

境界要素法による等角写像の計算

安藤 茂

津田塾大学数学科

平面内の与えられた有界単連結領域上の Green 関数を境界要素法で求めることにより単位円への等角写像を計算する方法を提案する。また、境界上の対応が得られれば、逆写像の Taylor 展開係数が簡単な境界積分により得られ、これにより逆写像がただちに求められることを示す。

Numerical Conformal Mapping
Based on the Boundary Element Technique

Shigeru Ando

Department of Mathematics

Tsuda College

Kodaira-si, Tokyo 187, Japan

We propose a numerical method of calculating conformal map of a given bounded and simply-connected region to the unit circle, based on the idea of calculating the Green function of that region by means of the boundary element technique. We also show that, once the correspondence at the boundary is established, the coefficients of Taylor expansion of the inverse map are obtained via simple boundary integration, and thus the inverse map can readily be calculated.

§ 1. 定式化

D を複素平面 C の単連結有界領域とし、その境界 ∂D は区分的なめらかな閉曲線であるとする。このとき Caratheodory の定理により、 D で正則、 $D + \partial D$ で連続で ∂D を単位円周に、 D をその内部に、1対1に移す写像 f が存在する。

f は $f(z_0) = 0$ なる $z_0 \in D$ と $f(z_1) = 1$ なる $z_1 \in \partial D$ を決めると一意的に決まる。

$$f(z) = e^{2\pi(u+vi)} \quad (u, v \in \mathbb{R})$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} u &= u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log |f(z)|, \\ v &= v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \arg f(z) \quad (z = x+yi, x, y \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

であるから、 $z \in \partial D$ で $u = 0$ 、 $z \in D$ で $u < 0$ 、 $z \rightarrow z_0$ で $u \rightarrow -\infty$ である。また v は多価関数で z が z_0 のまわりを正の向きに一周するとき 1 だけ増加する。

∂D の点において外向き法線単位ベクトルを $\vec{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$ とすると、左回り接線単位ベクトルは $\vec{s} = \begin{bmatrix} -n_2 \\ n_1 \end{bmatrix}$ となる。したがって Cauchy-Riemann の方程式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} &= n_1 \frac{\partial u}{\partial x} + n_2 \frac{\partial u}{\partial y} = n_1 \frac{\partial v}{\partial y} - n_2 \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial s} &= -n_2 \frac{\partial u}{\partial x} + n_1 \frac{\partial u}{\partial y} = -n_2 \frac{\partial v}{\partial y} - n_1 \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial n} \end{aligned}$$

が得られる。そこで、任意の開領域 $G \subset D$ に対し

$$\iint_G \nabla^2 u \, dx dy = \oint_{\partial G} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \oint_{\partial G} \frac{\partial v}{\partial s} \, ds = [v]_{\partial G}$$

となり、これは $z_0 \in G$ のとき 1、 z_0 が G の外部にあるとき 0 に等しい。

このことは、 $\nabla^2 u(x, y) = \delta(x-x_0, y-y_0)$ ($z_0 = x_0 + y_0 i$, $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$)、すなわち $u(x, y)$ が領域 D の z_0 を特異点とする Green 関数であることを意味している。

2次元 Laplace 作用素の基本解は

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{|z|} = \frac{1}{2\pi} \log(L/\sqrt{x^2+y^2})$$

である。すなわち $c = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対し $\phi_c(x, y) = \phi(x-a, y-b)$ とするとき

$$\nabla^2 \phi_c(x, y) + \delta(x-a, y-b) = 0$$

である。ここで L は任意の正の定数であるが（基本解に任意の定数を加えても基本解である） ∂D 上の二点間の最大距離程度にとるのが数値計算上好ましい。

u と ϕ_c に対して Green の公式をもちいる：

$$\iint_D (\phi_c \nabla^2 u - u \nabla^2 \phi_c) dx dy = \oint_{\partial D} (\phi_c \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \phi_c}{\partial n}) ds .$$

∂D 上で $u=0$ であるから

$$\text{右辺} = \oint_{\partial D} \phi_c \frac{\partial u}{\partial n} ds = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n} \log \frac{L}{|z-c|} ds .$$

$c \in \partial D$ のとき

$$\text{左辺} = \phi_c(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{|z_0-c|} ,$$

$c \in D$ のとき

$$\text{左辺} = \phi_c(x_0, y_0) + u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{|z_0-c|} + u(a, b)$$

である。以上より、境界 ∂D における、未知量 $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ に関する積分方程式：

$$\oint_{\partial D} q \log \frac{L}{|z-c|} ds = \log \frac{L}{|z_0-c|} \quad (c \in \partial D) \quad (1.1)$$

が得られる。これによって境界 ∂D の各点において $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ が決まれば、 D 内部の点 $c = a+bi$ においては

$$2\pi u(a, b) = \oint_{\partial D} q \log \frac{L}{|z-c|} ds - \log \frac{L}{|z_0-c|} \quad (1.2)$$

によって u の値が表わせる。

v の値は、境界の点 $c \in \partial D$ においては $\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial n} = q$ より

$$v(c) = \int_{z_1}^z q ds \quad (1.3)$$

(∂D 上)

によって表わせる。

内部の点 $c \in D$ については以下のようにする。 v は D で多価であるが、 z_0 から z_1 に向う適当な曲線 C_1 を D から取り除いた領域を D' とするとき、 D' 内で z_0 のまわりを一周することはできないので v は D' で一価である。 C_1 を逆に z_1 から z_0 に向ってたどる曲線を C_2 とすると、 $\partial D' = C_1 + \partial D + C_2$ である。

D' において v と ϕ_c に対して Green の公式をもちいる：

$$\iint_{D'} (\phi_c \nabla^2 v - v \nabla^2 \phi_c) dx dy = \oint_{C_1 + \partial D + C_2} (\phi_c \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial \phi_c}{\partial n}) ds .$$

v は D' において調和であるから左辺は $v(a, b)$ に等しい ($c = a+bi$, $a, b \in \mathbb{R}$)。

∂D では $u = \text{const} = 0$ であるから $\frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial s} = 0$ であり、また

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{C_2} = -\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_{C_1}, \quad \frac{\partial \phi_c}{\partial n} \Big|_{C_2} = -\frac{\partial \phi_c}{\partial n} \Big|_{C_1}, \quad v \Big|_{C_2} = v \Big|_{C_1} + 1 \quad \text{などから}$$

$$\text{右辺} = -\oint_{\partial D} v \frac{\partial \phi_c}{\partial n} ds + \int_{C_1} \frac{\partial \phi_c}{\partial n} ds$$

となる。 ϕ_c は $\frac{1}{2\pi} \log \frac{L}{z-c}$ の実部であり、その虚部は $-\frac{1}{2\pi} \arg(z-c)$ であるから、Cauchy-Riemann の方程式より $\frac{\partial \phi_c}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \arg(z-c)$ となる。これから

$$2\pi v(a, b) = \int_{\partial D} v d \arg(z-c) - \arg \frac{z_1-c}{z_0-c} \quad (1.4)$$

が得られる。

§ 2. 境界要素法

境界 ∂D を N 個の線分境界要素 E_1, \dots, E_N に分割し (∂D が直線図形でないときは近似的に)、また各 E_k において $q = \frac{\partial u}{\partial n}$ は一定値 q_k であると仮定する。すなわち境界要素法としてはもっとも簡易な線分定数要素をもちいることにする。このとき (1.1) は

$$\sum_{k=1}^N q_k \int_{E_k} \log \frac{L}{|z-c|} ds = \log \frac{L}{|z_0-c|} \quad (c \in \partial D) \quad (2.1)$$

となる。各線分要素 E_k の長さを l_k とすると、 E_k において $\frac{\partial v}{\partial s} = q_k$ であるから、 $h_k = l_k q_k$ は E_k における v の変化量に等しい。

各要素 E_k の中点 c_k で (2.1) が成り立つことを要請すれば、未知数 h_1, \dots, h_N に関する次の連立一次方程式が得られる：

$$\sum_{j=1}^N a_{kj} h_j = \log \frac{L}{|z_0-c_k|} \quad \text{for } k=1, \dots, N. \quad (2.2)$$

ここで

$$a_{kj} = S_j(c_k),$$

$$S_k(c) = \frac{1}{l_k} \int_{E_k} \log \frac{L}{|z-c|} ds \quad \text{とする。}$$

L を ∂D 上の二点間の最大距離程度にとっておけば、係数 a_{kj} は対角成分が大きく、遠くで 0 に近くなり、方程式は数値解法上条件の良いものになる。

方程式 (2.2) を解いて h_1, \dots, h_N が求まったならば、 D 内部の点 $c = a+bi$ については (1.2) より 次のように u が計算できる：

$$2\pi u(a, b) = \sum_{k=1}^N h_k S_k(c) - \log \frac{L}{|z_0-c|}. \quad (2.3)$$

$S_k(c)$ は解析的に計算できる。結果のみ示すと、 E_k の始端と終端をそれぞれ点 A ,

点 B とし, c を点 C として次のように表わせる:

$$S_k(c) = \frac{1}{AB^2} \{ \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle (1 + \log \frac{L}{CA}) + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \rangle (1 + \log \frac{L}{CB}) - |\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}| \angle ACB \} . \quad (2.4)$$

数値積分をするよりもこれを使う方がより確実であるし, 関数呼出し (log や atan2) の回数も少なくすむ。

解 h_k の総和は理論上 1 になってほしいわけであるが, 幸いすべての実験で偏りは $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 程度にとどまった。

v の値は, ∂D 上では q が各 E_k で定数であるので (1.3) からすぐに計算できる。 D 内部の点 $c = a + bi$ においては (1.4) より次のように求められる:

$$2\pi v(a, b) = \sum_{k=1}^N T_k(c) - \arg \frac{z_1 - c}{z_0 - c} \quad (2.5)$$

$$T_k(c) = \int_{E_k} v d\theta , \quad \theta = \arg(z - c) .$$

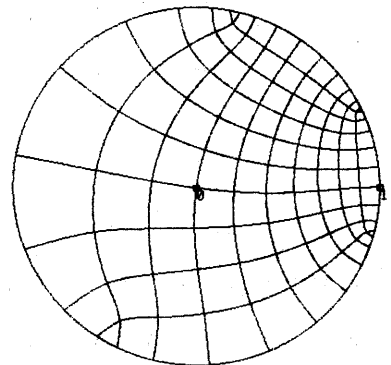
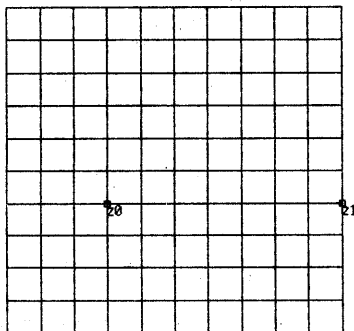
$T_k(c)$ も $S_k(c)$ と同様に解析的に計算できる。(2.4) のときと同じく点 A, B, C をとり, 点 A, 点 B での v の値をそれぞれ v_A, v_B とすると次のように表わせる:

$$T_k(c) = \frac{1}{AB^2} \{ (\langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle v_A + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA} \rangle v_B) \angle ACB + |\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}| (v_B - v_A) \log \frac{CB}{CA} \} . \quad (2.6)$$

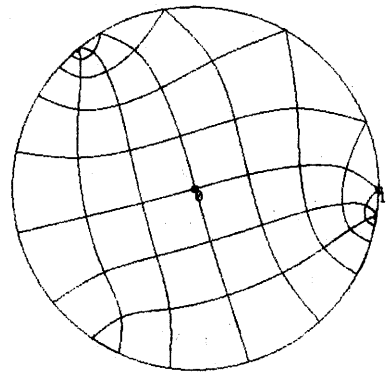
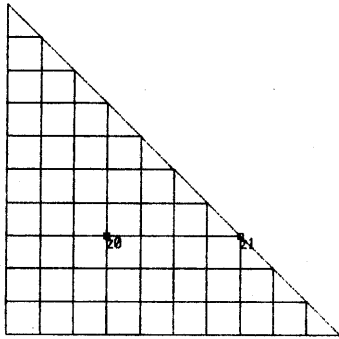
以下の実験例では左図が領域 D である。要素分割は境界上の格子点に区切られた線分を一つの境界要素とした。右図は, 各格子点の f による像を 3 次 spline 曲線で結んだものである。直交性が十分でないのは主として spline 曲線の責任である。

図 1

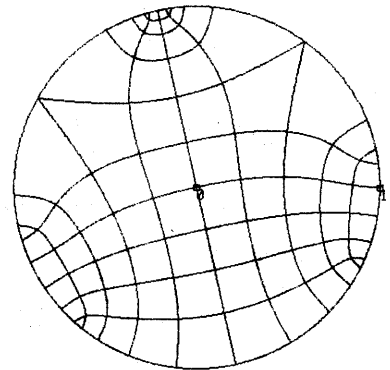
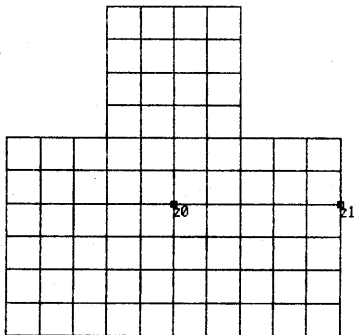
例 1 正方形



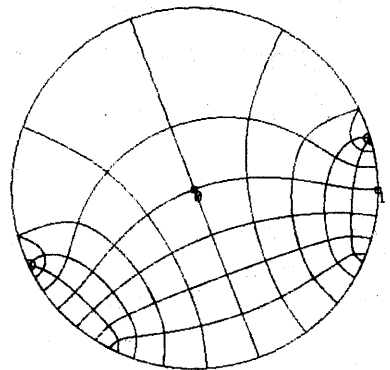
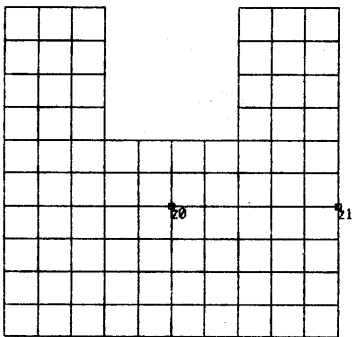
例2 直角二等辺三角形



例3 凸字形



例4 凹字形



§3. 逆写像

境界要素法により ∂D 上で求められた v をもちいれば, $D + \partial D$ から単位円への等角写像 $\zeta = f(z)$ の逆写像 $z = g(\zeta)$ ($|\zeta| \leq 1$) を簡単に計算することができる。

境界上では、 $\xi = e^{2\pi i v}$ であり、 z が v に関して区分的一次であることから一次補間によって v から z が求められる。

$|\xi| < 1$ では $g(\xi)$ の Taylor 展開を利用することができる。

$$g(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \xi^m \quad (3.1)$$

とすると、係数 a_m は次のように積分表示できる：

$$a_m = \frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=1} g(\xi) \xi^{-m-1} d\xi \quad (3.2)$$

単位円周上で $\xi = e^{2\pi i v}$ であるから v による積分になおす：

$$a_m = \int_0^1 z e^{-2\pi i m v} dv. \quad (3.3)$$

a_0 は、これから計算するのも容易であるが、実は g の定義より $a_0 = g(0) = z_0$ を使うことができる。 $m > 0$ では (3.3) を部分積分して

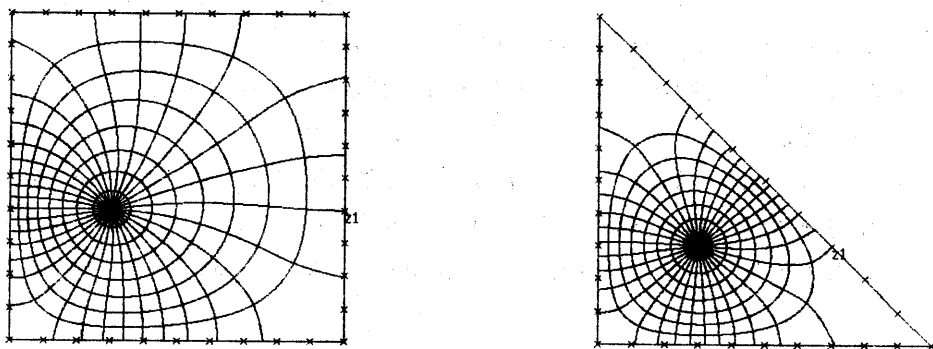
$$a_m = -\frac{1}{2\pi i m} \left[z e^{-2\pi i m v} \right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i m} \int_0^1 \frac{dz}{dv} e^{-2\pi i m v} dv$$

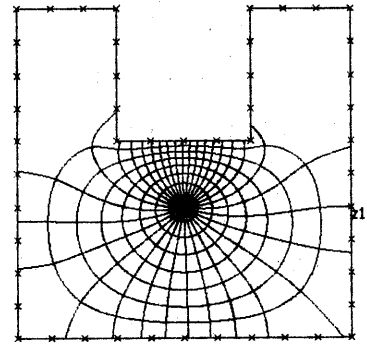
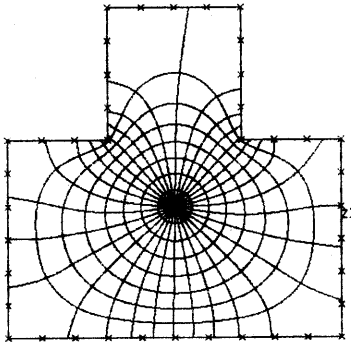
とすると第1項は 0 であり、また第2項の $\frac{dz}{dv}$ は各 E_k 内で定数であるので積分記号の外に出せて次のようになる。ここで Δ_k は E_k の両端での値の差を表わす。

$$a_m = \frac{1}{4\pi^2 m^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{h_k} \Delta_k z \Delta_k e^{-2\pi i m v} \quad (3.4)$$

次の図は、単位円内の点 $\xi_{kl} = \frac{k}{8} e^{2\pi i l/32}$ ($k=0, \dots, 8, l=0, \dots, 31$) の、例1~例4のそれぞれにおける逆写像 g による像を3次 spline 曲線で結んだものである。Taylor 展開の項数は 100 項とった。こんなに必要はないであろうが、時間的に苦にはならない。

図 2





§ 4 . おわりに

境界要素法では線分定数要素を用いたが，高次要素を用いればより精度が高くなるはずである。これにともなって§3の Taylor 係数の計算も影響をうけることになる。

式 (3.1), (3.3) は変数 v についての Fourier 展開の形であるから，単位円周上の等間隔分点での g の値にもとづく FFT アルゴリズムも有力であると思われる。

§1では Green の公式を用いるいわゆる直接法で定式化した，式 (1.1), (1.2) での q を境界上でのソース分布（一重層）とし， z_0 に負の単位ソースがあると考えれば間接法的解釈となる。このときは Symm[2] や天野[3] などの考え方に類似してくる。

数値等角写像に関して従来おこなわれている方法については 天野[3] や 宋 他[4] が詳しい。

実験には自宅の EPSON/PC286VE を使用した。

参考文献

- [1] Brebbia, C.A. & Walker, S.: *Boundary Element Technique in Engineering*, Butterworths, London (1980).
- [2] Symm, G.T.: "An Integral Equation Method in Conformal Mapping", *Numer. Math.*, Vol. 9, pp. 250-258 (1966).
- [3] 天野 要: "代用電荷法に基づく双方向的な数値等角写像の方法", *情報処理* Vol. 31, No. 5, pp. 623-642 (1990).
- [4] 宋 殷志, 杉浦 洋, 櫻井鉄也: "数値等角写像における Theodorson 方程式の解法", *情報処理学会論文誌*, Vol. 30, No. 4, pp. 393-401 (1987).
- [5] 今井 功: *流体力学と複素解析*, 日本評論社, Tokyo (1981).