数 値 解 析 18－3
（1986. 10. 4）

境界要素ガラーキン法について

榊原 道夫
（岡山理科大学・理学研究科）

本報告では，線形偏微分方程式の数値解法の一つである境界要素ガラーキン法(BEG method)についての考察を行う．Brebbia, Walker らによってまとめられた境界要素法は問題とする線形偏微分方程式 の基本解およびGreenの定理を用いて定式化された境界上の積分方程式を有限要素コロケーション法により離散化するアルゴリズムである．BEG 方程式の導出は境界上の積分方程式をガラーキン境界要素法により離散化する方法および誤差評価をしめす．また従来，よく知られている代用電荷法のガラーキン的な離散化がBEG法の特別な場合として議論できることをしめす．

ON THE GALERKIN BOUNDARY METHOD

Michio SAKAKIHARA
The Graduate School of Science, Okayama University of Science,
Ridai-cho 1-1, Okayama 700, JAPAN.

In this paper we consider a numerical method for linear elliptic partial differential equations subject to the Dirichlet boundary condition. This method is called the boundary method which includes the boundary element Galerkin method and related methods. Existence and convergence for these methods are discussed. With the numerical results the rate of convergence is also discussed.

1．まえがき

線形偏微分方程式 のディリクレ境界値問題

$$-\Delta u + u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \Gamma \tag{1.1}$$

および

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad u = g \quad \text{on } \Gamma \tag{1.2}$$

の境界要素ガラーキン法について議論する．ここでΩは有界閉領域でありΓはその境界である．また△はラプラシアンおよびgはディリクレ・データーである．境界要素ガラーキン解は

$$a(q, q') = b(g, q') \quad \text{for all } q' \in H^{-1/2}(\Gamma) \tag{1.3}$$

を満足する． $a(\cdot, \cdot)$ は $H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ 双線形系であり $b(\cdot, \cdot)$ は $H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)$ 双線形系である．境界要素ガラーキン方程式の解の存在を証明するためには双線形系 $a(\cdot, \cdot)$ の楕円性を示さなければならない．証明の方法としてNedelec,Planchard[1]の研究，Wendland[2]の研究およびOkamoto[3]の研究が存在する．それらは境界上の特異積分方程式に対する双線形系の楕円性を示したものである．ところで方程式(1.1)および(1.2)の境界法として代用電荷法が存在する[4]．本報告では特異積分を有する場合および特異積分を有しない代用電荷法の場合を統一的に表現できる定式化をしめす．代用電荷法の数学的研究はあまり見あたらないようである．代用電荷法は1969年Steinbiglerの学位論文においてまとめあげられている．しかしその方法に対する解の存在性および近似解の収束性についてはいまだ検討の余地がある．本報告で示される総ての議論は代用電荷法の場合を含む． 本議論はBabuska[5]によってしめされたいくつかの定理に基礎を置く．[5]において示された定理は問題(1.1)に対してしめされているだけで問題(1.2)に対する拡張が必要となる．問題(1.2)に対する[5]中の定理と類似な定理は第3節においてしめされる．また近似解の収束性については第4節において示されるであろう．また H^1 評価が与えられる．第5節においては数値例を示し，また数値結果より数値解の収束性を考察する．

2．境界要素ガラーキン法

境界値問題(1.1)に対する境界要素ガラーキン法の定式化を示す．問題(1.1)はソボレフ空間 $H^1(\Omega)$ において一意な弱解が存在する．またノイマン問題

$$-\Delta u + u = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \qquad \partial u / \partial n = \lambda \quad \text{on } \Gamma \tag{2.1}$$

の弱解 が一意に存在する．ここでnは外向き法線方向をあらわす． すなわち $u \in H^1(\Omega)$ で汎関数

$$\int_\Omega \left\{ \sum \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + u v \right\} d\Omega = \oint_\Gamma \lambda v \, d\Gamma \qquad \text{for all } v \in H^1(\Omega) \tag{2.2}$$

を満足するものが存在する．式(2.2)に対してGreenの定理を適用することにより，我々は

$$\int_{\Omega}\{-\Delta v+v\}u\,d\Omega=\oint_{\Gamma}\lambda v\,d\Gamma-\oint_{\Gamma}u(\partial v/\partial n)\,d\Gamma \quad (2.3)$$

を得る．ところで問題(1.1)および(2.1)はそれぞれ一意な解を有するのであるから，もし問題(1.1)の解のノイマン・データが問題(2.1)のノイマン・データλに一致しているならば，最大値原理より問題(1.1)の解と問題(2.1)の解は同一である．そのことより，ディリクレ問題(1.1)に対するノイマン・データは一意に存在する．そこでvとして

$$v(x)=\oint_{\Gamma}G(x,y)\phi(y)\,d\Gamma_y \qquad \phi\in H^{-1/2}(\Gamma) \quad (2.4)$$

により構成されるものを考えよう．ここでG(x, y)は基本解で

$$-\Delta G(x,y)+G(x,y)=\delta(x,y)$$

を満足するものである．またδ(x, y)はディラックのデルタ関数である．２次元および３次元の場合G(x, y)はそれぞれ

$$G(x,y)=(1/(2\pi))K_0(|x-y|),$$
$$|x-y|^2=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2 \quad ,$$

$$G(x,y)=(1/(4\pi))\exp[-|x-y|]/|x-y|,$$

$$|x-y|=(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2,$$

である．ここで$K_0(a)$は第２種変形ベッセル関数である．(2.4)により構成されるvは $-\Delta v+v=0$ を満足する．それゆえ，我々は(2.4)により構成されるvを(2.3)へ適用することにより

$$\begin{aligned}&\oint_{\Gamma}\oint_{\Gamma}G(x,y)\phi(y)\lambda(x)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\\ &=\oint_{\Gamma}\mathrm{p.v.}\oint_{\Gamma}(\partial G(x,y)/\partial n)\phi(y)u(x)\,d\Gamma_y\,d\Gamma_x\\ &+(1/2)\oint_{\Gamma}u(x)\phi(x)\,d\Gamma_x \end{aligned} \quad (2.5)$$

を得る．(2.4)にトレース作用素 $\gamma: H^1(\Omega)\to H^{1/2}(\Gamma)$ および $\delta: H^1(\Omega)\to H^{-1/2}(\Gamma)$ を適用することにより

$$\gamma v(x)=\oint_{\Gamma}G(x,y)\phi(y)\,d\Gamma_y \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned}\delta v(x)&=\mathrm{p.v.}\oint_{\Gamma}(\partial G(x,y)/\partial n)\phi(y)\,d\Gamma_y\\ &+(1/2)\phi(x)\end{aligned} \quad (2.7)$$

となることより明かである．(1.1)のようなディリクレ問題を考えるとき(1.3)のa（・，・）は(2.5)の左辺でありb（・，・）は(2.5)の右辺である．
(2.6)および(2.7)には特異積分が現れるが代用電荷法のように特異性を問題とする領域の外部に回避するアルゴリズムは(2.4)の代わりにv（x）を

$$v(x)=\oint_{\Gamma'} G(x,y)\,\phi(y)\,d\Gamma'_y \qquad \phi\in H^{-1/2}(\Gamma') \qquad (2.8)$$

により構成されるものを用いることにより，同様に定式かすることができる（図１参照）．ここでΓ’は領域Ωを含む閉曲線（２次元の場合）である．

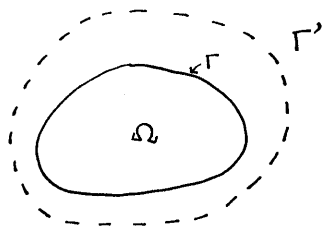

図１モデル領域

問題(1.2)に対しても同様に定式化できる．一方，内部解uは基本解を用いて

$$u(x)=\oint_{\Gamma} G(x,y)\,\lambda(y)\,d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} (\partial G(x,y)/\partial n)\,g(y)\,d\Gamma_y \qquad (2.9)$$

により求める．代用電荷の定式化は(2.8)式において$\phi(y)=\delta(y-y_i)$と置くことにより得られる．

3．可解性

第２節において得られた境界上の双線形系a（・，・）の楕円性を証明するこたができるならば問題(1.1)から導出された変分問題(1.3)が一意可解であることがLax-Mil gramの定理[7]より示される．双線形系a（・，・）の楕円性を証明するために筆者はBabuska[5]が示したいくつかの定理を述べる．Babuskaの示した定理は偏微分方程式$-\Delta u+u=0$にたいしてであり，筆者は偏微分方程式$-\Delta u=0$に対して同様な定理が成立することを本節において示す．また簡単のためにソボレフ・ノルムを

$$\|\cdot\|_{p,\Omega}\equiv\|\cdot\|_{H^p(\Omega)}, \qquad \|\cdot\|_{p,\Gamma}\equiv\|\cdot\|_{H^p(\Gamma)}$$

いまu∈G（Ω）⊂H¹（Ω）

$$\int_\Omega \left\{ \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + uv \right\} d\Omega = 0 \qquad \text{for all } v\in H^1_0(\Omega)$$

により定義する．そのとき次の定理が成立する．

定理１（[5]Theorem 2.3）：$u\in G(\Omega)$．そのとき$\partial u/\partial n\in H^{-1/2}(\Gamma)$で不等式

$$\|\partial u/\partial n\|_{-1/2,\Gamma}\leq C_0\|u\|_{1,\Omega}$$

を満足するような正定数C_0が存在する．■

定理２（[5]Theorem 2.7）：$g\in H^{-1/2}(\Gamma)$，uをノイマン問題

$$-\Delta u+u=0\quad \text{in}\quad \Omega,\qquad \partial u/\partial n=g\quad \text{on}\ \Gamma$$

の弱解としよう．そのとき

$$C_1\oint_\Gamma g\,u\,d\Gamma\leq \|g\|^2_{-1/2,\Gamma}\leq C_2\oint_\Gamma g\,u\,d\Gamma$$

となるような正定数$0<C_1<C_2<\infty$が存在する．■

定理１，２と同様な定理が$-\Delta u=0$に対しても成立ち，次のようになる．

定理３：$u\in Q(\Omega)\subset H^1(\Omega)$，ここで$Q(\Omega)=\{u\in H^1(\Omega):-\Delta u=0\ \text{in the weak sense}\}$，としよう．そのとき$\partial u/\partial n$が存在して

$$\|\partial u/\partial n\|_{-1/2,\Gamma}\leq C_0\|u\|_{1,\Omega}$$

となるような正定数C_0が存在する．■

定理４：$g\in H^{-1/2}(\Gamma)$，uをノイマン問題

$$-\Delta u=0\quad \text{in}\quad \Omega,\qquad \partial u/\partial n=g\quad \text{on}\ \Gamma$$

の弱解$u\in H^1(\Omega)/R$しよう．そのとき

$$C_1\oint_\Gamma g\,u\,d\Gamma\leq \|g\|^2_{-1/2,\Gamma}\leq C_2\oint_\Gamma g\,u\,d\Gamma$$

となるような正定数$0<C_1<C_2<\infty$が存在する．■

定理２，４より次の定理を得る．

定理５：問題(1.1)および(1.2)より導出される双線形々式$a(\cdot,\cdot)$は$H^{-1/2}$－ellipticである．すなわち不等式

$$a(q,q)\geq \gamma\|q\|^2_{-1/2,\Gamma}$$

を満足する定数γが存在する．■

４．離散化および収束性

本節においては離散系の導出および近似解の収束性について議論する．ただしここでの議論は数値積分による誤差については考えず，補間に対する誤差の評価をしめす．実際のプログラムでは$v(x)$の計算において数値値積分を用いる場合と解析的に係数行列を求める場合がある．本節の評価は後者の場合に対応するとおもわれる．問題とする領域Ωの境界Γを境界要素Γ_iにより分

割する．それぞれの要素上において多項式の形状関数により未知関数は近似される．いま$q \in H^{-1/2}(\Gamma)$であるから，最も簡単な形状関数として階段関数による近似が考えられる．qの近似関数qhとして

$$qh = \sum_{i=1}^{N} q_i b_i(x), \quad b_i(x) = 1 \text{ for } x \in \Gamma_i, \quad b_i(x) = 0 \text{ otherwise}$$

を考えよう．ここでq_iは要素中央の節点上の値でる（図２参照）．

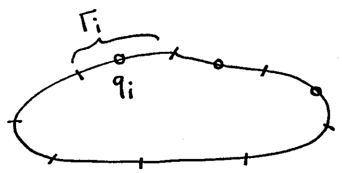

図２．境界要素モデル

b_iを(2.5)に適用することにより

$$a(qh, b_j) = \left\langle \sum_i q_i \oint_\Gamma G(x,y)\, b_i(y)\, d\Gamma_y,\ b_j(x) \right\rangle$$
$$\doteq \left\langle \text{p.v.}\oint_\Gamma (\partial G(x,y)/\partial n)\, g(y)\, d\Gamma_y + (1/2)\, g(x),\ b_j(x) \right\rangle \qquad (4.1)$$

を得る．ここで<・，・>は境界上のxについてのL^2－内積を表す．(4.1)より代数方程式

$$Aq' = r, \quad q' = \{q_1, \cdots, q_N\}^T, \quad r = \{r_1, \cdots, r_N\}^T$$

r_iは(4.1)の右辺より得られる．行列Aの成分は

$$a_{ij} = \left\langle \oint_\Gamma G(x,y)\, b_i(y)\, d\Gamma_y,\ b_j(x) \right\rangle \qquad (4.2)$$

である．

定理６：hを境界要素の要素サイズとしよう．そのとき行列Aは，任意のhにたいして正値行列である．すなわち不等式

$$a(qh, qh) \geq \gamma' \| qh \|^2_{-1/2,\Gamma}$$

を満足する正定数γ'が存在する．■

$G(\Omega)$の部分空間Fhおよび境界上の分布(distribution)Shを考えよう．

そのとき対(Fh, Sh)が任意の$v \in G^p(\Omega)$ $[G^p(\Omega) = G(\Omega) \cap H^p(\Omega)]$に対してvh∈Fhが存在して

$$\gamma(v - vh) \perp Sh, \quad \| v - vh \|_{1,\Omega} \leq C h \| v \|^{k-1}_{k,\Omega},$$

ここで$2 \leq k \leq p$，を満足するとき対(Fh, Sh)はオーダーpの制限近似性

質(RAP)を持つと定義する．もし$v \in H^1(\Omega)$かつ$F_h \subset H^1(\Omega)$ならば対はオーダーpの近似性質(AP)を持つと言われる．
補題1：Fhを基底

$$v_i(x) = \oint_\Gamma G(x, y)\lambda_i(y)\,d\Gamma_y - \oint_\Gamma (\partial G(x, y)/\partial n)\phi_i(y)\,d\Gamma_y \tag{4.3}$$

により構成されるものとしよう．ここでλ_iはϕ_iをディリクレ・データとした場合の問題(1.1)の解のノイマン・データである．またShを境界要素により構成された$H^{1/2}(\Gamma)$の有限部分空間としよう．そのとき，そのように構成される対(Fh,Sh)はRAPを持つ．■
空間Shがオーダーqの弱近似性質(WAP)を持つというのは，正定数Cが存在して

$$\sup_{\phi \in F_{h0},\ \|\phi\|_{1,\Omega} \leq 1} \|\gamma\phi\|_{-s,\Gamma} \leq C h^{s+1/2} \quad \text{for } 0 \leq s \leq q,$$

ここで$\gamma\phi\ (\in F_{h0}) \perp S_h$，を満足するときである．
定理7：対(Fh,Sh)がオーダーpのRAPを満足し，Shがオーダーp-3/2のWAPを満足すると仮定する．また問題(1.1)の解uが$H^p(\Omega)$に属しているとしよう．そのとき境界要素ガラーキン解uhに対して評価

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h^{p-1} \|u\|_{p,\Omega},$$

が成立する．■

5．数値例

上記した抽象的な議論の検討のために問題(1.2)において境界条件を図3に示された例題を取り上げる．

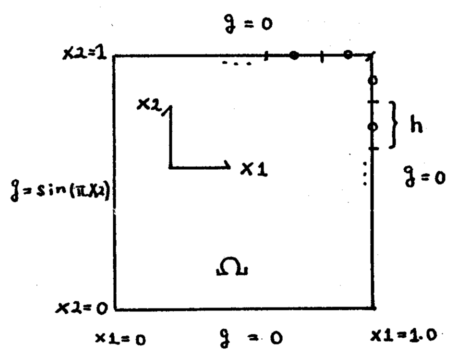

図3．　モデル問題の領域および境界条件．

この例題に対して点x1=0．5，x2=0．5での境界要素解の収束性を図4に示す．図4において与えられた数値例はBrebbia and Walker[6]において示された一定要素に対するプログラムにより計算されている．そのプログラムで用いられているアルゴリズムは式(4.1)のxについての積分を中点則により近似した場合に対応する．図4から数値解が2次の精度を有することが解る．

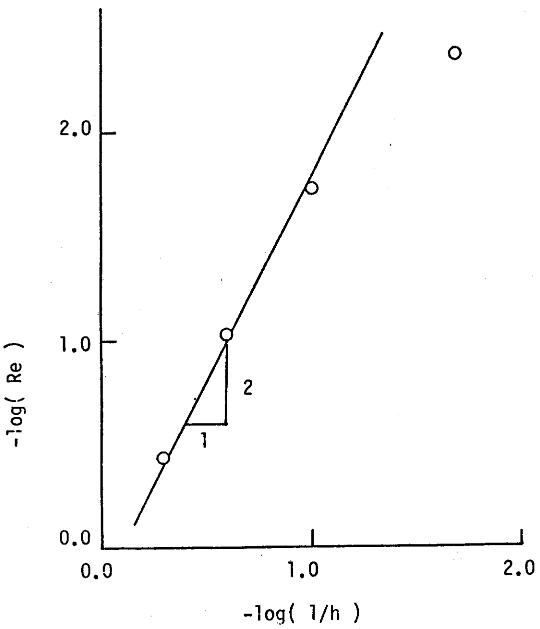

図4. 数値解の収束性

Re=|u-uh|/|u|

6. まとめ

境界要素ガラーキンの定式化およびその可解性を示した。また第4節においてH^1評価を与えた。 本議論は代用電荷法のガラーキン的離散化の場合をも含む。また境界上のガラーキン方程式(4.1)に中点則 を適用し最終的に得られる離散化方程式は，一定要素を用いた境界要素法の離散化方程式と一致する。数値結果より数値解が2次の精度を持つことが示されたが，これは解$u \in H^2(\Omega)$における有限要素解uhのL^2評価の場合に相当する。本手法による近似解にたいするL^2評価を与えることが，今後の課題の一つである。

《参考文献》

[1]Nedelec,J.C. and Planchard,J.,Une methode variationnelle d'elements finis pour la resolution numerique d'um problem exterieur dans R , R.A.I.R.O. 7, 105-129 (1973).

[2] Wendland, W.L., On the asymptotic convergence of some boundary elements method, in Math. of Finite Elements and Appl. IV,Academic Press, Ed. J.R. Whiteman, 281-312 (1981).

[3] Okamoto, H., Applications of the Fourier transform to the boundary element method under the Dirichlet boundary condition, (preprint).

[4]村島定行, "代用電荷法とその応用 —境界値問題の半解析的近似法—", 森北出版 (1983).

[5]Babuska,I.,Finite element method with Lagrangian multipliers,Numer. Math. 20, 179-192 (1973).

[6]Brebbia, C.A. and Walker, S. , "Boundary Element Techniques in Engineering" Newness-Butterworths (1980).

[7]Steinbigler, H., Dissertation, Tech. Univ. Munchen (1969)

[8]Blair, J.J., Higher order approximations to the boundary conditions for the finite element method, Math. Comp., 30, 250-262 (1976).