g_j(\eta)$$

$$- \int G_0(\eta) \frac{d}{d\eta} \prod_{j=1}^{\mathcal{L}} g_j(\eta) d\eta \quad (3.9)$$

を繰り返すことで求めることができる。但し、 $G_0(\eta) \notin K$ ならば、(3.9) は G 上で表現できないことが証明⁽²⁾ できるので、この判定と部分積分とを再帰的に使うことで、 G 上での表現不可能性を含めた最終的な結果を得ることができ。さらに、 $g_0(\eta)$ が一般の K の元の場合にも、この手法の拡大適用が可能である。

3.3 極限操作

(2.99) における β_i の算出では、正の無限大に対する極限操作が必要になる。

$$\operatorname{erf} \infty = 1$$

であるので、項が次のような場合には

極限值が自明な有限確定値として存在する。

(i) 基本形式

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} y(c, l, m, n; \eta) = \begin{cases} 0 & l > 0, \\ c & l = m = 0. \end{cases}$$

(ii) 積分形式

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \text{INT}(l, 0, 0; \eta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{l}},$$

$l = 2, 3, \dots$

(iii) その他の項

構成因子の基本形式、積分形式が全て (i) (ii) の場合にそれぞれの積。

上記以外の η の元については、多くの場合、各項を構成する因子のうちで上記の自明な有限確定値を有するものについてその極限值でそれを置き換え、そこで再び式としての和をとることで極限值を求めることができる。

$i \geq 3$ の場合には、このような扱いだけでは対処しきれない項が現われてくる。ここで行なう極限操作は境界条件に応じて定数を決定する演算であり、一般には、定数決定までも数式処理的に行なうことは容易ではない。本論文の手法では、このような場合に数値積分等を用い、純粋な数式処理の不備を補うことができる。

3.4 数値計算による実現

以上述べたように、2節の問題は l, m, n 等のパラメータとその構造を記述する情報によって表現できる。特に、係数を浮動小数点表現すれば、問題を完全に数値演算だけに帰着することができる。しかし、そうした場合、係数が数学的に零か否かを判定する問題が生じてくる。例えば、恒等的には零でない項 $f(\eta)$ に対し、 $c = 0$ の場合に

$cf(\eta)$ が零となるにもかかわらず、数値計算的に非零と判断されると、単なる誤差が構造的に増幅されてしまう危険性がある。

本論文では、零でない項同士の間算では、加算の場合にのみ零となる可能性があり、乗算では生じ得ないという制限つきで、係数1の項 $f(\eta)$ に対し、

$$|c| < \delta \text{ なら } cf(\eta) \equiv 0 \quad (3.10)$$

とするようにした。 δ の選び方が結果にどう影響するかについては次節で述べる。

4. 解と検討

4.1 δ の選択と誤差の評価

前節で述べた手法をFORTRAN上で実現し、係数を倍精度実数で表わし、第2節であげられた境界値問題の求解を行なった。なお、本小節の計算は、誤差の影響を見易くするために、4.2節で述べる最終結果算出の計算よりも精度の低い計算によって実行した。

まず、(3.10)の δ の影響を(2.29g)の β_i によって検討してみる。境界値問題に解が存在するなら β_i は有限確定値として求まるはずであり、一方、そこまでの計算で数値計算の誤差による構造的な誤りが発生していれば、 β_i を有限確定値として定めることができなくなる可能性があるからである。

実際、 $i = 2$ では、図1に示すように δ を変化させて β_2 を算出すると、

$$0.0000044 < \delta < 0.0018 \quad (4.1)$$

では、

$$\beta_2 = -0.9328$$

が得られるのに対し、 δ がこれより小さいところでは β_2 を有限確定値として

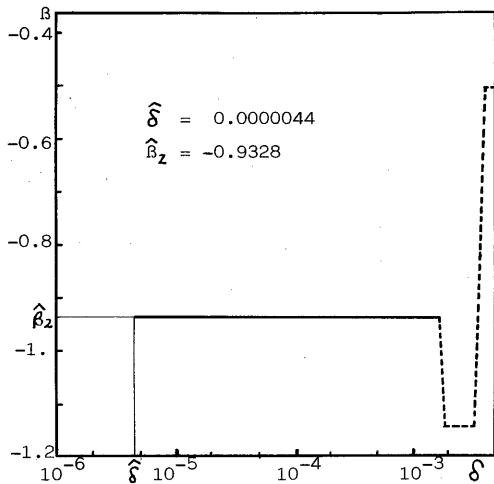


図1. δ を変化させて得られる β_2 の値.

求めることができなくなる。又、これより大きい場合には、値が得られても図のように振動的になる。

一般に、(3.10)によって判定を行なう際に含まれる誤差の絶対値を ε とすると、 δ を

$$\varepsilon < \delta < 1 \quad (4.2)$$

の範囲に選べば構造的な誤りの生じる可能性はない。これはごく当然のことであるが、逆に δ を変化させ結果を検討すれば、誤差のおよその評価ができることを意味する。今の場合、(4.1)と(4.2)とから、係数に含まれる誤差は

$$\varepsilon = 0.0000044$$

程度であることがわかる。さらに、(2.8)式を算出するために $d^2 f_2(\eta)/d\eta^2$ を求めると、ほとんどの項は $\eta = 0$ で零となる項であるので、(2.8)式に含まれる誤差は係数に含まれる誤差と同程度か、高々数倍程度であることが予想できる。実際、

$$\frac{d^2 f_2(0)}{d\eta^2} = -0.2480957 \quad (4.3)$$

と求まって、真の値(4.2節参照)との差が ε 程度になり、この評価の合理性が確認できる。

なお、係数表現の精度を高めれば、このような誤差の改善が期待できることは言うまでもない。次に述べる結果は、以上述べたものより高い精度の計算で得たものである。

4.2 解

実際に解を求めた一例を付録に示す。又、表1には、 $i=1, 2, 3$ の場合の(2.8)式の値をあげた。比較のために本論文で述べた算法を純粋に数式処理的に実現⁽²⁾して得た厳密な値と、筆者のひとりが(4.4)~(4.7)式が成立することを利用して、各式を Simpson 則によって数値積分することで得た値⁽⁴⁾とを併せて示す。以下の式は、誤差関数が陽に現われないので、数値計算上取り扱い易い表現となっている。

$$\frac{df_i}{d\eta} = \hat{g}_i(\eta) \left\{ \int_0^\eta E(\xi) \int_0^\xi \exp \theta^2 \hat{g}_i(\theta) R_i(\theta) d\theta d\xi - \frac{F(\eta)}{F(\infty)} \int_0^\infty E(\eta) \int_0^\eta \exp \xi^2 \hat{g}_i(\theta) R_i(\theta) d\xi d\eta \right\}, \quad (4.4)$$

$$f_i(\eta) = \int_0^\eta \frac{df_i(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (4.5)$$

$$E(\eta) = \frac{\exp(-\eta^2)}{\hat{g}_i(\eta)^2}, \quad (4.6)$$

$$F(\eta) = \int_0^\eta E(\xi) d\xi, \quad (4.7)$$

$$\hat{g}_i(\eta) = \frac{1}{2^i} \psi_{2i}(\eta).$$

手法	$i=1$	$i=2$	$i=3$
厳密解	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{4}{3\pi} + 1 \right)$	$\frac{1}{3\sqrt{\pi}} \left(-\frac{324}{5\sqrt{3}\pi} - \frac{256}{45\pi^2} + \frac{89}{5\pi} + \frac{11}{2} \right)$	得られていない
本論文の手法	1.6072781	-0.2480919	-0.0142917
数値積分法	1.607287	-0.248086	-0.014293

表1. 各手法で得られた $\frac{d^2 f_i(0)}{d\eta^2}$ の値.

表1からもわかるように、本論文で述べた手法は数式処理的な厳密さを有しているので、一般的な数値計算による場合より結果の精度が高いのは当然であるが、より重要な長所は4.1節で述べたように誤差の範囲をかなり具体的に推定できるという点にある。さらに、結果を関数そのものによって表現しているので、精度を上げようとしたときに必要となる記憶容量の増加は関数各点の値を数値によって表現している場合ほど爆発的ではない。ただし、純粋の数値計算では問題の規模を制御することができるが、本手法ではそれが問題固有の自由度によって決まってしまうので、 i の増加とともに増す計算の複雑度を制御することは困難である。

5. おまじ

本論文では、演算子

$$D_j = \frac{d^2}{d\eta^2} + 2\eta \frac{d}{d\eta} - 2j,$$

$$j = 0, 1, \dots,$$

で記述される問題に対し、係数を浮動小数点表現した解析解算出を数値計算によって実現する手法を、ひとつの例題にそって述べた。本手法は誤差関数の特定の形のみを扱い、しかも、特定の微分方程式を解くために導入したもので適用範囲が広いとは言えない。し

かし、このような問題は、本論文であげた例のほかにも種々知られており、これまで、手計算か全くの数値計算に依らざるを得なかったことを考えると、その意義は大きいと言える。又、本手法による解は数値計算による解ではあるが、言わゆる数値解と異なり解析的な構造を知ることの可能な表現となっているので、これまで余り問題とされなかった解の表現可能な範囲等を検討あるいは検証するための材料とすることができると。そのためには、本論文では立ち入った議論を行なわなかった環 K , G の理論的意義等をより明確にする必要がある。

なお、4.1節の計算は本学 OKITAC 50/40, 4.2節の計算は東北大学大型計算機センター ACOS-1000 による。

文献

1. Encke, "Method of Least Squares," *Astronomisches Jahrbuch*, Berlin, 1834.
2. 横尾, 小坂, 片桐, 「誤差関数とその周辺関数の数式処理と応用」, 情報処理学会論文誌に掲載予定.
3. H. Schlichting, "Boundary Layer Theory," Pergamon Press, London, 1955.
4. M. Katagiri, "Unsteady Magnetohydrodynamic Flow at the Forward Stagnation Point," *J. Phys. Soc. Japan*, vol.27, pp.1662-1668, 1969.

付録 (4.2節参照)

$$f_3(\eta) = A_1(\eta) + A_2(\eta) \int_0^\eta \exp(-2\xi^2) \operatorname{erf} \xi d\xi + A_3(\eta) \int_0^\eta \exp(-3\xi^2) \operatorname{erf} \xi d\xi + A_4(\eta) \int_0^\eta \exp(-2\xi^2) \operatorname{erf}^2 \xi d\xi$$

$$A_i(\eta) = \sum C \cdot \exp(-l\eta^2) \cdot \eta^m \cdot \operatorname{erf}^{n_1} \eta \cdot \operatorname{erf}^{n_2} \sqrt{2}\eta \cdot \operatorname{erf}^{n_3} \sqrt{3}\eta \cdot \operatorname{erf}^{n_4} \sqrt{4}\eta$$

とすると下表のようになる。

C	l	m	n ₁	n ₂	n ₃	n ₄
A₁(η)						
-0.168619	0	0	0	0	0	0
-0.004267	4	5	0	0	0	0
0.024472	4	3	0	0	0	0
-0.063197	4	1	0	0	0	0
-0.427683	3	0	1	0	0	0
-2.022357	3	2	1	0	0	0
-0.865879	3	4	1	0	0	0
-0.098956	3	6	1	0	0	0
-0.121585	3	3	0	0	0	0
-0.299460	3	1	0	0	0	0
0.435301	3	0	0	0	0	0
0.404041	3	2	0	0	0	0
0.173159	3	4	0	0	0	0
0.016915	3	6	0	0	0	0
0.614621	2	1	1	0	0	0
-0.615036	2	1	0	0	0	0
0.960239	2	1	2	0	0	0
0.077874	0	2	0	0	0	0
-0.060635	0	4	0	0	0	0
0.310192	1	3	0	0	0	0
0.910895	1	1	0	0	0	0
-0.043491	0	0	1	0	0	0
0.397818	0	4	1	0	0	0
1.040826	0	2	1	0	0	0
-0.151135	1	3	1	0	0	0
-0.760713	1	1	1	0	0	0
0.254486	0	0	2	0	0	0
-0.295599	2	0	0	0	0	0
-0.056846	2	2	0	0	0	0
-0.089293	0	4	2	0	0	0
-0.375032	0	2	2	0	0	0
0.282943	1	3	2	0	0	0
0.848828	1	1	2	0	0	0
-0.094032	2	0	3	0	0	0
0.558716	2	0	1	0	0	0
0.199542	2	2	1	0	0	0
0.125376	0	4	3	0	0	0
0.376126	0	2	3	0	0	0
0.003067	0	7	0	0	0	0
-0.359654	0	5	0	0	0	0
-0.899136	0	3	0	0	0	0
-0.085086	0	7	1	0	0	0
-0.048004	1	6	0	0	0	0
-0.186915	1	4	0	0	0	0
-0.497251	1	2	0	0	0	0
0.028916	1	0	0	0	0	0
-0.368465	0	5	1	0	0	0
-0.921162	0	3	1	0	0	0
-0.238916	0	1	1	0	0	0
0.414636	1	4	3	0	0	0
1.023604	1	2	3	0	0	0
-0.372765	1	0	3	0	0	0
0.319828	2	3	2	0	0	0
0.038095	0	7	4	0	0	0
0.085972	1	6	3	0	0	0
0.072757	2	5	2	0	0	0
0.200000	0	5	4	0	0	0

0.500000	0	3	4	0	0	0
0.266167	1	4	1	0	0	0
0.073943	1	2	1	0	0	0
-0.903960	1	0	1	0	0	0
0.039717	2	3	0	0	0	0
0.055435	0	7	2	0	0	0
0.062552	1	6	1	0	0	0
0.017646	2	5	0	0	0	0
0.346993	0	5	2	0	0	0
0.867482	0	3	2	0	0	0
0.722762	0	1	2	0	0	0
-0.251295	1	4	2	0	0	0
-0.038262	1	2	2	0	0	0
2.513293	1	0	2	0	0	0
-0.102195	2	3	1	0	0	0
-0.009044	0	7	3	0	0	0
-0.015307	1	6	2	0	0	0
-0.008636	2	5	1	0	0	0
-0.189922	0	5	3	0	0	0
-0.474804	0	3	3	0	0	0
0.356103	0	1	3	0	0	0
-0.807563	0	1	0	0	0	0
1.126307	0	0	0	1	0	0
-0.180604	1	0	0	1	0	0
0.649439	0	0	1	1	0	0
0.341979	1	1	0	1	0	0
0.606143	0	2	1	1	0	0
-1.031681	0	2	0	1	0	0
0.270906	2	0	0	1	0	0
-0.212769	0	0	2	1	0	0
0.720253	1	1	1	1	0	0
0.425538	0	2	2	1	0	0
-0.279949	0	0	0	0	1	0
0.039665	1	6	0	0	1	0
0.070304	0	7	1	0	1	0
1.135153	0	5	1	0	1	0
2.837885	0	3	1	0	1	0
-0.373265	0	4	0	0	1	0
-1.119795	0	2	0	0	1	0
0.922746	0	1	1	0	1	0
-0.839824	1	0	0	0	1	0
1.030673	1	2	0	0	1	0
0.601942	1	4	0	0	1	0
0.681546	0	1	0	0	1	0
1.363093	0	3	0	0	1	0
0.545237	0	5	0	0	1	0
0.051927	0	7	0	0	1	0
0.905130	0	0	0	0	0	1
A₂(η)						
-9.443797	0	0	0	0	0	0
-1.309618	0	0	1	0	0	0
A₃(η)						
-9.596224	0	1	0	0	0	0
-19.192449	0	3	0	0	0	0
-7.676979	0	5	0	0	0	0
-0.731141	0	7	0	0	0	0
A₄(η)						
4.338093	0	0	0	0	0	0