

# Wavelet について

宇本 晃

京都大学理学部数学教室

本報告では Wavelet についての Y. Meyer, S. Mallat 等の仕事を紹介する。Wavelet と呼ぶのは、関数  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  で、ある程度の正則性と振動しながら遠方まで0に収束し、平均および高次までのモーメントが0という性質をもつものをいう。

Wavelet  $\psi$  をうまく選ぶと、 $\psi(x)$  の 2 進拡大とシフト  $\{\psi_{j,k}(x) = 2^{jk} \psi(2^j x - k)\}$   $j, k \in \mathbb{Z}$  が、 $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底になる。このような  $\psi(x)$  の構成法と、 $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  の Wavelet 展開  $f(x) = \sum \alpha_{j,k} \psi_{j,k}(x)$  ,  $\alpha_{j,k} = \int f(x) \overline{\psi_{j,k}(x)} dx$  の性質について紹介する。

Akira Morimoto

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kyoto University  
Kitashirokawa Oiwakecho, Sakyo, Kyoto, 606 Japan

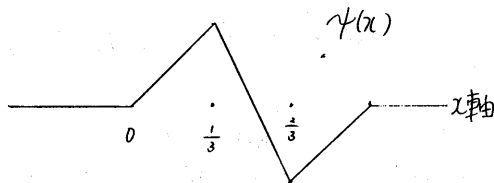
I introduce the theory of wavelets which is studied by Y. Meyer, S. Mallat, I. Daubechies, etc.

§ 1. はじめに.

関数  $f(x) \in L^1(\mathbb{R})$  の情報が あるテスト関数  $\psi(x)$  のシフトの族  $\{\psi(x-a_i)\}_{i \in \mathbb{I}}$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  との積分值  $A_{a_i} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi(x-a_i) dx$  でのみ与えられるとする. このとき, 関数  $f(x)$  の不連続点を  $\{A_{a_i}\}_{i \in \mathbb{I}}$  から知り得るためには, テスト関数  $\psi$  にはどのような性質が要求されるか.

この問題に対し, J. Morlet は次の  $\psi(x)$  を考えた.

$$\psi(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq \frac{1}{3} \\ 1-2x & \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \\ x-1 & \frac{2}{3} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



このような波形  $\psi(x)$ , まず  $x=0$  までは休止して  $x=1$  まで  $|1|$  振動して,  $x=1$  でまた休止に入るようなもの. (sin x を  $x=0$  から  $x=1$  までより) のことを, Wavelet, Ondelette と呼ぶ.

この  $\psi(x)$  をもとに,  $I = [a, b]$ ,  $h = b - a$  に対し,

$$\psi_I(x) = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{h}} \psi\left(\frac{x-a}{h}\right)$$

を  $I$  を動かすことにより  $\psi$  Wavelet のファミリーをくくる.

$3\sqrt{3}/\sqrt{h}$  は  $\psi_I$  の  $L^2$  ノルムを  $\int |\psi_I|^2 dx = 1$  と規格化するためのものである. この  $\psi_I(x)$  による関数  $f(x)$  の Wavelet 係数を  $\alpha_I = \int f(x) \psi_I(x) dx$  で定義すると, 関数  $f(x)$  の特異性を係数  $\alpha_I$  の大きさで反映している. つまり  $I = [a, b]$ ,  $h = b - a$  で, 区間中  $h$  を一定にとり,  $I$  を動かして  $\alpha_I$  の大きさを見ていくとする.  $f(x)$  が  $C^k$  級であれば,  $\alpha_I = O(h^k)$  である.  $f(x)$  が  $x_i$  で一種不連続点を持つとき,  $a < x_i < b$  ならば  $\alpha_I = O(\sqrt{h})$  となつて区別できる. これは  $\psi(x)$  がコンパクトサポートを持つことと, 平均  $\int \psi(x) dx = 0$  という性質から出る. (ここで)

定義 1.  $d \geq 1$  の整数に対し,  $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が次の (i), (ii) を満たすとき  $d$  次の Wavelet といふ.

$$(i) \quad \left| \frac{d^l}{dx^l} \psi(x) \right| \leq C (1+|x|)^{-1-d+l}, \quad l=0, 1, \dots, d$$

$$(ii) \quad \int x^l \psi(x) dx = 0 \quad l=0, 1, \dots, d-1$$

$d$  次の Wavelet  $\psi$  を用いるには, 区間中  $h$  を固定し  $I$  を動かしたときの Wavelet 係数  $\alpha_I$  の大きさを見ていけば,  $d-1$  次までの導関数のとけ (不連続性) がわかる.

さて, Wavelet 係数  $\alpha_I$  から元の関数  $f(x)$  を再生するにはどうしたらよいか.

つまり,

$$f(x) = \alpha_{I_1} \psi_{I_1}(x) + \alpha_{I_2} \psi_{I_2}(x) + \dots$$

が成立するためには, 区間  $I_1, I_2, \dots$  をどう選ぶかよいか. という問題は, J. Morlet の Wavelet ではおなじみややなし. (ここで, 簡単な  $\{\psi(x-a_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  の形,  $\psi$  の  $L^2$  直交ファミリーと整数のシフトの全体が  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底をな

すようとするためには、Wavelet  $\psi$  をどう選べばよいかについて以下 S. Mallat の multiresolution approximation の考えに沿って説明する。まず §2 で multiresolution approximation と呼ぶ  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  で  $V_j \subset V_{j+1}$ ,  $\bigcap V_j = \{0\}$ ,  $\bigcup V_j = L^2(\mathbb{R})$  なるものを定義し、§3 で  $V_0$  の正規直交系  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  をとる  $\varphi$  と与え、§5 で  $V_1 = V_0 \oplus W_0$  と分解し、 $W_0$  の正規直交系  $\{\psi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  と取り  $\psi$  を与える。  $\psi$  が求めた Wavelet である。 §6 で Wavelet 展開の近似について述べる。

## §2. multiresolution approximation について.

定義 2.  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間の列  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  が以下の 5 条件を満たすとき、multiresolution approximation とする。

(i)  $\forall j \in \mathbb{Z}, V_j \subset V_{j+1}$

(ii)  $\bigcap_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \{0\}, \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$  dense in  $L^2(\mathbb{R})$

(iii)  $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$

(iv)  $f(x) \in V_j, k \in \mathbb{Z} \implies f(x - k2^{-j}) \in V_j$

(v)  $\exists g(x) \in V_0$  s.t.  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が  $V_0$  の Riesz basis をなす。

ここで、Hilbert 空間  $H$  の部分集合  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  が Riesz basis をなすとは、 $\forall x \in H$  には  $\sum \alpha_i e_i$  s.t.  $x = \sum \alpha_i e_i$  と展開でき、 $\|x\|_H$  と  $(\sum |\alpha_i|^2)^{1/2}$  が  $H$  上同値なノルムになること。

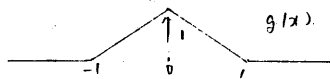
実際の multiresolution approximation の構成法は、まず  $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$  を取る。次に、 $V_0$  を  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  で張った  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間とし、条件 (v) をしる。  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  を条件 (iii) を使ひ  $V_0$  から帰納的に定める。もし  $V_0 \subset V_1$  が成立していれば、条件 (i) も成立する。

さらに  $g(x)$  が十分な regularity を持ち、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = 1$  ならば、(ii) が成立すること §4 で示す。

例 1  $g(x)$  を  $[0, 1)$  区間の特性関数とする。このとき  $V_0$  は、 $L^2(\mathbb{R})$  の階段関数で、不連続点が  $k \in \mathbb{Z}$  になるようなもの全体である。  $V_1$  は、不連続点が、 $\frac{k}{2}, k \in \mathbb{Z}$  になるような階段関数からなり、 $V_0 \subset V_1$  である。

例 2  $V_0$  を、各区間  $[k, k+1], k \in \mathbb{Z}$  上への制限が、アプワイプトなる関数  $f \in L^2(\mathbb{R})$  の全体とする。このとき  $g(x)$  は、台が  $[-1, 1]$  で  $g(0) = 1$  なる三角形である。

$$g(x) = \begin{cases} x+1 & -1 \leq x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



例 3  $m$  を整数とし、 $V_0$  を  $C^{m-1}$  級関数  $f \in L^2(\mathbb{R})$  で、各区間  $[k, k+1], k \in \mathbb{Z}$  への

制限が、 $m$ 次以下の多項式からなるもの全体を  $\mathcal{P}_m$  とする。このとき、 $g(x)$  は、basic spline と呼ばれるもので、 $[0, 1]$  区間の特性関数  $\chi_{[0, 1]}$  の  $m$  回の convolution を繰り返して得られる。  $g_m(x) \geq 0$  かつ  $\int_{\mathbb{R}} g_m(x-h) dx = 1$  を満たす。

例4  $f(x) \in V_0 \subset L^2(\mathbb{R})$  を、 $f$  の Fourier 変換  $\hat{f}(\xi)$  の台が  $[-\pi, \pi]$  からなるもの全体とする。  $g(x) = \sin(\pi x)/\pi x$  とおけば、 $\hat{g}(\xi)$  は  $[-\pi, \pi]$  の特性関数になる。  $\hat{g}(x-h) = e^{-i\xi h}$  であり、 $f$  の  $\{g(x-h)\}_{h \in \mathbb{Z}}$  での展開、 $f(x) = \sum \alpha_k g(x-k)$  は、 $\hat{f}(\xi)$  の  $[-\pi, \pi]$  での Fourier 級数展開となる。  $f(x) \in V_0 \Leftrightarrow f(2x) \in V_1$  であり、 $\hat{f}(2\xi) = \frac{1}{2} \hat{f}(\xi/2)$  となるから、 $V_1$  は Fourier 変換が、 $[-2\pi, 2\pi]$  を台とするような関数全体からなる。よって、 $V_0 \subset V_1$  もいえる。

例5  $\Theta(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を smooth, even, non-negative, compact support,  $\Theta(x) = 1$   $-\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{2}{3}\pi$ ,  $\Theta(x) = 0$   $|x| \geq \frac{4}{3}\pi$ ,  $\Theta(x)^2 + \Theta(\pi-x)^2 = 1$   $\frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi$

まず  $\Theta(x)$  をとり、 $\varphi(x)$  を  $\Theta(x)$  の逆 Fourier 変換で定める。そうすると、 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は、正規直交系をなす。  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が張る空間を  $V_0$  とする。  $V_0$  は multiresolution approximation をなす。  $V_0$  は multiresolution approximation をなす。

上記の例の3と例1, 4, 5の  $g(x)$  は、 $V_0$  の正規直交基底をなす。次の§で  $V_0$  の正規直交基底が、 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  であることを見せる。

### § 3. 直交化について

Fourier 変換を用いて直交化について述べる。これは次の Lemma による。

Lemma 1  $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が  $L^2(\mathbb{R})$  で正規直交系をなすための必要十分条件は、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)|^2 = 1 \quad \text{a.e. } \xi$$

が成立することである。ここで、 $\hat{\varphi}(\xi)$  は  $\varphi$  の Fourier 変換 ( $\hat{\varphi}(\xi) = \int \varphi(x) e^{-i\xi x} dx$ )

(1)  $\varphi(x-k)$  と  $\varphi(x-l)$  の内積は Parseval の公式を用いる。

$$\begin{aligned} \int \varphi(x-k) \overline{\varphi(x-l)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int |\hat{\varphi}(\xi)|^2 e^{-i\xi(k-l)} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)|^2 \right] e^{-i\xi(k-l)} d\xi \\ &= \begin{cases} 1 & k=l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \end{aligned}$$

にたすためには、 $m(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\xi + 2n\pi)|^2$  の Fourier 級数展開  $\sum C_n e^{-in\xi}$  が、

$C_0 = 1, C_n = 0 (n \neq 0)$  となるように。よって  $m(\xi) = 1$  a.e. が成立する。

$\varphi \in V_0$  であるから、 $\exists \{\alpha_k\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$  s.t.

$$\varphi(x) = \sum \alpha_k g(x-k)$$

と、 $V_0$  の Riesz basis  $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  での展開できる。両辺の Fourier 変換をとると

$$\widehat{\varphi}(z) = m(z) \widehat{g}(z) \quad z = z' \quad m(z) = \sum_k \alpha_k e^{-ikz}$$

よって、 $m(z) \in L^2(0, 2\pi)$  且  $2\pi$ -periodic である

$$\sum_n |\widehat{\varphi}(z+2n\pi)|^2 = |m(z)|^2 \sum_n |\widehat{g}(z+2n\pi)|^2$$

となる。

よって  $z'$ 、 $\{g(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が  $V_0$  の Riesz basis になることが分る。

$$\exists C_2 \geq C_1 > 0 \quad \text{s.t.} \quad C_1 \leq \left[ \sum_n |\widehat{g}(z+2n\pi)|^2 \right]^{1/2} \leq C_2$$

とできる。従って、

$$m(z) = \left[ \sum_n |\widehat{g}(z+2n\pi)|^2 \right]^{-1/2}$$

よって、 $m(z) \in L^2(0, 2\pi)$  かつ  $2\pi$ -periodic になるが、 $\widehat{\varphi}(z) = m(z) \widehat{g}(z)$  の逆 Fourier 変換  $\varphi(x)$  は、 $\varphi \in V_0$  で、 $\{\varphi(x-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  は  $V_0$  の正規直交基底になる。

$$\S 4 \quad \bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = L^2(\mathbb{R}) \quad \text{となる。}$$

この  $\S$  では、multiresolution approximation を構成するための種  $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$  は、定義 2 の (i)(ii)(iii)(iv) を満たすとする。さらに  $g(x)$  が十分な regularity を持てば、iii) の条件  $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j = \mathbb{R}$  となるが、 $\bigcup_{j=-\infty}^{\infty} V_j$  が  $L^2(\mathbb{R})$  で dense を成り立つことを示す。regularity として、

定義 3  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  が regular  $\Leftrightarrow f(x) \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $|f(x)| \leq C|x|^{-1}$ ,  $|f'(x)| \leq C|x|^{-2}$

定義 4  $E_j$  で、 $L^2(\mathbb{R})$  から  $V_j$  の閉部分空間  $V_j$  への直交射影作用素とし、その積分核を  $T_j(x, y)$  とおき、

$$E_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j \quad \text{projection}$$

$$T_j(x, y) = \sum_k 2^j \varphi(2^j x - k) \overline{\varphi(2^j y - k)}$$

とする。  $f \in L^2(\mathbb{R})$  に対して

$$(E_j f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) T_j(x, y) dy \quad \text{となる。}$$

Prop 2  $g(x)$  が regular  $\Rightarrow \varphi(x)$  も regular

Lemma 3  $g(x)$  が regular  $\Rightarrow \exists C > 0$  s.t.  $|T_0(x, y)| \leq \frac{C}{(1+|x-y|)^2}$

Lemma 4  $g(x)$  が regular のとき、 $\forall x \in \mathbb{R}$  に対して  $\int_{\mathbb{R}} T_0(x, y) dy = 1$  となるが、 $E_j$  は  $j \rightarrow +\infty$  のとき作用素ノルムで  $I$  (identity) に強収束する。

証明) Prop 2 は、 $\widehat{\varphi}(z) = m(z) \widehat{g}(z)$  で、 $m(z) = \sum_k \alpha_k e^{-ikz}$  と分解したとき、 $g(x)$  が regular ならば、各  $|\alpha_k| \leq C(1+|k|)^{-1}$  なることが示せ、よって分る。

Lemma 3 は、 $T_0(x, y) = \sum \varphi(x-k) \overline{\varphi(y-k)}$  で、 $x$  と  $y$  の距離に注目すれば出る。

Lemma 4 の証明)  $\{E_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は、直交射影作用素  $\|E_j\| \leq 1$  の列だから  $L^2(\mathbb{R})$  上一様有界、 $\|E_j f\| \leq \|f\|$  (Banach-Steinhaus の定理より)、 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$  に対し  $E_j f \rightarrow f$  ( $j \rightarrow +\infty$ )  $L^2$  収束をいえるが、 $E_j$  は  $I$  に強収束する。 $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$  のおしりに、任意の区間  $[a, b]$  の特性関数  $\chi_{[a, b]}$  で、 $E_j \chi_{[a, b]} \rightarrow \chi_{[a, b]}$  a.e.  $x$  をいえる。Lebesgue の収束定理から、 $E_j \chi_{[a, b]} \rightarrow \chi_{[a, b]}$   $L^2$  収束がわかる。

従って

$$|E_j f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) T_0(x, y) dy \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) 2^j T_0(2^j x, 2^j y) dy \right|$$

$$\leq C 2^j \int_a^b \frac{1}{(1+2^j|x-y|)^2} dy$$

よって  $x \in [a, b]$  に対し  $y \in [a, b]$  ならば  $d = \min(|x-a|, |x-b|)$  とおくと

$$|E_j f(x)| \leq C 2^j \int_a^b \frac{1}{(1+2^j d)^2} dy \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow +\infty)$$

$x \in (a, b)$  に対し  $T_0(x-h, y-h) = T_0(x, y)$ ,  $h \in \mathbb{Z}$  の性質を用い,  $\beta \in \mathbb{Z}$  に対し

$$E_j f(x) = \int_{a-\frac{\beta}{2^j}}^{b-\frac{\beta}{2^j}} 2^j T_0(2^j x - \beta, 2^j y - \beta) dy = \int_{2^j a - \beta}^{2^j b - \beta} T_0(2^j x - \beta, z) dz \rightarrow \int_a^b f(x) dx = 1$$

よって  $\rho$  Lemma 4 が成立する。

注意) Lemma 4 は、実は必要十分条件である。

定理 5.  $g(x)$  が regular かつ  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = 1$  であれば、 $g(x)$  から構成した  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  は、 $(\cup_{j \in \mathbb{Z}} V_j)^\perp = L^2(\mathbb{R})$ ,  $\cap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$  が成立する。

証明) density は Lemma 4 をつかう。

$$\int T_0(x, y) dy = \int \sum \varphi(x-k) \overline{\varphi(y-k)} dy = \sum \varphi(x-k) \int \overline{\varphi(y-k)} dy = \sum \varphi(x-k) \widehat{\varphi}(0)$$

次に  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  に対し、 $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k) = 1$  a.e.  $x$  かつ  $\widehat{f}(2m\pi) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$   
 が、同値に成ることを (i)  $\widehat{f}(2m\pi) = \int f(x) e^{-i2m\pi x} dx = \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x-k) e^{-i2m\pi x} dx = \int_0^1 e^{-i2m\pi x} dx$   
 より、 $m(0) = \left[ \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}(0+2m\pi k)|^2 \right]^{1/2} = 1$  となる。  $\widehat{\varphi}(0) = m(0) \widehat{g}(0) = 1$

従って  $\widehat{\varphi}(2m\pi) = \begin{cases} 0 & m \neq 0 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$  となる。

$\sum \varphi(x-k) = 1$ ,  $\widehat{\varphi}(0) = 1$  より Lemma 4 の仮定を満たす。

$$2) |E_j f(x)| \leq \int \|f(y)\| |2^j T_0(2^j x, 2^j y)| dy$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |2^j T_0(2^j x, 2^j y)|^2 dy \right)^{1/2}$$

$$\leq \|f\|_{L^2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2^{2j} C}{(1+2^j|x-y|)^4} dy \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow -\infty)$$

定理 5 を使えば、§ 2 で挙げた例 3, 例 4, 例 5 の  $g(x)$  が multiresolution approximation の条件 (ii) を満たすことが直ちにわかる。

### § 5 Wavelet $\psi(x)$ の構成

multiresolution approximation  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  に対し、 $V_j \subset V_{j+1}$  となる  $V_j$  と  $V_{j+1}$  に対する直交補空間を  $W_j$  で表す。  $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$  である。  $\cup V_j = L^2(\mathbb{R})$ ,  $\cap V_j = \{0\}$  となる。  $\oplus W_j = L^2(\mathbb{R})$  となる。  $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  が  $W_j$  の正規直交基底に成ることを示すとして  $\psi$  について条件を求めよう。

$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$  に対して、 $\varphi(x-k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(\frac{x}{2} - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\frac{x}{2} - k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  はそれぞれ  $V_0, V_{-1}, W_{-1}$  の正規直交基底であることが示される。

$\varphi(\frac{x}{2}) \in V_{-1} \subset V_0$  より  $\varphi(\frac{x}{2}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi(x-k)$  と書けよ. Fourier 変換すれば.

$$\hat{\varphi}(2z) = m_0(z) \hat{\varphi}(z)$$

とわかる. さらに  $m_0(z) = \sum \frac{1}{2} \alpha_k e^{-i k z}$  より  $m_0(z)$  は  $2\pi$  周期で  $L^2(0, 2\pi)$  に属する.  
同様に  $\psi(\frac{x}{2}) \in W_{-1} \subset V_0$  より

$$\hat{\psi}(2z) = m_1(z) \hat{\psi}(z) \quad m_1(z) \text{ } 2\pi\text{-per} \quad m_1 \in L^2(0, 2\pi)$$

Lemma 6  $m_0(z), m_1(z)$  は以下 1), 2) が成り立つ.

$$1) \quad |m_0(z)|^2 + |m_0(z+\pi)|^2 = |m_1(z)|^2 + |m_1(z+\pi)|^2 = 1 \quad \text{a.e. } z$$

$$2) \quad m_0(z) \overline{m_1(z)} + m_0(z+\pi) \overline{m_1(z+\pi)} = 0 \quad \text{a.e. } z$$

証明) 1) は  $1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(z+2k\pi)|^2 = \sum_k |m_1(z+k\pi)|^2 |\hat{\varphi}(z+k\pi)|^2 \quad m_1 \text{ は } 2\pi\text{-per より}$   
 $= |m_1(z)|^2 \sum_{k \text{ even}} |\hat{\varphi}(z+k\pi)|^2 + |m_1(z+\pi)|^2 \sum_{k \text{ odd}} |\hat{\varphi}(z+k\pi)|^2$   
 $= |m_1(z)|^2 + |m_1(z+\pi)|^2$

2) は  $\varphi(\frac{x}{2}-k)$  と  $\psi(\frac{x}{2}-l)$  の直交性より.

$$0 = \int \varphi(\frac{x}{2}-k) \overline{\psi(\frac{x}{2}-l)} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi 4 [m_0(z) \overline{m_1(z)} + m_0(z+\pi) \overline{m_1(z+\pi)}] e^{-i(2k-l)z} dz$$

とわたり,  $4 [m_0(z) \overline{m_1(z)} + m_0(z+\pi) \overline{m_1(z+\pi)}]$  の Fourier 係数が全て 0 となる.

よって  $\forall f(x) \in V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}$  はこれら 2 つの基底で展開できると.

$$f(x) = \sum_k \alpha_k \varphi(x-k) = \sum_k \alpha_k \frac{1}{\sqrt{2}} \varphi(\frac{x}{2}-k) + \sum_k \beta_k \frac{1}{\sqrt{2}} \psi(\frac{x}{2}-k)$$

よって  $\{\alpha_k\}, \{\beta_k\}, \{\gamma_k\} \in l^2(\mathbb{Z})$  である.

両辺を Fourier 変換すれば,

$$\hat{f}(z) = a(z) \hat{\varphi}(z) = b(z) \hat{\varphi}(2z) + c(z) \hat{\psi}(2z)$$

よって,  $a(z) \in L^2(0, 2\pi)$  は  $2\pi$ -per,  $b(z)$  と  $c(z)$  は  $L^2(0, \pi)$  の元で  $\pi$ -per.

$\hat{\varphi}(2z) = m_0(z) \hat{\varphi}(z)$ ,  $\hat{\psi}(2z) = m_1(z) \hat{\psi}(z)$ , を代入し,  $\sum_k |\hat{\varphi}(z+2k\pi)|^2 = 1$  から,

$\forall z \in [0, 2\pi]$  に対し,  $k$  が与えられ,  $\hat{\varphi}(z+2k\pi)$  と  $\hat{\psi}(z+2k\pi)$  とで置き,  $m_0, m_1$  は  $2\pi$ -per となる.

$$a(z) = b(z) m_0(z) + c(z) m_1(z)$$

が得られる. Lemma 6 を使うと,

$$\int_0^{2\pi} |a(z)|^2 dz = \int_0^\pi |b(z)|^2 dz + \int_0^\pi |c(z)|^2 dz$$

よってわかる.

$$\begin{pmatrix} a(z) \\ a(z+\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_0(z) & m_1(z) \\ m_0(z+\pi) & m_1(z+\pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b(z) \\ c(z) \end{pmatrix} = S(z) \begin{pmatrix} b(z) \\ c(z) \end{pmatrix}$$

と書いておくときの行列,  $S(z)$  は  $z=0$  付近に属する. 同様より  $m_1(z)$  とし,

$$m_1(z) = e^{-i(z+\pi)} \overline{m_0(z+\pi)}$$

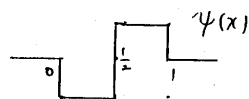
(これは位相差を表す定数) とおけばよい. よって 2 辺の定理  $\eta$  が成り立つ.

定理 7  $\hat{\varphi}(z) = m_1(z) \hat{\varphi}(z) = e^{-i(z+\pi)} m_0(z+\pi) \hat{\varphi}(z)$  とおくと,  
 $\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  の正規直交基底をなす.

以下  $\lambda=0$  とし  $Wavelet$  の例を挙げる.

例 1'  $g(x)$  を  $[0,1)$  の特性関数とすると,  $\varphi(x) = g(x)$  ぞ.

$$\psi(x) = \begin{cases} -1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$



$\{2^{j/2} \psi(2^j x - k)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  は Haar basis と呼ばれるもの.

例 2'  $g(x)$  は例 2 と同じで台が  $[-1,1]$ ,  $g(0)=1$  なる三角形とす. このとき

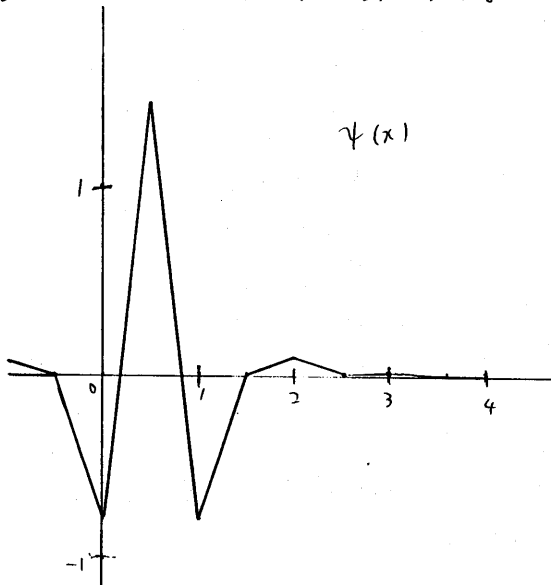
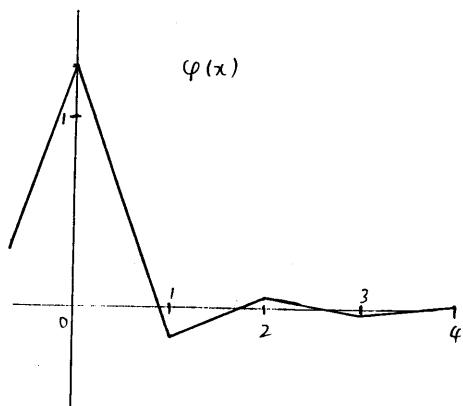
$$\hat{g}(z) = \left[ \frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \right]^2$$

とすると,  $\sum_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z+2n\pi)^2}$  とおくと

$$\hat{\varphi}(z) = \frac{1}{z^2 \sqrt{\sum_+}} \text{ とおす.}$$

$\varphi(x)$ : 各閉区間  $[k, k+1]$  上では線分で無限回振動する. even

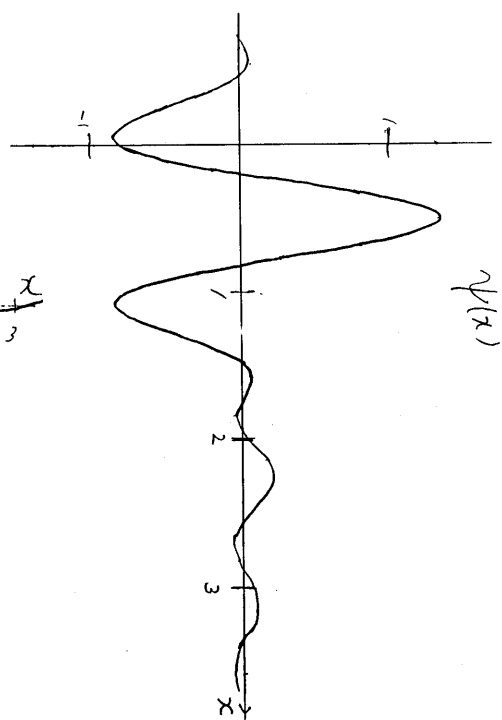
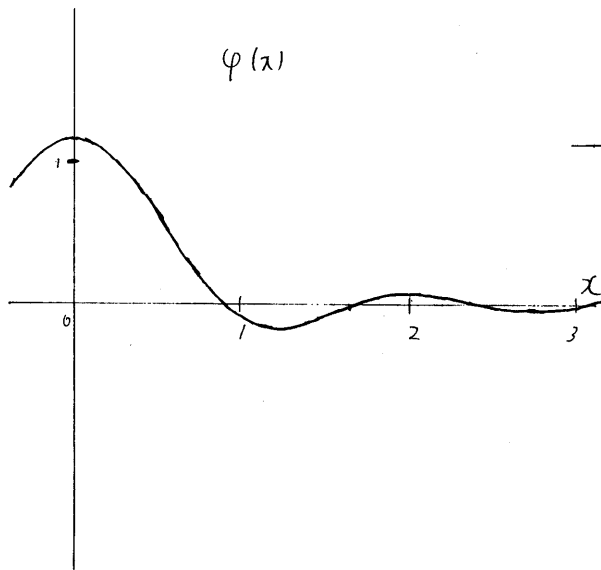
$\psi(x)$ : 各閉区間  $[k, k+\frac{1}{2}]$ ,  $[k+\frac{1}{2}, k+1]$  上では線分で無限回振動する.  $x=\frac{1}{2}$  で  
 奇対称.



例 3'  $g(x)$  が basic spline のときも,  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  の形は上の図をたまたました  
 したもの.  $g \in C^{m-1}$  ならば,  $\varphi, \psi \in C^{m-1}$  ぞ.  $\varphi$  は各  $[k, k+1]$  上では  $m$  次以  
 下の多項式,  $\psi$  も各  $[k, k+\frac{1}{2}]$ ,  $[k+\frac{1}{2}, k+1]$  上では  $m$  次以下の多項式ぞ.  
 とすとも無限回振動する.



例5 例5の  $\varphi(x)$  をつかうと、 $\varphi, \psi$  は急減少関数になる。  $\psi$  は全てのモーメントが0になる。  $\varphi(x)$  は even,  $\psi(x)$  は  $x = \frac{1}{2}$  で奇関数。



§6  $E_j : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow V_j$  の性質

$V_j$  の近似性について結果を述べよう。

Prop 8  $f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ ,  $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $\varphi(x) \in C^3(\mathbb{R})$   
 ならば、  $E_j f(x) \rightarrow f(x)$  ( $j \rightarrow +\infty$ )  $\mathbb{R}$  上一様収束。

定理9 (Mallat)  $\varphi(x)$  が次の 1) 2) 3) を満たすとき、

1)  $\exists C > 0$   $|\varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-3-\epsilon}$

2)  $\int x^n \varphi(x) dx = 0$   $n = 1, 2, \dots, q+1$

3)  $\exists C > 0$   $|\frac{d^n}{dx^n} \varphi(x)| \leq C(1+|x|)^{-1-\epsilon}$   $n \leq q$

このとき、  $f \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $0 < s \leq \epsilon$  に対して

$f \in H^s \Rightarrow \|f - E_j f\|_{L^2} = \epsilon_j 2^{-sj} \Rightarrow \sum \epsilon_j^2 < +\infty$

参考文献

1. Y. Meyer, "Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs", Séminaire Bourbaki, 1985/86, Exposé n° 662
2. Y. Meyer, "Ondelettes, fonctions splines et analyses graduées", Cahiers mathématiques de la décision n° 8903.
3. S. Mallat, "Multiresolution approximation and Wavelets", preprint
4. K. Grochenig, "Analyse multiéchelles et bases d'ondelettes", C.R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, 13-17, 1987
5. I. Daubechies, S. Mallat, Y. Meyer, "Analyses graduées et ondelettes", manuscript
6. I. Daubechies, A. Grossman, Y. Meyer, "Painless non orthogonal expansions", J. Math. Phys. 27 (5), May 1986.
7. G. Batten, "A block spin construction of ondelettes. Part I: Lemarié functions", Commun. Math. Phys. 110, 601-615 (1987)
8. G. Batten, "A block spin construction of ondelettes. Part II: the QFT connection", Commun. Math. Phys. 114, 93-102 (1988)
9. Y. Meyer, "Wavelets viewed by a mathematician"