数 値 解 析 19－1
（1986. 12. 5）

# 実係数多項式の根を求める同時反復法 ― 3次法の場合 ―

安藤 茂
津田塾大学

実係数多項式に対する3次法のアルゴリズムを提案する。2次法の場合と同様多項式の因数分解の問題へと一般化することによって、実多項式の実2次因子への分解が、実数計算の範囲でおこえるようにする。
局所的3次収束の証明を与える。また、かんたんなPASCALプログラムと実行例を紹介する。

## A Real-Coefficient Version of Cubically Covergent Algorithm of Simultaneous Polynomial-Root-Finding

Shigeru Ando
(Tsuda collage, Kodaira-si, 187, Japan)

A real-coefficient version of cubically covergent algorithm of simultaneous polynomial-root-finding is proposed. Like in quadratically convergent one [1], the notion of root finding is extended to the notion of polynomial factorization, so that real quadratic factors of real polynomials be found within real computations.
A proof of local cubical convergence is given and experimental results with a simple PASCAL coding is reported.

## §1 はじめに

われわれは[1]において、代数方程式の同時求解アルゴリズムのうち、「2次法」(Durand Kerner 法)について、その実係数版を提案した。当然、「3次法」にかんしても、それに相当するものが期待される。2次法の実係数版のときと類似の考え方(高次因子への分解)を3次法の場合に適用すれば、アルゴリズムは、比較的容易に得られる。このアルゴリズムは、1985年に、桜井他[2]によって得られたものと同一である。§3において、これが実際に3次収束することの証明を与える。

§4において、かんたんな PASCAL プログラムと、[1]と同じ例題について、その実行結果を紹介する。

## §2 アルゴリズム

3次法(複素版)は、$F(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)$ とするとき、

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-\alpha_i} \quad \cdots (1)$$

が恒等的に成立することにもとづく。

いま、$z_i$ $(i=1,\cdots,n)$ をそれぞれ $\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$ の近似値とするとき、$\alpha_i$ の新しい近似値 $z_i^*$ を、

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \sum_{j\ne i}\frac{1}{x-z_j} + \frac{1}{x-z_i^*} \quad \cdots (2)$$

が、$x=z_i$ において成立するようにえらぶと、

$$z_i^* = z_i - \frac{F(z_i)}{F(z_i)}\left(1-\frac{F(z_i)}{F'(z_i)}\sum_{j\ne i}\frac{1}{z_i-z_j}\right) \quad \cdots (3)$$

がえられる。これを[2]では、「点 $z_i$ において、Fによる電場と、$z_j$ $(j\ne i)$、ならびに $z_i^*$ におかれた電荷による電場がcancelするよう $z_i^*$ をきめる」としている。

$\alpha_i$ $(i=1,\cdots,n)$ が互いに異るとき、この方法が3次収束をすることは、以下の変形によって、容易にしめされる。([3],[4] 他)

(1), (2) より、

$$\frac{1}{z_i-z_i^*} - \frac{1}{z_i-\alpha_i} + \sum_{j\ne i}\left(\frac{1}{z_i-z_j}-\frac{1}{z_i-\alpha_j}\right)=0$$

$$z_i - z_i^* = \left\{\frac{1}{z_i-\alpha_i} - \sum_{j\ne i}\left(\frac{1}{z_i-z_j}-\frac{1}{z_i-\alpha_j}\right)\right\}^{-1} = (z_i-\alpha_i)\{1-(z_i-\alpha_i)A\}^{-1}$$

$$A=\sum_{j\ne i}\left(\frac{1}{z_i-z_j}-\frac{1}{z_j-\alpha_j}\right) = \sum_{j\ne i}\frac{z_j-\alpha_j}{(z_i-z_j)(z_i-\alpha_j)}$$

$$z_i^* - \alpha_i = (z_i-\alpha_i)-(z_i-z_i^*) = -(z_i-\alpha_i)^2 A\{1-(z_i-\alpha_i)A\}$$

われわれは、(1)の一般化として、$F(x)=\prod_{i=1}^{l}F_i(x)$ $\cdots(5)$ のもとで

$$\frac{F'(x)}{F(x)}=\sum_{i=1}^{l}\frac{F_i'(x)}{F_i(x)} \quad \cdots (6)$$

がなりたつことから出発する。

((6)は、たとえば、(5)の両辺の log の微分をとることによって、えられる。)

いま、$\varphi_i(x)$ $(i=1,\cdots,l)$ が、$F_i(x)$ の近似多項式であるとするとき、$F_i(x)$ の新しい近似多項式 $\varphi_i^*(x)$ にかんして、(2) に相当する条件は、次のかたちとなる。

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \equiv \sum_{j\neq i} \frac{\varphi_j'(x)}{\varphi_j(x)} + \frac{\varphi_i^{*\prime}(x)}{\varphi_i^*(x)} \pmod{\varphi_i(x)} \quad \cdots (7)$$

(7) を変形した

$$\frac{\varphi^*(x)}{\varphi^{*\prime}(x)} \equiv \frac{F(x)}{F'(x)}\left(1-\frac{F(x)}{F'(x)}\sum_{j\neq i}\frac{\varphi_j'(x)}{\varphi_j(x)}\right) \pmod{\varphi_i(x)} \cdots (8)$$

にもとづいて、$\varphi_i^*(x)$ をもとめるアルゴリズムを構成することにする。

$F_i(x)$ が、したがって $\varphi_i(x)=x-t$, $\varphi_i^*(x)=x-t^*$ が 1次因子のとき、(8) は、

$$t-t^* = \frac{F(t)}{F'(t)}\left(1-\frac{F(t)}{F'(t)}\sum_{j\neq i}\frac{\varphi_j'(t)}{\varphi_j(t)}\right)$$

となり、これは 3次法（複素版）の計算そのままである。

$F_i(x)$ が、したがって、$\varphi_i(x)$, $\varphi_i^*(x)$ が 2次因子のとき、

$\varphi_i(x)=x^2+px+q$, $\varphi_i^*(x)=x^2+p^*x+q^*$ とおく。

(8) の右辺の計算であるが、まず、$F(x)/F'(x)\equiv ax+b \pmod{\varphi_i(x)}$ なる $a$, $b$ は、次のように求められる。(procedure f_ovr_fd, §4)

$F(x)$ を $\varphi_i(x)$ で割った商を $G(x)$, 余りを $R(x)$
$G(x)$ 〃 〃 $H(x)$, 〃 $S(x)$
とする。i.e.

$$\begin{cases} F(x)=\varphi_i(x)G(x)+R(x) \\ G(x)=\varphi_i(x)H(x)+S(x) \end{cases} \qquad (R(x),\ S(x) \text{ は 1次})$$

とすると、

$$F'(x)=\varphi_i(x)G'(x)+\varphi_i'(x)G(x)+R'(x)$$
$$=\varphi_i(x)\left(G'(x)+\varphi_i'(x)H(x)\right)+\varphi_i'(x)$$
$$+\varphi'(x)S(x)+R'(x)$$

$R(x)=\alpha x+\beta$, $S(x)=\gamma x+\delta$ とおくと、

$$F'(x)\equiv\varphi'(x)S(x)+R'(x)=(2x+p)(\gamma x+\delta)+\alpha$$
$$\equiv(2\delta-p\gamma)x+p\delta-2q\gamma+\alpha \pmod{\varphi_i(x)}$$

したがって、$\{(2\delta-p\gamma)x+p\delta-2q\gamma+\alpha\}(ax+b)\equiv\alpha x+\beta \pmod{\varphi_i(x)}$

を $a$, $b$ について解けばよい。[1] でのべたように、一般に、方程式、

$$(rx+s)(ax+b)\equiv\alpha x+\beta \pmod{x^2+px+q}$$ は、

$$\begin{cases} a=(\alpha s-\beta r)/D \\ b=(\alpha rq-(s-rp))/D \end{cases} \qquad (D=s^2-qrs+r^2) \text{ によって解かれる}$$

(procedure Solve, §4)

右辺の他の部分の計算も、procodure Solve をもちいて、同様に実行される。

いま、右辺 $\equiv ax+b \pmod{\varphi_i(x)}$ が求まったとすると、

$$\text{左辺} \equiv \frac{\Delta p\cdot x+\Delta q}{2x+p^*} \equiv ax+b \pmod{\varphi_i(x)} \quad (\text{ここに } \Delta p=p^*-p,\ \Delta q=q^*-q)$$

が、
$$\begin{cases} \Delta p=(2b-ap)/(1-a) \\ \Delta q = b(p+\Delta p)-2aq \end{cases}$$
によって解かれることは、容易にたしかめられる。

各 $F_i$ の次数、出発値のえらび方、等は、[1] におけると、まったく同じとする。

§4　3次収束することの証明。

各 $F_i(x)$ がたがいに共通因子をもたないとき、上記アルゴリズムが3次収束することの証明を以下に与える

(6), (7) より、
$$\frac{\varphi_i^*(x)}{\varphi_i^{*\prime}(x)}-\frac{F_i'(x)}{F_i(x)}+\sum_{j\neq i}\left(\frac{\varphi_j'(x)}{\varphi_j(x)}-\frac{F_j'(x)}{F_j(x)}\right)\equiv 0 \pmod{\varphi_i(x)}$$

$$\frac{\varphi_i^*(x)}{\varphi_i^{*\prime}(x)} \equiv \left\{\frac{F_i'(x)}{F_i(x)}-\sum_{j\neq i}\left(\frac{\varphi_j'(x)}{\varphi_j(x)}-\frac{F_j'(x)}{F_j(x)}\right)\right\}^{-1} \pmod{\varphi_i(x)}$$

$$= \frac{F_i(x)}{F_i'(x)}\left\{1-\frac{F_i(x)}{F_i'(x)}\cdot A(x)\right\}^{-1},\quad A(x)=\sum_{j\neq i}\left(\frac{\varphi_j'(x)}{\varphi_j(x)}-\frac{F_j'(x)}{F_j(x)}\right)$$

$$\frac{F_i(x)}{F_i'(x)}-\frac{\varphi_i^*(x)}{\varphi_i^{*\prime}(x)} \equiv -\left(\frac{F_i(x)}{F_i'(x)}\right)^2 A(x)\left\{1-\frac{F_i(x)}{F_i'(x)}A(x)\right\}^{-1} \pmod{\varphi_i(x)} \quad \cdots\cdots (9)$$

(9) に、$\varphi_i$ の根 $u_i$ を代入すると、
$$\frac{F_i(u_i)}{F_i'(u_i)}-\frac{\varphi_i^*(u_i)}{\varphi_i^{*\prime}(u_i)} = -\left(\frac{F_i(u_i)}{F_i'(u_i)}\right)^2 A(u_i)\left\{1-\frac{F_i(u_i)}{F_i'(u_i)}A(u_i)\right\}^{-1} \quad \cdots (10)$$

いま、$\varphi_1,\cdots,\varphi_\ell$ のすべての根 $u_i,\cdots,v_i$ $(i=1,\cdots,\ell)$ が $F_1,\cdots,F_\ell$ の対応する根 $\alpha_i,\cdots,\beta_i$ $(i=1,\cdots,\ell)$ に十分近いとする。i.e. $|u_i-\alpha_i|,\cdots,|v_i-\beta_i|\leq h$ $(i=1,\cdots\ell)$, $(|h|\ll 1)$

このとき右辺の $F_i(u_i)/F_i'(u_i)$ は、$u_i$ に関して微分可能で、$\dfrac{F_i(\alpha_i)}{F_i'(\alpha_i)}=0$ であるから、$F_i(u_i)/F_i'(u_i)=O(h)$.

また、$A(u_i)$ は、$u_j,\cdots,v_j$ $(j=1,\cdots,\ell,\ j\neq i)$ に関して微分可能で、$u_j=\alpha_j,\cdots,v_j=\beta_j$ のとき $\varphi_j'(u_i)/\varphi_j(u_i)=F_j'(u_i)/F_j(u_i)$ であるから、$A(u_i)=O(h)$ がえられる

結局 (10) の右辺 $=O(h^3)$ がえられた。

次に (10) の左辺であるが、まず、$u_i^*$ は、$\varphi_1,\cdots,\varphi_\ell$ に関し、したがって、$u_j,\cdots,v_j$ $(j=1,\cdots,\ell)$ に関して微分可能であり、$u_j=\alpha_j,\cdots,v_j=\beta_j$ $(j=1,\cdots,\ell)$ のとき、$u_i^*=\alpha_i$ であるから、$u_i^*-\alpha_i=O(h)$ がいえる。

更に $u_i^*-u_i=(u_i^*-\alpha)-(u_i-\alpha)=O(h)$ もえられる。

$$\varphi_i^*(u_i^*)=0=\varphi_i^*(u_i)+\varphi_i^{*\prime}(u_i)(u_i^*-u_i)+\varphi_i^{*\prime\prime}(u_i)(u_i^*-u_i)^2+O(|u_i^*-u_i|)^3$$

より

$$\frac{\varphi_i^*(u_i)}{\varphi_i^{*\prime}(u_i)}=-(u_i^*-u_i)-\frac{\varphi_i^{*\prime\prime}(u_i)}{\varphi_i^{*\prime}(u_i)}(u_i^*-u_i)^2+O(h^3)\quad\cdots(11)$$

$$F_i(\alpha_i)=0=F_i(u_i)+F_i'(u_i)(\alpha_i-u_i)+F_i''(u)(\alpha_i-u_i)^2+O(|\alpha_i-u|^3)$$

より

$$\frac{F_i(u_i)}{F_i'(u_i)}=-(\alpha_i-u_i)-\frac{F_i''(u_i)}{F_i'(u)}(\alpha_i-u_i)^2+O(h^3)\cdots(12)$$

がえられる。

また、$\dfrac{\varphi_i^{*\prime\prime}(u_i)}{\varphi_i^{*\prime}(u_i)}$ は $u_i^*,\cdots,v_i^*$ に関して微分可能で、$u_i^*=\alpha_i\cdots$ $v_i^*=\beta_i$ のとき、$\dfrac{F''(u_i)}{F'(u_i)}$ に等しいから

$$\frac{\varphi^{*\prime\prime}(u_i)}{\varphi^{*\prime}(u_i)}=\frac{F''(u_i)}{F'(u_i)}+O(h)\quad\cdots\quad(13)$$ がえられる。

(11), (12), (13) より

$$(10)\text{の左辺}=\frac{F_i(u_i)}{F_i'(u_i)}-\frac{\varphi_i^*(u_i)}{\varphi_i^{*\prime}(u_i)}=(u_i^*-\alpha_i)\left(1+\frac{F_i''(u_i)}{F_i'(u_i)}(u_i^*+\alpha_i-2u_i)\right)+O(h^3).$$

$u_i^*+\alpha_i-2u_i=(u_i^*-u_i)+(\alpha_i-u_i)=O(h)$ より、

左辺 $=(u_i^*-\alpha_i)(1+O(h))+O(h^3)$ がえられる。

右辺 $=O(h^3)$ より結局、$u_i^*-\alpha_i=O(h^3)$ がえられた。

## §4. プログラムと実行例

[1] と同じく、PC9801F、i8087付、言語は Turbo PASCAL ver3.0 をもちいた。$F(x)$ が偶数次のとき、2次因子の積に、奇数次のとき、2次因子と1個の1次因子の積に分解すること、初期値のとり方、配列 C[i], V[i], dV[i] のとりかたも、[1] の場合と全く同じである。

「f_ovr_fd」は $F/F'\ (\mathrm{mod}\ x^2+px+q)$ を求める procedure

「Solve」は、$(rx+s)(aa\,x+bb)=ax+b\ (\mathrm{mod}\ x^2+px+q)$ を、未知 aa, bb に関して解く procedure であるが [1] と異り様々な使われ方をするので、外に独立させ、すべてのパラメータを引数で与えることにした。

```
type vector=array[1..30]of real;
var c,v:vector;i,j,k,n:byte; a,b,p,q,d,r,s,t,z0:real; inc:char;

procedure solve(p,q,a,b,r,s:real;var aa,bb:real); begin
   d:=s*s-p*r*s+q*r*r; aa:=(a*s-b*r)/d; bb:=(a*r*q+(s-r*p)*b)/d;  end;

procedure f_ovr_fd(c:vector;n:integer;var a,b:real);  begin
   d:=1;for i:=1 to n-1 do begin c[i]:=c[i]-d*p;c[i+1]:=c[i+1]-d*q;d:=c[i] end;
   d:=1;for i:=1 to n-3 do begin c[i]:=c[i]-d*p;c[i+1]:=c[i+1]-d*q;d:=c[i] end;
   solve(p,q,c[n-1],c[n],2*c[n-2]-p*c[n-3],p*c[n-2]-2*q*c[n-3]+c[n-1],a,b) end;

procedure realABR(var c,v:vector;n:integer);
  var i,j:integer; dv:vector;
    begin
  for i:=1 to n div 2 do begin p:=v[2*i-1]; q:=v[2*i];
    r:=0; s:=0; for j:=1 to n div 2 do if i<>j then begin
      solve(p,q,2,v[j*2-1],v[j*2-1]-p,v[j*2]-q,a,b); r:=r+a; s:=s+b end;
    if odd(n) then begin solve(p,q,0,1,1,-v[n],a,b); r:=r+a; s:=s+b end;
    f_ovr_fd(c,n,a,b); solve(p,q,a,b,a*r*p-b*r-a*s,1+a*r*q-b*s,a,b);
    dv[2*i-1]:=(2*b-a*p)/(1-a); dv[2*i]:=b*(p+dv[2*i-1])-2*a*q       end;
  if odd(n) then begin t:=v[n];
    r:=0; for j:=1 to n div 2 do r:=r+(2*t+v[2*j-1])/(t*(t+v[2*j-1])+v[2*j]);
    a:=c[1]+t;b:=1;j:=1;while j<n do begin b:=a+b*t;j:=j+1;a:=c[j]+a*t end;
    dv[n]:= -a/(b-a*r)   end;
  for i:=1 to n do v[i]:=v[i]+dv[i]                                   end;

procedure printpol(var c:vector;n:integer);var i:integer; sgn:char;
  procedure xx(i:integer);begin
    write(lst,' X');if i>1 then write(lst,^Z'U',i,^['Q ') end;
  begin  xx(n);for i:=1 to n do if abs(c[i])>1E-10 then begin
    if c[i]>0 then sgn:='+' else sgn:='-';write(lst,sgn,abs(c[i]):7:3);
    if i<n then xx(n-i)end;writeln(lst) end;
Begin
writeln(lst,^J^['Q');write('n = ');readln(n);
for i:=1 to n do begin write('c',n-i,' = ');readln(c[i]) end; printpol(c,n);
z0:=-c[1]/n;if z0<>0 then begin for i:=n downto 1 do begin p:=1;
  for j:=1 to i do begin p:=c[j]+p*z0; c[j]:=p end end; printpol(c,n) end;
r:=0;for i:=1 to n do if c[i]<>0 then
  begin t:=2*exp(ln(abs(c[i]))/i);if t>r then r:=t end;
repeat write(lst,r:8:3);p:=-abs(c[1])+r;q:=1; i:=1;
  while i<n do begin q:=p+q*r;i:=i+1;p:=-abs(c[i])+p*r end;
  r:=r-p/q until p/q<1e-8;   writeln(lst,^J);
t:=3.14159265358979*2/n; k:=0;
if c[n]>0 then begin if odd(n) then v[n]:=-r;
  for i:=1 to n div 2 do begin v[2*i-1]:=-2*r*cos(t*i-t/2);v[2*i]:=r*r end end
else begin if odd(n) then v[n]:=r else begin v[n-1]:=0; v[n]:=-r*r end;
  for i:=1 to (n-1)div 2 do begin v[2*i-1]:=-2*r*cos(t*i);v[2*i]:=r*r end end;
repeat k:=k+1;write(lst,k:3,' ');
  for i:=1 to n do write(lst,v[i]:8:3);writeln(lst);
  realABR(c,v,n); read(kbd,inc) until inc=^[;
if z0<>0 then writeln(lst,'C'^Z'L',n-1,^['Q/',n,' = ',z0:10:6);
for i:=1 to n div 2 do begin p:=v[2*i-1]; q:=v[2*i]; d:=p*p-4*q;
  if d<0 then writeln(lst,z0-p/2:15:10,' ±'^['Q',sqrt(-d)/2:15:10,' i')
  else begin d:=sqrt(d);if p>0 then d:=-d;t:=(-p+d)/2;
             writeln(lst,z0+t:15:10,z0+q/t:19:10) end  end;
if odd(n) then writeln(lst,z0+v[n]:15:10);
End.
```

例 1　$F(x) = (x^{14}+1)(x^2-0.01)$

$X^{16} - 0.010\,X^{14} + 1.000\,X^2 - 0.010$

```
 2.000   1.875   1.758   1.648   1.545   1.449   1.359   1.275   1.198   1.128   1.070   1.027   1.006   1.002   1.001   1.001

 1  -1.850   1.003  -1.416   1.003  -0.766   1.003  -0.000   1.003   0.766   1.003   1.416   1.003   1.850   1.003   0.000  -1.003
 2  -1.773   0.767  -1.564   0.958  -0.869   0.993  -0.000   1.000   0.869   0.993   1.564   0.958   1.773   0.767   0.000  -0.043
 3  -1.975   1.019  -1.566   1.002  -0.868   1.000   0.000   1.000   0.868   1.000   1.566   1.002   1.975   1.019   0.000  -0.011
 4  -1.950   1.000  -1.564   1.000  -0.868   1.000-7.0E-037   1.000   0.868   1.000   1.564   1.000   1.950   1.000  -0.000  -0.010
```

| | | |
|---|---|---|
| 0.9749279122 ± | 0.2225209340 i |
| 0.7818314825 ± | 0.6234898019 i |
| 0.4338837391 ± | 0.9009688679 i |
| -8.3549129E-053 ± | 1.0000000000 i |
| -0.4338837391 ± | 0.9009688679 i |
| -0.7818314825 ± | 0.6234898019 i |
| -0.9749279122 ± | 0.2225209340 i |
| 0.1000000000 | -0.1000000000 |

## 例2　$F(x)=(x^{14}-1)(x^{2}-0.01)$

$X^{16} - 0.010 X^{14} - 1.000 X^2 + 0.010$

2.000　1.875　1.758　1.648　1.545　1.449　1.359　1.275　1.198　1.128　1.070　1.027　1.006　1.002　1.001　1.001

| | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -1.964 | 1.003 | -1.665 | 1.003 | -1.113 | 1.003 | -0.391 | 1.003 | 0.391 | 1.003 | 1.113 | 1.003 | 1.665 | 1.003 | 1.964 | 1.003 |
| 2 | -3.206 | 2.057 | -1.772 | 0.910 | -1.251 | 0.981 | -0.445 | 0.998 | 0.445 | 0.998 | 1.251 | 0.981 | 1.772 | 0.910 | 3.206 | 2.057 |
| 3 | -1.660 | 0.670 | -1.784 | 0.988 | -1.247 | 1.000 | -0.445 | 1.000 | 0.445 | 1.000 | 1.247 | 1.000 | 1.784 | 0.988 | 1.660 | 0.670 |
| 4 | -1.223 | 0.223 | -1.802 | 1.000 | -1.247 | 1.000 | -0.445 | 1.000 | 0.445 | 1.000 | 1.247 | 1.000 | 1.802 | 1.000 | 1.223 | 0.223 |
| 5 | -1.112 | 0.112 | -1.802 | 1.000 | -1.247 | 1.000 | -0.445 | 1.000 | 0.445 | 1.000 | 1.247 | 1.000 | 1.802 | 1.000 | 1.112 | 0.112 |
| 6 | -1.100 | 0.100 | -1.802 | 1.000 | -1.247 | 1.000 | -0.445 | 1.000 | 0.445 | 1.000 | 1.247 | 1.000 | 1.802 | 1.000 | 1.100 | 0.100 |

| | |
|---|---|
| 1.0000000000 | 0.1000000000 |
| 0.9009688679 ± | 0.4338837391 i |
| 0.6234898019 ± | 0.7818314825 i |
| 0.2225209340 ± | 0.9749279122 i |
| -0.2225209340 ± | 0.9749279122 i |
| -0.6234898019 ± | 0.7818314825 i |
| -0.9009688679 ± | 0.4338837391 i |
| -1.0000000000 | -0.1000000000 |

## 例3.　$F(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots\cdots(x-14)(x-15)$

$X^{15}$ -120.000 $X^{14}$ +6580.000 $X^{13}$ -218400.000 $X^{12}$ +4899622.000 $X^{11}$ -78558480.000 $X^{10}$ +928095740.000 $X^{9}$ -8207628000.000 $X^{8}$ +54631129553.000 $X^{7}$ -2728
03210680.000 $X^{6}$ +1009672107080.000 $X^{5}$ -2706813345600.000 $X^{4}$ +5056995703824.000 $X^{3}$ -6165817614720.000 $X^{2}$ +4339163001600.000 X-1307674368000.000
$X^{15}$ -140.000 $X^{13}$ +7462.000 $X^{11}$ -191620.000 $X^{9}$ +2475473.000 $X^{7}$ -15291640.000 $X^{5}$ +38402064.000 $X^{3}$ -25401600.000 X

23.664　22.169　20.786　19.511　18.341　17.274　16.315　15.469　14.753　14.193　13.826　13.668　13.640　13.640　13.640

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | -24.921 | 186.043 | -18.254 | 186.043 | -8.430 | 186.043 | 2.851 | 186.043 | 13.640 | 186.043 | 22.070 | 186.043 | 26.683 | 186.043 | 13.640 |
| 2 | -22.340 | 146.902 | -16.390 | 141.486 | -7.577 | 136.050 | 2.564 | 134.676 | 12.254 | 138.487 | 19.804 | 144.494 | 23.792 | 147.063 | 12.255 |
| 3 | -20.065 | 116.377 | -14.709 | 107.358 | -6.791 | 99.135 | 2.297 | 97.173 | 10.989 | 102.680 | 17.778 | 112.096 | 21.282 | 117.029 | 11.033 |
| 4 | -18.082 | 92.726 | -13.224 | 81.398 | -6.094 | 71.704 | 2.060 | 69.435 | 9.867 | 75.782 | 15.991 | 87.086 | 19.130 | 94.052 | 9.970 |
| 5 | -16.379 | 74.527 | -11.932 | 61.721 | -5.487 | 51.256 | 1.854 | 48.829 | 8.888 | 55.581 | 14.439 | 67.936 | 17.318 | 76.639 | 9.060 |
| 6 | -14.938 | 60.622 | -10.822 | 46.846 | -4.963 | 36.025 | 1.674 | 33.534 | 8.043 | 40.437 | 13.112 | 53.363 | 15.827 | 63.630 | 8.304 |
| 7 | -13.738 | 50.069 | -9.876 | 35.646 | -4.515 | 24.740 | 1.519 | 22.248 | 7.318 | 29.142 | 11.987 | 42.326 | 14.645 | 54.140 | 7.705 |
| 6 | -12.747 | 42.080 | -9.074 | 27.275 | -4.133 | 16.475 | 1.386 | 14.026 | 6.698 | 20.802 | 11.040 | 34.008 | 13.759 | 47.482 | 7.277 |
| 9 | -11.912 | 35.962 | -8.395 | 21.099 | -3.808 | 10.549 | 1.270 | 8.174 | 6.169 | 14.754 | 10.234 | 27.766 | 12.943 | 41.698 | 7.049 |
| 10 | -11.219 | 31.423 | -7.812 | 16.630 | -3.532 | 6.452 | 1.165 | 4.164 | 5.699 | 10.441 | 9.460 | 22.722 | 13.005 | 42.031 | 7.001 |
| 11 | -11.064 | 30.381 | -7.280 | 13.444 | -3.288 | 3.815 | 1.078 | 1.651 | 5.298 | 7.617 | 8.846 | 19.389 | 13.000 | 42.000 | 7.000 |
| 12 | -11.001 | 30.004 | -12.157 | 30.671 | -3.075 | 2.378 | 0.986 | 0.339 | 4.857 | 5.743 | 9.004 | 20.015 | 13.000 | 42.000 | 7.000 |
| 13 | -11.000 | 30.000 | -6.933 | 11.612 | -2.890 | 1.835 | 1.198 | 0.098 | 5.005 | 6.011 | 9.000 | 20.000 | 13.000 | 42.000 | 7.000 |
| 14 | -11.000 | 30.000 | -7.003 | 12.013 | -3.001 | 2.002 | 0.999 | -0.001 | 5.000 | 6.000 | 9.000 | 20.000 | 13.000 | 42.000 | 7.000 |
| 15 | -11.000 | 30.000 | -7.000 | 12.000 | -3.000 | 2.000 | 1.000 | 0.000 | 5.000 | 6.000 | 9.000 | 20.000 | 13.000 | 42.000 | 7.000 |

$C_{14}/15$ = 8.000000

| | |
|---|---|
| 14.0000000000 | 13.0000000000 |
| 12.0000000000 | 11.0000000000 |
| 10.0000000000 | 9.0000000000 |
| 7.0000000000 | 8.0000000000 |
| 5.0000000000 | 6.0000000000 |
| 3.0000000000 | 4.0000000000 |
| 1.0000000000 | 2.0000000000 |
| 15.0000000000 | |

## 参考文献


[1] 安藤茂：実係数多項式用の Durand Kerner 法　情処研報 Vol.86.No.40, NA-17
[2] 桜井鉄也 他：実係数代数方程式の連立型解法とその静電場的解釈　数理解析研講究録 585 (1986)
[3] 伊理正夫：数値計算，朝倉書店 (1981)
[4] 伊理正夫 他：大域的収束性をもつ代数方程式の解法　数理解析研講究録 339 (1978)
[5] Aberth: Iteration Method for Finding All Zeros of a Polynomial Simultaneously, Math.Comp. vol.27 (1973)