数　値　解　析　34－1
（1990．10．6）

8段数6次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法について

春日 賢一　田中 正次　山下 茂
山梨大学　工学部　電子情報工学科

我々は，一昨年来8段数6次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の1解系を導き，その特性の解明を試みている．ここでは，その解系から導かれた3種類の公式を提案したい．打ち切り誤差特性について最適化した公式と安定性に関して最適化した公式の中間的な特性を持つ公式，丸め誤差特性に関して最適化を行って得られた安定性についても優れた公式，最後に絶対安定区間がほぼ最長の公式を紹介する．これら3種類の公式の導出方法に加え，既知公式とそれらの公式の各特性値での比較，またいくつかの数値実験の結果なども併せて発表する．

On 8-stage explicit Runge-Kutta methods of order 6

Kenichi Kasuga　Masatsugu Tanaka　Sigeru Yamasita

Department of Electrical Engineering and Computer Science, Yamanasi University

4-Choume, Takeda, Koufu, Yamanasi

A few years ago, we found a solution of the order conditions for the 8-stage sixth-order explicit Runge-Kutta method. by choosing the free parameters in this solution properly we obtained the following three special methods. The first of them has a very small truncation error and a considerably large range of absolute stability compared with the known methods. The second has nealy minimum round off error. And the last has the largest interval of absolute stability.

１．はじめに

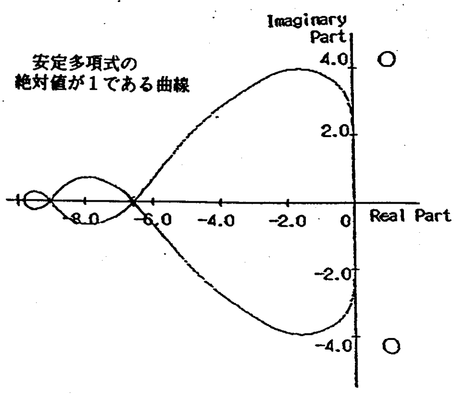
我々は，一昨年来８段数６次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の一解系を導き，その特性の解明を試みている．これまでに，打ち切り誤差特性に関して最適な公式，有効絶対安定領域の面積が最大である公式，及び絶対安定区間の長さが最長である公式を提案した．今回は，打ち切り誤差と安定性の両特性に於て優れている公式，丸め誤差特性に関してほぼ最良の公式，及び前回提案した絶対安定区間の長さが最長である公式の問題点に改良を加えた公式を提案する．ついで８段数６次法の既知公式と数値例や特性値を通して比較検討し，得られた公式の有効性を示すことにしたい．８段数６次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法の表示法や，各種判定基準については文献(7)を参照されたい．

２．提案する３つの公式

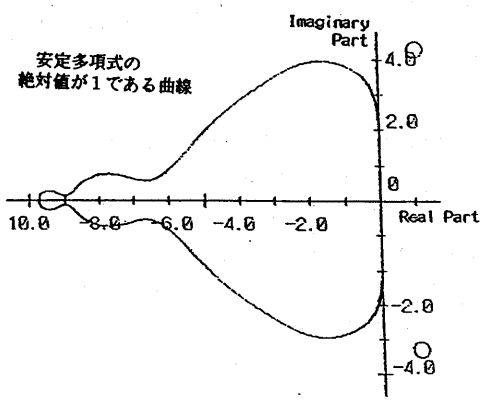
これまでに提案した安定性最良の２つの公式は，打ち切り誤差特性判定基準においてもかなりよい値を示していたが，連立微分方程式の数値実験において期待したような結果が得られなかった．一方，打ち切り誤差に関して最適な公式については全ての数値例において極めてよい結果が得られたので，今回はこの２つの公式の中間的な特性を持つ公式Ａを提案し，この公式を数値例等を通して検討することにより，既知公式の代わりに用いて有効であることを示したい．

また，パラメータa_1～a_8までが単調に増加していて全てのパラメータが非負であるような丸め誤差特性の良い単調な公式の発見を試みたが，余りにも自由パラメータが多いこともあって十分な探索ができず，単調な公式は見つからなかった．しかし，単調であるということに拘らず，丸め誤差特性のある尺度を最小にするという観点に立って公式を探すことにより，打ち切り誤差や安定性を劣化させることなく極めて良い丸め誤差特性をもつ公式Ｂを発見することが出来た．

最後に，前回提案した絶対安定区間が最長である公式は，図2.1を見ても分かるように絶対安定区間内の実軸上に誤差の伝幡率が１（安定多項式の絶対値が１）である点が２点存在する．これでは，実際にこの区間内においてどこでも安定であるとは言い兼ねる．そこで絶対安定区間内では，どこでも誤差伝幡率が１未満であるような絶対安定区間最長の公式Ｃ（図2.2）を提案したい．



（図 2.1）公式INT-OPTの絶対安定領域



（図 2.2）公式Ｃの絶対安定領域

【公式A】

a_{2}	= 0.10000000000000000000d-01
a_{3}	= 0.12600000000000000000d+00
a_{4}	= 0.31500000000000000000d+00
a_{5}	= 0.45500000000000000000d+00
a_{6}	= 0.84000000000000000000d+00
a_{7}	= 0.60500000000000000000d+00
a_{8}	= 0.10000000000000000000d+01

c_{1}	= 0.36499505595574480155d-01
c_{2}	= 0.00000000000000000000d+00
c_{3}	= 0.19486054522745809292d+00
c_{4}	= 0.14155307814049840065d+00
c_{5}	= 0.16019082867977901818d+00
c_{6}	= 0.24046740921452299800d+00
c_{7}	= 0.17835375251792858209d+00
c_{8}	= 0.48074880624238418569d-01

b_{21}	= 0.10000000000000000000d-01
b_{31}	= -0.66780000000000000000d+00
b_{32}	= 0.79380000000000000000d+00
b_{41}	= 0.30870833333333333333d+01
b_{42}	= -0.34387499999999999999d+01
b_{43}	= 0.66666666666666666666d+00
b_{51}	= 0.10294495030509678013d+01
b_{52}	= -0.10131390943827013607d+01
b_{53}	= 0.12985889061200562034d+00
b_{54}	= 0.30883070071972795190d+00
b_{61}	= 0.34514739360926306455d+01
b_{62}	= -0.49999445116143739209d+01
b_{63}	= 0.36366506555686289315d+01
b_{64}	= -0.36607385638273534645d+01
b_{65}	= 0.24125584837804677774d+01

b_{71}	= -0.56137606355077499520d+01
b_{72}	= 0.68001220154998709422d+01
b_{73}	= -0.17523634659319208828d+01
b_{74}	= 0.15789955182156113267d+01
b_{75}	= -0.47049343227581154059d+00
b_{76}	= 0.62500000000000000000d-01
b_{81}	= -0.54914095774006820294d+01
b_{82}	= 0.10065076716745735006d+02
b_{83}	= -0.10542265740191792522d+02
b_{84}	= 0.13440710546516087875d+02
b_{85}	= -0.85059684403069577563d+01
b_{86}	= 0.56843980863002006032d+00
b_{87}	= 0.14654166860075863443d+01

【公式B】

a_{2}	= 0.20000000000000000000d+00
a_{3}	= 0.15000000000000000000d+00
a_{4}	= 0.40000000000000000000d+00
a_{5}	= 0.50000000000000000000d+00
a_{6}	= 0.75000000000000000000d+00
a_{7}	= 0.80000000000000000000d+00
a_{8}	= 0.10000000000000000000d+01

c_{1}	= 0.41832010582008541943d-01
c_{2}	= 0.00000000000000000000d+00
c_{3}	= 0.24351620990276492407d+00
c_{4}	= 0.10274943310657386475d+00
c_{5}	= 0.28117913832199836310d+00
c_{6}	= -0.12093726379440933594d+00
c_{7}	= 0.39587148962149273368d+00
c_{8}	= 0.55788982259570911726d-01

b_{21}	= 0.20000000000000000000d+00
b_{31}	= 0.93750000000000000000d-01
b_{32}	= 0.56250000000000000000d-01
b_{41}	= -0.17750000000000000000d+00
b_{42}	= -0.13250000000000000000d+00
b_{43}	= 0.71000000000000000000d+00
b_{51}	= 0.84650428336793246409d-01
b_{52}	= -0.97678472303313814695d-01
b_{53}	= 0.24270209250378187438d+00
b_{54}	= 0.27032595146273870612d+00
b_{61}	= 0.34313882341245763308d+00
b_{62}	= 0.11961437273595008923d+00
b_{63}	= -0.27956089986563287808d+00
b_{64}	= -0.15857408574042330396d+00
b_{65}	= 0.72538178945764847372d+00

b_{71}	= 0.13654890369697032237d+00
b_{72}	= 0.17523987688511897809d+00
b_{73}	= 0.13287194874629833508d-01
b_{74}	= -0.20496933120141293538d+00
b_{75}	= 0.57989335574469380585d+00
b_{76}	= 0.10000000000000000000d+00
b_{81}	= 0.15790004378477412450d-01
b_{82}	= -0.49337652857537216411d+00
b_{83}	= 0.47902941886655179271d+00
b_{84}	= 0.85328031214779895830d+00
b_{85}	= -0.22369803595844248711d-01
b_{86}	= -0.12515278480236721736d+01
b_{87}	= 0.14191744448020603975d+01

【公式C】

a_2 = 0.10000000000000000000d-01
a_3 = 0.11000000000000000000d+00
a_4 = 0.33000000000000000000d+00
a_5 = 0.43000000000000000000d+00
a_6 = 0.88500000000000000000d+00
a_7 = 0.78000000000000000000d+00
a_8 = 0.10000000000000000000d+01

c_1 = 0.20489766963158254076d-01
c_2 = 0.00000000000000000000d+00
c_3 = 0.21632122769119424555d+00
c_4 = 0.32914943211949314328d-01
c_5 = 0.34550593745507890420d+00
c_6 = 0.40854896140009352989d-01
c_7 = 0.28770286833712821473d+00
c_8 = 0.56210360201481714137d-01

b_{21} = 0.10000000000000000000d-01
b_{31} = −0.49500000000000000000d+00
b_{32} = 0.60500000000000000000d+00
b_{41} = 0.15516666666666666666d+01
b_{42} = −0.18883333333333333333d+01
b_{43} = 0.66666666666666666666d+00
b_{51} = 0.83974900181118505849d+00
b_{52} = −0.87161672418043745214d+00
b_{53} = 0.23295536881840425703d+00
b_{54} = 0.22891235355084818548d+00
b_{61} = 0.19146337553366752360d+01
b_{62} = −0.15777752639518474176d+01
b_{63} = −0.30599295064161446955d+00
b_{64} = −0.73771659729677818707d+00
b_{65} = 0.15918510565535648471d+01

b_{71} = −0.16353432314679547943d+01
b_{72} = 0.16467896623839413106d+01
b_{73} = 0.46926234662006871545d+00
b_{74} = −0.78753019588456785183d+00
b_{75} = 0.10238214183485125908d+01
b_{76} = 0.63000000000000000000d-01
b_{81} = 0.31778530311149761900d+01
b_{82} = −0.31470616657689283180d+01
b_{83} = −0.57661396776381435014d+00
b_{84} = 0.35523071752085990660d+01
b_{85} = −0.28936460000843671203d+01
b_{86} = −0.23886998056959729553d+00
b_{87} = 0.11260314078631317170d+01

注) 上記の３公式の係数は，４倍精度で計算して有効桁20桁をとったものである．

３．公式の特性

これまでに提案した３公式，既知公式，及び今回提案する３公式の各特性値を表3.1に示す．

表 3.1　公式の特性値

６ 次 法		A_{62}	A_{63}	A(Se)	α	R
前回提案した公式	TRUN-opt	0.802104d-04	0.257522d-09	26.79175	4.1369	0.3237d+03
	STA-opt	0.681550d-03	0.266382d-07	45.56191	7.4767	0.2664d+02
	INT-opt	0.866945d-03	0.363141d-07	36.09833	9.8197	0.2324d+02
既知公式	HUTA(1)	0.308903d-02	0.228600d-05	22.84937	4.0337	0.1424d+03
	HUTA(2)	0.111297d-01	0.805946d-04	22.29546	3.8400	0.3455d+03
	VERNER	0.220877d-02	0.224013d-06	26.61777	4.4572	0.2794d+03
今回提案する公式	公式Ａ	0.296564d-03	0.460049d-08	33.60555	4.7299	0.9666d+02
	公式Ｂ	0.552159d-03	0.139999d-07	39.09036	6.0076	0.1064d+02
	公式Ｃ	0.753185d-03	0.367397d-07	39.89134	9.7309	0.3483d+02

4．数値実験

公式の導出が正しく行われたかどうか，また得られた公式が実際に有効であるかどうかを検証するために，以下の単一系初期値問題４題また連立系初期値問題２題について数値実験を行った．安定性に関する評価に誤りがないかどうかをチェックするために弱Stiff問題にについても数値実験をおこなった．

表4.1　単一系初期値問題

初期値問題			理論解
1	$y' = -y$	$y(0) = 1$	$y = e^{-x}$
2	$y' = -y^2-(2x-1)y-x^2+x-1$	$y(0) = 1/2$	$y = -x+1/(1+e^{-x})$
3	$y' = -x^2y^2/3$	$y(2) = 1$	$y = 9/(x^3+1)$
4	$y'=(x+y)/x$	$y(1) = 1$	$y = x(\log_e x+1)$

表4.1の単一系初期値問題に対する各公式の評価は第一ステップの誤差，最終ステップの誤差，及び最大誤差によって行った．刻み幅は0.3と0.1で，ステップ数は100とした．

表4.2　連立系初期値問題

初期値問題			理論解
1	$y_1' = y_2$ $y_2' = y_1$	$y_1(0) = 1$ $y_2(0) = -1$	$y_1 = e^{-x}$ $y_2 = -e^{-x}$
2	$y_1' = y_1^2y_2$ $y_2' = 1/y_1$	$y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 1$	$y_1 = 1/e^{-x}$ $y_2 = e^{-x}$

表4.2の問題に対する評価は第一ステップの誤差，最終ステップの誤差，及び最大誤差によって行った．刻み幅は0.1，0.05，0.01で，ステップ数はそれぞれ50，100，100とした．

【問題１】 初期値問題 ： $y' = -y \quad y(0) = 1$
理論解 ： $y = e^{-x}$

刻み幅 STEP数	誤 差	既知公式			我々の提案する公式		
		HUTA(1)	HUTA(2)	VERNER	公式A	公式B	公式C
0.3 (100)	First-Step	0.1916179034d-07	0.6863079452d-08	0.8068282153d-08	0.2291816778d-08	0.2908156257d-08	0.1094277280d-07
	Last-Step	0.2420412623d-18	0.8669074186d-19	0.1019143215d-18	0.2894901815d-19	0.3673429427d-19	0.1382234089d-18
	Maximum	0.3154863969d-07	0.1129961352d-07	0.1328390148d-07	0.3773327158d-08	0.4788089994d-08	0.1801656330d-07
0.1 (100)	First-Step	0.8774508897d-11	0.2704780844d-11	0.4164002476d-11	0.1175393116d-11	0.1556435536d-11	0.5361155964d-11
	Last-Step	0.4402582153d-13	0.1357111953d-13	0.2089124094d-13	0.5897509247d-14	0.7809361712d-14	0.2689821564d-13
	Maximum	0.3567449807d-10	0.1099680763d-10	0.1692901375d-10	0.4778788476d-11	0.6327979807d-11	0.2179650904d-10

【問題２】 初期値問題 ： $y' = -y^2-(2x-1)y-x^2+x-1 \quad y(0) = 1/2$
理論解 ： $y = -x+1/(1+e^{-x})$

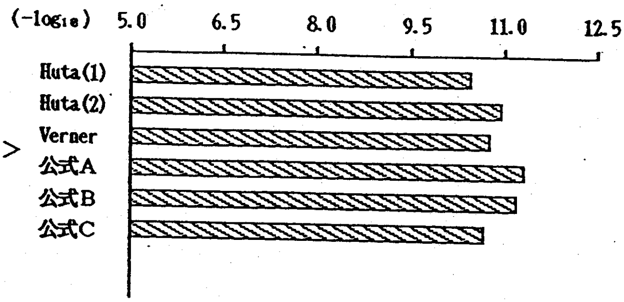
刻み幅 STEP数	誤 差	既知公式			我々の提案する公式		
		HUTA(1)	HUTA(2)	VERNER	公式A	公式B	公式C
0.3 (100)	First-Step	0.3906535095d-09	0.3444921293d-09	0.1409800054d-09	0.5866029884d-11	0.5778507534d-10	0.4759809213d-10
	Last-Step	0.4440892099d-15	0.2664535259d-14	0.0000000000d+00	0.4440892099d-15	0.2220446049d-14	0.0000000000d+00
	Maximum	0.5996497299d-08	0.4389889480d-07	0.2327620652d-08	0.3064956067d-09	0.3812565819d-09	0.6865314983d-09
0.1 (100)	First-Step	0.1727298859d-12	0.1629460455d-12	0.5789813073d-13	0.2921274334d-14	0.2284283873d-13	0.2581268532d-13
	Last-Step	0.1687538997d-13	0.7838174554d-13	0.1598721155d-13	0.3108624469d-14	0.4218847494d-14	0.2309263891d-13
	Maximum	0.8223394187d-11	0.5681216608d-10	0.2972067037d-11	0.3865519016d-12	0.4167360901d-12	0.7933653734d-12

【問題３】 初期値問題 ： $y' = -x^2y^2/3 \quad y(2) = 1$
理論解 ： $y = 9/(x^3+1)$

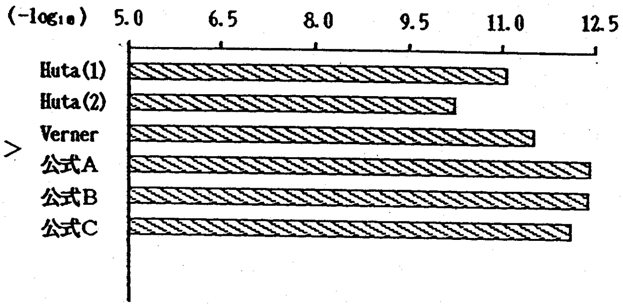
刻み幅 STEP数	誤 差	既知公式			我々の提案する公式		
		HUTA(1)	HUTA(2)	VERNER	公式A	公式B	公式C
0.3 (100)	First-Step	0.4393286273d-04	0.2232005701d-03	0.8791676165d-08	0.2001672567d-06	0.2266287018d-06	0.1034989882d-05
	Last-Step	0.2318962131d-10	0.1184042389d-09	0.1078284597d-12	0.1312707674d-12	0.9644006785d-13	0.6762931686d-12
	Maximum	0.4393286273d-04	0.2232005701d-03	0.4474364690d-07	0.2001672567d-06	0.2266287018d-06	0.1034989882d-05
0.1 (100)	First-Step	0.1710102659d-07	0.9136358492d-07	0.1380318082d-09	0.1141899075d-09	0.4324587910d-10	0.6865559232d-09
	Last-Step	0.5990098174d-11	0.3208167835d-10	0.1045361714d-12	0.5179873457d-13	0.6784503515d-14	0.2804171825d-12
	Maximum	0.2830082916d-07	0.1511121550d-06	0.3067531784d-09	0.2045994207d-09	0.6359993088d-10	0.1186101217d-08

【問題４】 初期値問題 ： $y' = (x+y)/x \quad y(1) = 1$
理論解 ： $y = x(\log_e x+1)$

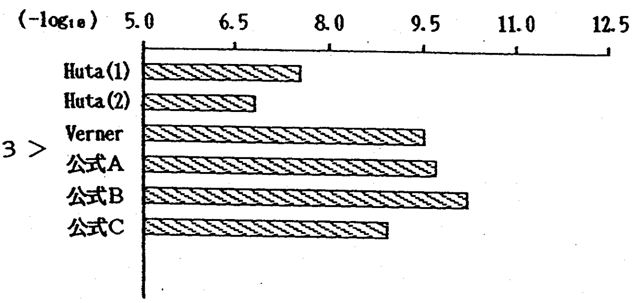
刻み幅 STEP数	誤 差	既知公式			我々の提案する公式		
		HUTA(1)	HUTA(2)	VERNER	公式A	公式B	公式C
0.3 (100)	First-Step	0.6692937962d-07	0.9266961581d-07	0.8561149123d-07	0.3173423774d-08	0.1197696417d-07	0.4474642878d-09
	Last-Step	0.2075992281d-05	0.2853198271d-05	0.2631530208d-05	0.9721291860d-07	0.3580236907d-06	0.4981842494d-08
	Maximum	0.2075992281d-05	0.2853198271d-05	0.2631530208d-05	0.9721291860d-07	0.3580236907d-06	0.4981542494d-08
0.1 (100)	First-Step	0.5806499725d-10	0.7474651453d-10	0.6783440476d-10	0.2430639023d-11	0.6839279143d-11	0.2073452521d-11
	Last-Step	0.1352868928d-08	0.1734821176d-08	0.1572558972d-08	0.5625455657d-10	0.1552598050d-09	0.5136513437d-10
	Maximum	0.1352868928d-08	0.1734821176d-08	0.1572558972d-08	0.5625455657d-10	0.1552598050d-09	0.5136513437d-10



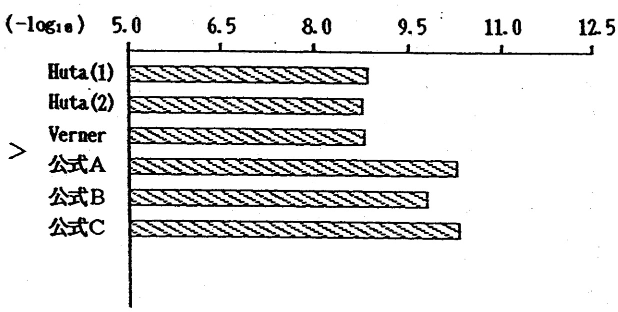
＜問題 1＞



＜問題 2＞



＜問題 3＞



＜問題 4＞

単一微分方程式に対する数値実験の結果（最大誤差の場合）　刻み幅：0.1

$(-\log_{10})$: $-\log_{10}$(Maximum Error)

【問題1】 初期値問題 ： $y_1' = y_2 \quad y_1(0) = 1$
$y_2' = y_1 \quad y_2(0) = -1$

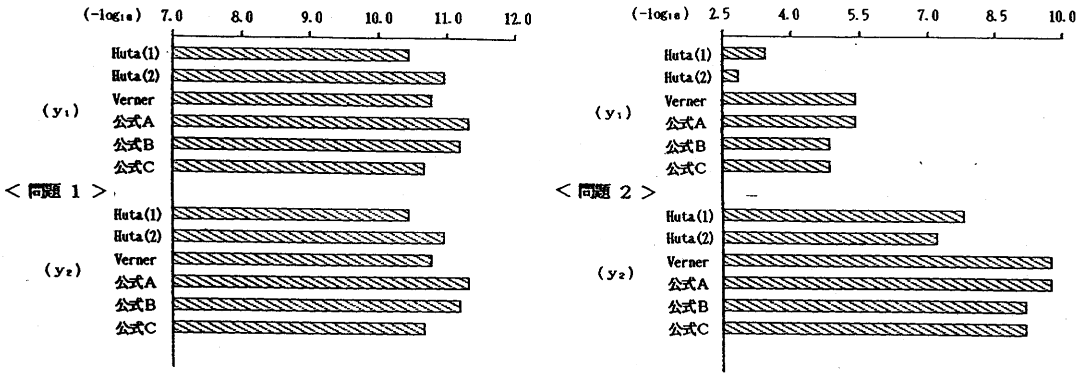
理論解 ： $y_1 = e^{-x}$
$y_2 = -e^{-x}$

刻み幅 STEP数	誤差		既知公式 HUTA(1)	既知公式 HUTA(2)	既知公式 VERNER	我々の提案する公式 公式A	我々の提案する公式 公式B1	我々の提案する公式 公式C
0.1 (50)	y_1	First-Step	0.8774508897d-11	0.2704780844d-11	0.4164002476d-11	0.1175393116d-11	0.1556435536d-11	0.5361155964d-11
		Last-Step	0.3267011011d-11	0.1007071922d-11	0.1550324105d-11	0.4376286659d-12	0.5795008570d-12	0.1996076915d-11
		Maximum	0.3567449808d-10	0.1099680763d-10	0.1692901375d-10	0.4778788476d-11	0.6327979807d-11	0.2179650904d-10
	y_2	First-Step	0.8774508897d-11	0.2704780844d-11	0.4164002476d-11	0.1175393116d-11	0.1556435536d-11	0.5361155964d-11
		Last-Step	0.3267011011d-11	0.1007071922d-11	0.1550324105d-11	0.4376286659d-12	0.5795008570d-12	0.1996076915d-11
		Maximum	0.3567449808d-10	0.1099680763d-10	0.1692901375d-10	0.4778788476d-11	0.6327979807d-11	0.2179650904d-10
0.05 (100)	y_1	First-Step	0.6855627177d-13	0.2026157019d-13	0.3352873534d-13	0.9450773497d-14	0.1262878691d-13	0.4263256415d-13
		Last-Step	0.4855566903d-13	0.1434833155d-13	0.2365295459d-13	0.6701236788d-14	0.8949763673d-14	0.3012780997d-13
		Maximum	0.5302286388d-12	0.1566802244d-12	0.2591815651d-12	0.7316369732d-13	0.9771350395d-13	0.3297917495d-12
	y_2	First-Step	0.6855627177d-13	0.2026157019d-13	0.3352873534d-13	0.9450773497d-14	0.1262878691d-13	0.4263256415d-13
		Last-Step	0.4855566903d-13	0.1434833155d-13	0.2365295459d-13	0.6701236788d-14	0.8949763673d-14	0.3012780997d-13
		Maximum	0.5302286388d-12	0.1566802244d-12	0.2591815651d-12	0.7316369732d-13	0.9771350395d-13	0.3297917495d-12
0.01 (100)	y_1	First-Step	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00
		Last-Step	0.9714451465d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15	0.6938893904d-16	0.4163336342d-16	0.2775557562d-15
		Maximum	0.9714451465d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15	0.6938893904d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15
	y_2	First-Step	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00
		Last-Step	0.9714451465d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15	0.6938893904d-16	0.4163336342d-16	0.2775557562d-15
		Maximum	0.9714451465d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15	0.6938893904d-16	0.8326672685d-16	0.2775557562d-15

【問題2】 初期値問題 ： $y_1' = y_1^2 y_2 \quad y_1(0) = 1$
$y_2' = -1/y_1 \quad y_2(0) = 1$

理論解 ： $y_1 = 1/e^{-x}$
$y_2 = e^{-x}$

刻み幅 STEP数	誤差		既知公式 HUTA(1)	既知公式 HUTA(2)	既知公式 VERNER	我々の提案する公式 公式A	我々の提案する公式 公式B1	我々の提案する公式 公式C
0.1 (50)	y_1	First-Step	0.4847701546d-08	0.2632167845d-07	0.1471534006d-10	0.1825906093d-10	0.5324646279d-10	0.6528111385d-10
		Last-Step	0.2094145478d-01	0.8439290494d-01	0.1283303520d-03	0.2359802401d-03	0.8780166464d-03	0.8038848235d-03
		Maximum	0.2094145478d-01	0.8439290494d-01	0.1283303520d-03	0.2359802401d-03	0.8780166464d-03	0.8038848235d-03
	y_2	First-Step	0.1405222827d-08	0.1122868457d-07	0.3677391724d-11	0.1397452987d-10	0.6403537423d-10	0.4508138307d-10
		Last-Step	0.9486051348d-06	0.3817041091d-05	0.5823067297d-08	0.1071314045d-07	0.3986974062d-07	0.3649339738d-07
		Maximum	0.9486051348d-06	0.3817041091d-05	0.5823067297d-08	0.1071314045d-07	0.3986974062d-07	0.3649339738d-07
0.05 (100)	y_1	First-Step	0.3891773015d-10	0.2099978524d-09	0.1705302566d-12	0.1316724507d-12	0.3665678872d-12	0.4938272014d-12
		Last-Step	0.3564496896d-03	0.1412231750d-02	0.3832023594d-05	0.3762067642d-05	0.1382426971d-04	0.1346161483d-04
		Maximum	0.3564496896d-03	0.1412231750d-02	0.3832023594d-05	0.3762067642d-05	0.1382426971d-04	0.1346161483d-04
	y_2	First-Step	0.1341965428d-10	0.1037140651d-09	0.8015810238d-13	0.1111333248d-12	0.5145744941d-12	0.3771427615d-12
		Last-Step	0.1614830255d-07	0.6390654994d-07	0.1739209549d-09	0.1707919302d-09	0.6277504648d-09	0.6111071657d-09
		Maximum	0.1614830255d-07	0.6390654994d-07	0.1739209549d-09	0.1707919302d-09	0.6277504648d-09	0.6111071657d-09
0.01 (100)	y_1	First-Step	0.4996003611d-15	0.2747801986d-14	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00
		Last-Step	0.2262634524d-12	0.1083966250d-11	0.0000000000d+00	0.3885780586d-15	0.4218847494d-14	0.5773159728d-14
		Maximum	0.2262634524d-12	0.1083966250d-11	0.6661338148d-15	0.3885780586d-15	0.4218847494d-14	0.5773159728d-14
	y_2	First-Step	0.1942890293d-15	0.1512678871d-14	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.0000000000d+00	0.1110223025d-15
		Last-Step	0.4468647674d-14	0.9360567876d-14	0.4996003611d-15	0.2289834988d-15	0.8118505868d-15	0.7216449660d-15
		Maximum	0.4468647674d-14	0.3379241331d-13	0.4996003611d-15	0.2289834988d-15	0.8118505868d-15	0.7216449660d-15



連立微分方程式に対する数値実験の結果（最大誤差の場合）　問題１　刻み幅：0.1
問題２　刻み幅：0.05

$(-\log_{10})$: $-\log_{10}$(Maximum Error)

【安定性検証の問題】

初期値問題： $y' = 100(\sin(x)-y)$ 　 $y(0) = 0$

理論解　： $y = (\sin(x)-0.01\cos(x)+0.01e^{-100x})/1.0001$

安定性検証のための問題による数値実験

公　式	誤　差	h = 0.03	h = 0.04	h = 0.05	h = 0.06	h = 0.07	h = 0.08	h = 0.09
HUTA(1) α=4.023	First-Step	0.1531d-02	0.9534d-02	これ以上大きな刻み幅では発散してしまう				
	Last-Step	0.5446d-05	0.2638d-02					
	Maximum	0.1531d-02	0.9534d-02					
HUTA(2) α=3.815	First-Step	0.1619d-02	これ以上大きな刻み幅では発散してしまう					
	Last-Step	0.1047d-04						
	Maximum	0.1619d-02						
VERNER α=4.457	First-Step	0.2479d-03	0.3912d-02	これ以上大きな刻み幅では発散してしまう				
	Last-Step	0.3015d-05	0.2446d-04					
	Maximum	0.2479d-03	0.3912d-02					
公式A α=4.730	First-Step	0.1996d-03	0.2285d-02	これ以上大きな刻み幅では発散してしまう				
	Last-Step	0.2515d-06	0.4461d-05					
	Maximum	0.1996d-03	0.2285d-02					
公式B α=6.008	First-Step	0.3165d-04	0.2600d-03	0.1492d-03	0.9788d-02	これ以上大きな刻み幅では発散してしまう		
	Last-Step	0.8207d-06	0.1535d-04	0.1507d-03	0.2057d-02			
	Maximum	0.3165d-04	0.2600d-03	0.1507d-03	0.9788d-02			
公式C α=9.731	First-Step	0.3856d-03	0.1794d-02	0.4837d-02	0.8282d-02	0.7886d-02	0.7832d-03	0.9661d-02
	Last-Step	0.2213d-06	0.2225d-05	0.1763d-04	0.4021d-03	0.4503d-03	0.1625d-03	0.4936d-02
	Maximum	0.3856d-03	0.1794d-02	0.4837d-02	0.8282d-02	0.7886d-02	0.7832d-03	0.9661d-02

５．まとめ

表3.1の特性値表と数値実験の結果から，今回提案した３つの公式にはそれぞれ提案理由があることが明らかであろう．

公式Ａは，打ち切り精度判定基準，及び安定性の両特性値に於て公式TRUN-optとSTA-optの中間的な値を示しており，どちらの特性値においても既知公式より著しくまさっている．しかも丸め誤差特性判定基準は，２桁に抑えることが出来た．

公式Ｂは，打ち切り誤差及び安定性の両特性において，既知公式よりはるかに優れているにも拘らず，丸め誤差特性判定基準を既知公式の１０分の１以下というかなり小さい値におさえることが出来た．特に，非常に広い安定領域を持っていることに注目されたい．

公式Ｃは，絶対安定区間内に集積誤差の伝幡率１の点を持たないという目標を達成しており，しかも公式INT-OPTと比べて絶対安定区間の長さが殆ど変わらず，各種の特性値においても遜色がない．よって公式Ｃは，公式INT-OPTの代わりに用いて有効であると思われる．

今後の課題としては，埋め込み型の公式への応用などが考えられる．

【参考文献】

(1) Butcher.J.C. : The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations, John Wiley & Sons (1986)

(2) 一松 信 : 数値解析，朝倉書店 (1982)

(3) Huťa.A. : Une Améliration de la méthode de Runge-Kutta-Nyström pour la résolution numérique des équations différentielles du premier ordre, Acta Math. Univ. Comenian, pp.201-224 (1956)

(4) Huťa.A. : Contribution à la Formule de Sixième Ordre dans la méthode de Runge-Kutta-nyström, Acta Fac. Nat. Univ. Comenian. Math., Vol.4 (1957)

(5) J.H.Verner. : Explicit Runge-Kutta Methods with Estimates of The Local Truncation Error, SIAM J.Number. Anal. Vol.15,No.4, (1978)

(6) J.H.Verner. : Families of Imbedded Runge-Kutta Methods, SIAM J. Number. Anal. Vol.16,No.5, (1979)

(7) 田中 正次 春日 賢一 赤尾 聡 山下 茂
: ８段数６次陽的Ｒｕｎｇｅ－Ｋｕｔｔａ法について
数値解析研究会資料 (1989)