数 値 解 析 31－6
（1989．12．8）

高次展開係数の組み込みによる準ミニマックス近似法
―― 有理式近似の場合 ――

山田 秀二　井上 倫夫　小林 康浩

鳥取大学工学部

有理式近似は除算を１回必要とするが，多くの場合，多項式近似より少ない演算回数で精度の良い近似を実現できる．本報告では，有理式の準ミニマックス近似法について述べる．具体的には，有理式の分母，分子をチェビシェフ多項式とし，近似誤差が一様になるように有理式の各係数を決定する．各係数値はチェビシェフ－パデ近似法で求める．この時，多項式近似のミニマックス化アルゴリズムを適用する．条件式は，チェビシェフ展開の各係数を要素とする非線形連立方程式で表されるが，適当な初期値を用いて反復法で求めることが出来る．

NEAR MINIMAX APPROXIMATION BY RATIONAL FUNCTIONS OF CHEBYSHEV-PADÉ TYPE

Shuji YAMADA*, Michio INOUE and Yasuhiro KOBAYASHI

Department of Information and Knowledge Engineering, Faculty of Engineering, Tottori University
Minami 4-101, Koyama-cho, Tottori, 680, JAPAN

**Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering*

This paper shows how to determine the values coefficients of the Chebyshev-Padé systems with minimax error in approximation of some important functions. Its mathematical principle is the same idea as the minimax approximation using Chebyshev polynomials of a finite degree. Tuning up of the Chebyshev-Padé approximation can be done by taking some fractions given as the solutions of simultaneous nonlinear equations.

1　はじめに

科学技術計算によく現れる関数の任意の引数の値を算出するには，予め用意された近似式を利用すると便利なのでいろいろ工夫されている[1]～[14]．好ましい近似式の条件は，なるべく少ない演算で限りなく真値に近い値が得られることである．

被近似関数の形にもよるが，有理式近似は除算を１回必要とするが，多項式近似より少ない演算回数で精度の良い近似を実現できる．本報告では，有理式の準ミニマックス近似法について述べる．具体的には，有理式の分母，分子をチェビシェフ多項式とし，誤差分布が一様になるように有理式の各係数を決定する．各係数値はチェビシェフ－パデ近似法で求める．この有理式近似の誤差をチェビシェフ多項式で近似する．この時，各係数に多項式近似のミニマックス化アルゴリズムを適用する．条件式は，チェビシェフ展開の各係数を要素とする非線形連立方程式で表されるが，適当な初期値を用いて反復法で求めることが出来る．

2　チェビシェフ－パデ近似

与えられた関数 $f(x)$ が［$-1 \leqq x \leqq 1$］の区間内で特異点がなく，おとなしい関数であれば，チェビシェフ展開し，

$$f(x) = \sum_{r=0}^{\infty}{}' C_r T_r(x) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{r=1}^{\infty} C_r T_r(x) \qquad (1)$$

で与えられる場合に，近似式として次式のような有理式を考える．

$$g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m}{}' a_j T_j(x)}{\sum_{i=0}^{k}{}' b_i T_i(x)} \qquad (2)$$

ここでは，$N=m+k$，$b_0=1$ とすれば，

$$\sum_{i=0}^{k}{}' b_i \left(C_{|r-i|} + C_{r+i} \right) = 0 \qquad r=m+1, m+2, \cdots, N \qquad (3)$$

$$a_0 = \sum_{i=0}^{k}{}' b_i C_i$$

$$a_j = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}{}' b_i \left(C_{|j-i|} + C_{j+i} \right) \qquad j=0,1,\cdots,m \qquad (4)$$

となるように a_j，b_i を決定する．これを有理式のチェビシェフ－パデ近似といい，第０次近似とする． $f(x)=\log_e(1+x/3)$ ［$-1 \leqq x \leqq 1$］のときの第０次近似の誤差を図１に破線で示す．これは，多項式のＮ次打ち切り近似に相当する．

3　折り返し計算法

第０次近似では，誤差の偏差点の数（両端を含めて）はＮ＋２個あるが，偏差点における誤差の絶対値は等しくなく，これを一様化できれば，誤差の絶対値の最大を小さくできるものと期待される．誤差の主要項は，$T_{N+1}(x)$ 位であると考えられる．そこで，$|T_{N+1}(x_p)| = 1$ となる $x_p(p=0,1,\cdots,N+1)$ で誤差の絶対値が相等しくなるように各係数 $a_j(j=0,1,\cdots,m)$，$b_i(i=0,1,\cdots,k)$ を決定する．（１），（２）式より，

$$\frac{\sum\limits_{j=0}^{m}{}' a_j T_j(x_p)}{\sum\limits_{i=0}^{k}{}' b_i T_i(x_p)} - \sum_{r=0}^{\infty}{}' C_r T_r(x_p) = - E_{N+1}(-1)^p \qquad (5)$$

と表せる．従って，各係数は次の式により求められる．

$$E_{N+1} = \sum_{i=0}^{k}{}' b_i (C_{N+1-i} + C_{N+1+i}) \qquad (6)$$

$$E_{N+1}\, b_{N+1-j} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k}{}' b_i (C_{|j-i|} + C_{j+i} + C_{2(N+1)-(j-i)} + C_{2(N+1)-(j+i)})$$
$$j=m+1, m+2, \cdots, N \qquad (7)$$

$$a_0 = \sum_{i=0}^{k}{}' b_i (C_i + C_{2(N+1)-i} + C_{2(N+1)+i})$$

$$a_j = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{k}{}' b_i (C_{|j-i|} + C_{j+i} + C_{2(N+1)-(j-i)} + C_{2(N+1)-(j+i)})$$
$$j=0, 1, \cdots, m \qquad (8)$$

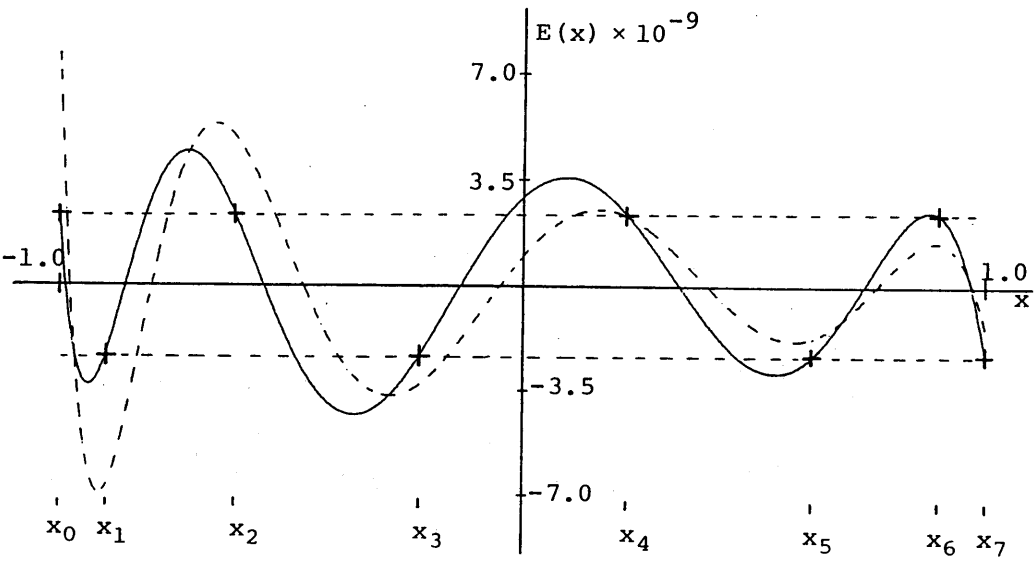

図１　誤差曲線　　　$\log_e(1 + \frac{1}{3}x)$　　$m = 3,\ k = 3$

ところが，（６）～（８）式において未知数　a_j，b_i，E_{N+1}を求めるためには，非線形連立方程式を解かなければならない．一般に，反復法によって解を得る．ここでは，（３）式で求めたb_iを初期値として利用する．関数$\log_e(1+x/3)$，m=k=3の計算結果を図１に示す．実線が折り返し計算法を適用した場合の近似誤差である．破線は，（３），（４）式のチェビシェフ－パデ近似による誤差を示す．　x_p(p=0,1,・・・,N+1)で $|E(x_p)|$がほぼ同一の値になっている．さらに誤差の偏差点は，前記のチェビシェフ－パデ近似より一様化されている．

4　準ミニマックス近似法

前節の折り返し計算法を適用した場合の近似誤差をさらに一様化する方法について考える．ここでは，有理式近似の誤差を

$$E(x) = e_{N+1}T_{N+1}(x) + \sum_{r=1}^{\ell}\left(e_{N+1+r}T_{N+1+r}(x) + e_{N+1-r}T_{N+1-r}(x)\right) \tag{9}$$

とおく．この時，多項式近似のミニマックス化の過程で採用した誤差一様化アルゴリズムによれば，誤差の主要項e_{N+1}を中心に高次項と低次項に次のような

$$e_N = -e_{N+2}\,,\quad e_{N-1} = -e_{N+3} + \frac{(e_{N+2})^2}{e_{N+1}}\,,\quad e_{N-2} = -e_{N+4} \tag{10}$$

の関係式が満たされている．従って，（10）式を条件に各係数a_j，b_i，e_nを決定すればよい．ここで，（１），（２），（９）式より，

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}{}'\sum_{i=0}^{k}{}'\frac{1}{2}\left(C_{|j-i|} + C_{j+i}\right)b_iT_j(x) - \sum_{j=0}^{m}{}'a_jT_j(x)\\ = \sum_{n=N+1-\ell}^{N+1+\ell}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\left(e_{|n-i|} + e_{n+i}\right)b_iT_n(x)\end{aligned} \tag{11}$$

と表せる．従って，各係数を求めるには

$$\sum_{i=0}^{k}{}'\left(C_{|j-i|} + C_{j+i}\right)b_i = \sum_{i=0}^{k}{}'\left(e_{|j-i|} + e_{j+i}\right)b_i \qquad j = m+1,\ m+2,\ \cdots,N+1,\cdots,N+1+\ell \tag{12}$$

$$\sum_{i=0}^{k}{}'C_ib_i = a_0$$

$$\sum_{i=0}^{k}{}'\left(C_{|j-i|} + C_{j+i}\right)b_i = a_j + \sum_{i=0}^{k}{}'\left(e_{|j-i|} + e_{j+i}\right)b_i \qquad j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m \tag{13}$$

ただし，$e_j = 0$（j=0,1,・・・,N−ℓ）となる非線形連立方程式を解けばよい．

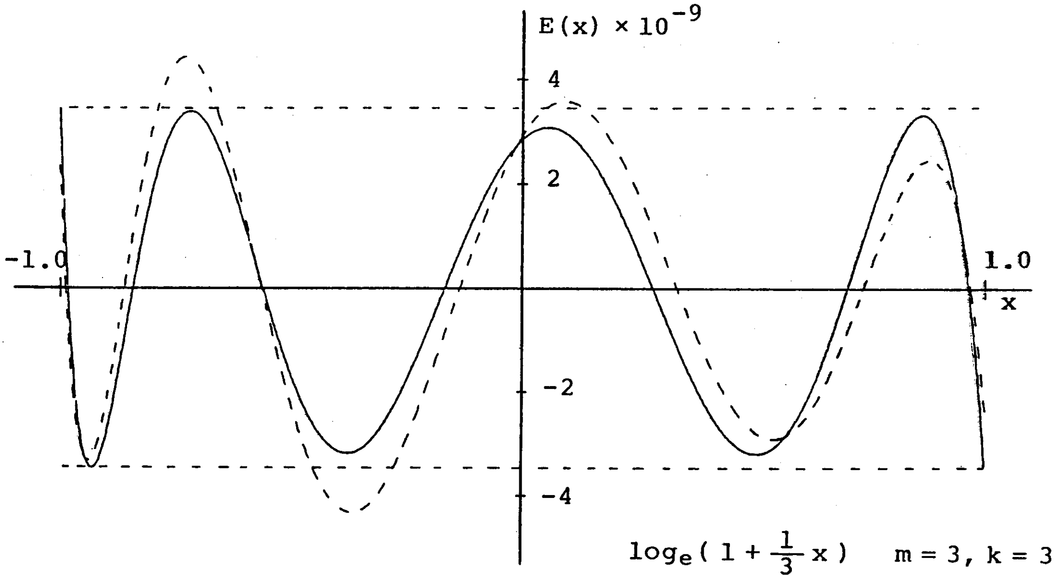

図２　誤差曲線

前節の（３）式で得られた b_i を初期値として（12），（13）式を反復法で求めた結果を図２に実線で示す．破線は，折り返し計算法による結果である．さらに一様化されている．実用上は，十分に準ミニマックス近似法として利用できる．

5　検討

5－1　有理式の分母，分子の次数と誤差について

近似式を

$$g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{m}{}' a_j T_j(x)}{\sum_{i=0}^{k}{}' b_i T_i(x)} \qquad (14)$$

とする時，誤差の指標は N=m+k で表される．図３に同一のＮについて誤差の最大値とｍ，ｋの関係について示す．破線は，チェビシェフ係数の大きさを示す．この例では，有理式近似式を用いると，さらに誤差を２，３桁小さくできることがわかる．また，Ｎが偶数の時は m=k の時，Ｎが奇数の時は m=k+1 の時が最も誤差を小さくできる．

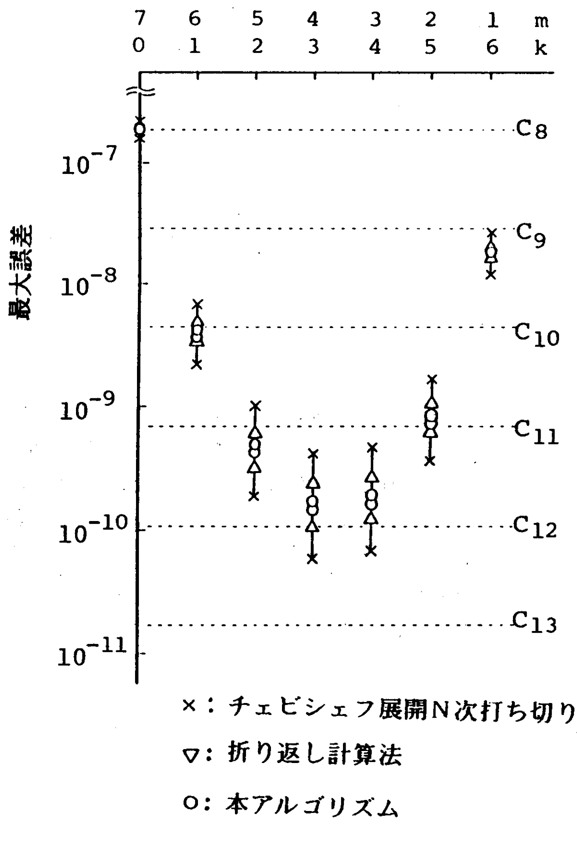

図３　近似次数と誤差

5－2　非線形連立方程式の反復解法の収束について

(a) 非線形連立方程式(6)～(8)式の反復解法については，ほぼ数回の計算で収束する．(13)，(14)式の反復解法についても同様に数回の計算で収束する．図4は，各 b_i について最終値との差をプロットしたものであり，各係数とも数回の反復計算で収束している．

(b) 近似精度を上げる時，単に近似式の次数を上げるだけでは能率が悪い場合がある．近似区間を狭くすることがよい結果をもたらす．近似区間は、区間変換の操作を必要とするので，実用上は，この区間変換の計算時間と近似式の計算時間とのトレードオフの関係になる．

図5は，各近似区間での各近似次数について準ミニマックス近似の誤差の絶対値の最大値をプロットしたものである．

5－3　数値計算法

(11)，(12)式の反復計算法の具体例として m=k=3 について付録に示す．また，実行結果を図6に $\log_e(1+x/17)$，図7に．$\tan^{-1}(x/8)$ を示す．

6　おわりに

以上，有理式による準ミニマックス近似法について述べた．ミニマックス化の過程は，多項式近似におけるほどには単純化できないが，従来のチェビシェフ－パデ近似法を少し改良するだけでよく，有理式近似の準ミニマックス化アルゴリズムとして実用上は，差し支えない．

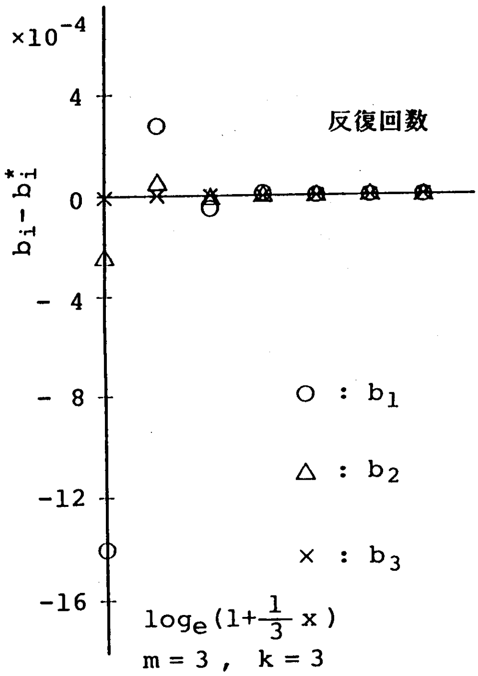

図4　反復法の収束

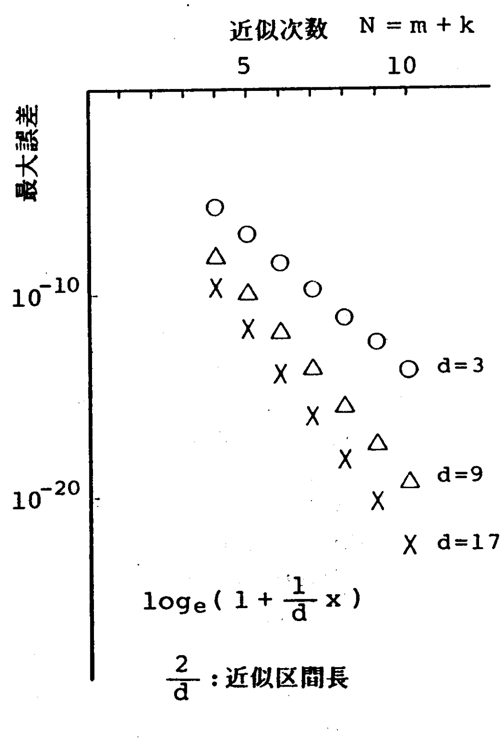

図5　近似区間長と最大誤差

参考文献

[1] L.A.Lyusternik, O.A.Chervonenkis and A.R.Yanpol'skii : " Handbook for Computing Elementary Functions " , Translated from Russian by G.J.TEE , PERAGMON PRESS , (1965)

[2] 一松 信: " 近似式 " , 竹内書店 , (1963)

[3] 赤坂 隆: " 数値計算 " , コロナ社 , (1967)

[4] 鳥居 達生・牧之内 三郎: " チェビシェフ多項式係数の性質と最適補間多項式次数の決定について " , 電子情報通信 , Vol.J72-A, No.8, pp.1296-1302, (1989)

[5] 一松 信: " 初等関数の数値計算 " , 教育出版, (1974)

[6] A.RALSTON and P.RABINOWITZ : " A FIRST COURSE NUMERICAL ANALYSIS " McGraw-Hill , (1978)

[7] 戸田 英雄・小野 今美 共訳: " 電子計算機のための数値解析の理論と応用 " ブレイン図書出版(株), (1986) [6]の訳本

[8] 山内 二郎: " 奇関数の一様最良化多項式近似式の折りたたみ計算法(特に $\tan^{-1}x$ の小区間の一様最良多項式近似式), 第4回プログラミング報告集 D52, (1963)

[9] 山内 二郎: " 一様最良化多項式近似式の折りたたみ計算法 " 数学 15.1, pp.40-45 , (1974)

[10] 山内 二郎・森口 繁一・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 I " , 培風館 , (1965)

[11] 山内 二郎・森口 繁一・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 II " , 培風館 , (1967)

[12] 山内 二郎・宇野 利雄・一松 信・宇野 利雄: " 電子計算機のための数値計算法 III " , 培風館 , (1972)

[13] 河口 万由香・伊達 惇: " チェビシェフ多項式係数の性質と最適補間多項式次数の決定について " 電子情報通信 , Vol.J72-A, No.8, pp.1296-1302 , (1989)

[14] 浜田 穂積: " 有理式近似および連分数近似の最良化について " 情報処理 , Vol.19 , No.11 , (1978)

[15] Y.Kobayashi, M.Ohkita and M.Inoue : " Economization on a Chebyshev Expantion by Way of Turning in the Truncation Error" Proc. IX Internat. Sym. Math. Programming, Budapest, (1976)

[16] Y.Kobayashi and M.Inoue : " Combination of Two Discrete Fourier Transforms of Data Sampled Separately at Different Rates " , J.Inform. Processing , Vol.2 , No.4 , pp.203-207 , (1980)

[17] M.Inoue and Y.Kobayashi : " How to Increase the Maximum Frequency of DFT while keeping the Speed of Sampling " J.Inform. Processing , Vol.7 , No.7 , (1984)

付録　数値計算法の具体例

本文（12），（13）式の解法の具体例として m=k=3 (N=6) の場合について示す.

（Step 0）

折り返し近似の結果の b_i $(i=0,1,2,3)$ を初期値として利用する.

（Step 1）

（12）式で $e_6=-e_8$，$e_5=-e_9$，$e_4=-e_{10}$ とし，b_i を既知であるとすれば，

$$\begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_0-b_2 & b_1-b_3 & b_2 \\ b_2 & b_1-b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_7 \\ e_8 \\ e_9 \\ e_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_7 & C_6+C_8 & C_5+C_9 & C_4+C_{10} \\ C_8 & C_7+C_9 & C_6+C_{10} & C_5+C_{11} \\ C_9 & C_8+C_{10} & C_7+C_{11} & C_6+C_{12} \\ C_{10} & C_9+C_{11} & C_8+C_{12} & C_7+C_{13} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \tag{A-1}$$

となる. この式より e_7，e_8，e_9，e_{10} を求める.

（Step 2）

（10）式より誤差一様化の条件として

$$\begin{aligned} e_6 &= -e_8 \\ e_5 &= -e_9 + \frac{(e_8)^2}{e_7} \\ e_4 &= -e_{10} \end{aligned} \tag{A-2}$$

を求める.

（Step 3）

（12）式より e_n を既知であるとすれば

$$\begin{bmatrix} C_3+C_5-e_5 & C_2+C_6-e_6 & C_1+C_7-e_7 \\ C_4+C_6-(e_6+e_4) & C_3+C_7-e_7 & C_2+C_8-e_8 \\ C_5+C_7-(e_7+e_5) & C_4+C_8-(e_8+e_4) & C_3+C_9-e_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_4+e_4 \\ -C_5+e_5 \\ -C_6+e_6 \end{bmatrix}$$

として b_1^*, b_2^*, b_3^* を求める. (A-3)

(Step 4)

b_i^* が収束するまで $b_i=b_i^*$ として step 1 ∿ step 3 を繰り返す．この時，収束条件は，

$$|b_i^* - b_i| \leq \varepsilon \quad i=1,2,3 \tag{A-4}$$

とする．

(Step 5)

b_i が求められたら，(13) 式より

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ C_1 & C_0+C_2 & C_1+C_3 & C_2+C_4-e_4 \\ C_2 & C_1+C_3 & C_0+C_4-e_4 & C_1+C_5-e_5 \\ C_3 & C_2+C_4-e_4 & C_1+C_5-e_5 & C_0+C_6-e_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ b_1^* \\ b_2^* \\ b_3^* \end{pmatrix} \tag{A-5}$$

として $a_j\ (j=0,1,2,3)$ を求める．

(Step 6)

べき級数への変換はそれぞれ

$$\sum_{j=0}^{m} A_j x^j = \sum_{j=0}^{m}{}' a_j T_j(x)$$

$$\sum_{i=0}^{k} B_i x^i = \sum_{i=0}^{k}{}' b_i T_i(x) \tag{A-6}$$

として A_j，B_i を求める．
ただし，次式を用いる．

$$T_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^n n}{2(n-r)} \binom{n-r}{r} (2x)^{n-2r} \qquad [\ ]\ :\ \text{Gauss の記号} \tag{A-7}$$

1° $f(x) = \log_e(1+\frac{1}{17}x) \qquad -1 < x < 1$

$$g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{4} A_j x^j}{\sum_{i=0}^{4} B_i x^i}$$

最大絶対誤差 $= 0.7547 \times 10^{-18}$

A_0	= -0.00000 00000 00000 00009 82		B_0	= 0.49888 89756 49858 79705 82
A_1	= 0.02934 64103 32344 63184 33		B_1	= 0.05872 18601 18418 72014 58
A_2	= 0.00259 10973 50132 14496 96		B_2	= 0.00222 19845 03390 52110 02
A_3	= 0.00006 29582 81231 45459 75		B_3	= 0.00002 90698 61471 78569 15
A_4	= 0.00000 03565 38260 96826 98		B_4	= 0.00000 00855 95855 84637 79

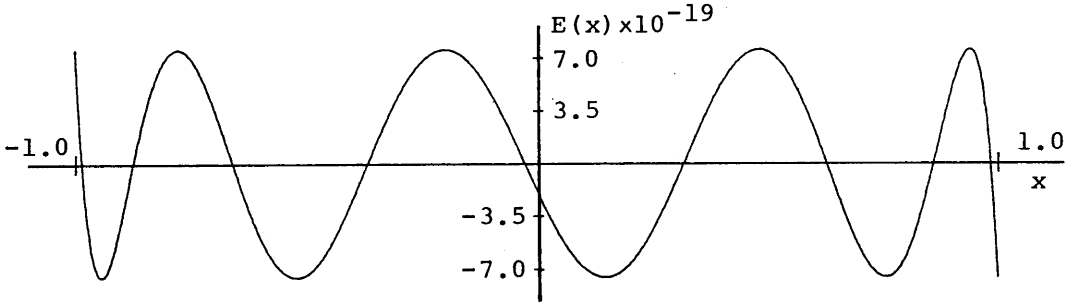

図6　誤差曲線

2° $f(x) = \tan^{-1}(\frac{1}{8}x) \qquad -1 < x < 1$

$$g(x) = \frac{\sum_{j=0}^{3} A_{2j+1} x^{2j+1}}{\sum_{i=0}^{3} B_{2i} x^{2i}}$$

最大絶対誤差 $= 0.1518 \times 10^{-21}$

A_1	= 0.06171 87392 62985 81403 47494	B_0	= 0.49374 99141 03886 51228 70224
A_3	= 0.00123 28059 87198 86117 11532	B_2	= 0.01243 40620 33548 63128 12920
A_5	= 0.00000 59209 75253 09367 91617	B_4	= 0.00008 80196 59258 21507 93657
A_7	= 0.00000 00039 55829 47924 53526	B_6	= 0.00000 01520 22775 49253 62223

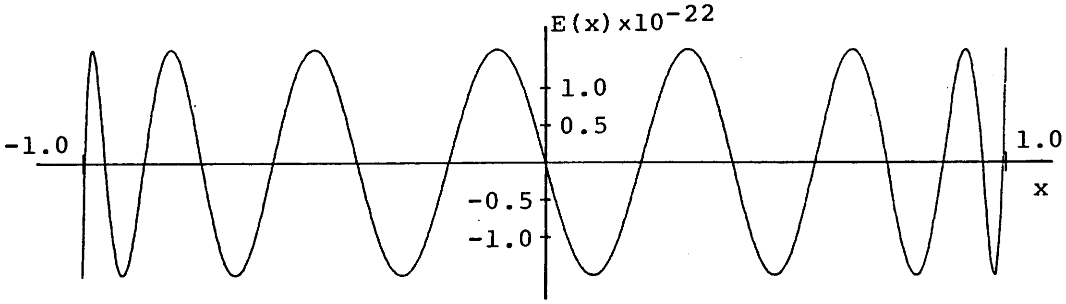

図7　誤差曲線