数 値 解 析 38－6
（1 9 9 1. 1 0 . 1 9）

ガンマ関数の高精度計算

平山　弘

神奈川工科大学　機械システム工学科

ガンマ関数（Gamma Funcrion）は、三角関数、対数関数、指数関数などの初等超越関数を除けば、最も基本的な関数の一つである。いろいろな関数を高精度で計算するためには、ガンマ関数を高精度で計算しなければならない。本論分では、ガンマ関数を高精度で計算するための方法を論じる。変数の値が特に大きくなくとも、Stirlingの公式が大変有効であることを示した。Stirlingの公式を使うには展開係数を前もって計算しておかなければならない。前もって係数を準備出来ない場合には、Taylor展開と連分数展開を組み合わせた方法が最も効率的であることがわかる。

Multiple-Precision Evaluation of Gamma Function

Hiroshi HIRAYAMA

Dept. of Mechanical Systems Engng.
Kanagawa Institute of Technology
1030 Shimo-ogino Atsugi Kanagawa-ken 243-02 Japan

Gamma function is one of most important functions except for elementary transcendental functions. The multiple-precision evaluation of gamma function is need for that of various transcendental functions. In this paper, an effective method of multiple-precision evaluation of Gamma function is given. It is very effective to compute by Stirling's Formula for various arguments, and by Taylor's expansion and continued fraction if coefficents of Stirling expansions can not be prepaire.

1．はじめに

最近コンピュータの高性能化と低下価格化によって、少し前まで非常に高価な計算であった高精度計算も容易に行うことができるようになってきた。このためのソフトウエア[1)]もいろいろ開発され発売されるようになってきている。

数値解析では、高精度の計算が容易に出来るならば、誤差による影響を考える必要がなくなるため、計算が非常に簡単になる。高精度計算を行うとその計算速度は、遅くなるが、小さな問題では、その遅さは無視できるので、このような問題では高精度計算は、非常に強力な方法を与えることになる。

高精度計算プログラムでは、初等超越関数については、準備されている場合が多いが、ガンマ関数などについては、計算できない場合が多い。また、たとえ計算出来るとしても、公式をそのまま記述したようなものが多く効率的とはいえない。

本文では、このような超越関数を高精度計算で効率よく計算する方法を論じる。まず最初の段階として、その中で最も重要と思われるガンマ関数の計算方法を論じる。ここでは、計算精度として、１０進数で、50,100,200,400,500,1000,2000,4000,5000桁で計算する場合を論じた。

２．Stirlingの公式

Stirlingの公式は、gamma関数の漸近展開式で次のように表すことができる。

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}x^{x}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{x^k}\right) \qquad (2.1)$$

この級数は、発散級数なので、与えられた数値に対してどんな精度でも計算できるわけではない。与えられた数値によって計算出来る精度の限界がある。

以下でその精度限界を調べる。これを調べるために、Stirlingの公式の係数 a_n を999項まで多倍長計算を使い数値的に求めた。展開係数の計算方法は寺沢[2)]にされている方法を使った。これらの係数は

$$a_0=1$$

から始まり

$$a_8=-5.17179E-05$$

で絶対値最小になり

$$a_{999}=-5.32403E+1763$$

で終わる。これらの1000個の係数から変数 x が１から158の間の数値のとき、この式で計算出来る限界精度を得ることができる。x＝１８、３６、７３、１４６のときの限界精度を表１に示した。計算項数とはその精度を得るために計算しなければならない項数である。

表１

精度	x	計算項数
50	18	114
100	36	190
200	73	459
400	146	917

表１の１行目は精度を50桁以上の精度で計算するためには、xとして18以上の数値を使わなければならないことを意味する。また、x＝18のとき５０桁以上の精度を得るためには114項まで計算しなければならないことを意味する。以下同様で、最後の行は x=146以上である場合には、400桁以上の精度で計算できることを意味する。そのときの計算しなければならない項数は917項であることがわかる。

上の表から、計算精度を２倍にするためには、x および計算項数をおよそ２倍にしなければならないことがわかる。これから、1000桁の精度で計算するためにはどの位の数値を代入しなければならないか容易に推定できる。

このStirlingの公式による計算方法は、以下で論じる方法より、計算量は少なく、非常に効果的な方法である。x が小さくて要求精度を得られない場合

でも、(3.1)で示す方法を逆に利用して、この公式を使うことが出来る。この公式の問題点はこの公式を使って計算するためには、a_nを事前に計算しておかなければならない点である。この係数をメモリー上に持とうとすれば、非常に大きなメモリを消費することになる。また、計算する精度によってこの係数を前もって準備する必要がある。例えば精度を5000桁程度の高精度になると10000個以上の定数を必要とする。そのとき必要なメモリ量は、およそ４０Mバイトとなる。この関数を頻繁に使う場合は良いがあまり使わない場合には、大きな無駄となる。

この漸近展開の係数は、ベルヌーイ数とは異なりり非常に計算しやすい数である。999項までの係数を145桁と125桁の精度で計算を試みたが、全ての係数が４０桁以上の精度で一致した。

999項までの145桁の計算は、東京大学計算センターのHITAC M-880で約１５分を要した。付録１に計算したStirlingの係数の最初の３５個を示す。

３．ガンマ関数のテイラー展開による計算

ここでは解析を簡単にするために、$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ と仮定する。xがこのような範囲にない場合は、 gamma関数の関係式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad (3.1)$$

によって、その範囲に入るようにすることができる。また、xが負の数の時は、つぎの関係式によって正の数のgamma関数の値に帰着できる。

$$-x\Gamma(-x)\Gamma(x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \qquad (3.2)$$

xが非常に大きいとき、(3.1)の関係式によってxの範囲を小さくする。このための計算量が非常に大きくなる可能性がある。しかし、２節のStirlingの公式の適用範囲を考えると(3.1)によるxの範囲を狭めるための計算は他の部分の計算と比較して大きくなることはない。

gamma関数をTaylor展開する方法は、Brent[3)]によって論じられている。この方法は、gamma関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (3.3)$$

を有限区間で打ち切る方法である。t＝Nで打ち切るとすると

$$\Gamma(x) = \int_0^N t^{x-1} e^{-t} dt + \int_N^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (3.4)$$

となる。Nを大きくとると、(3.4)の第２の積分はいくらでも小さくすることができる。ここでは、$-\frac{1}{2} \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ と仮定しているので、第２の積分は次のように評価できる。

$$\begin{aligned}\int_N^\infty t^{x-1} e^{-t} dt &= e^{-N} \int_0^\infty (N+s)^{x-1} e^{-s} ds \\ &\leqq e^{-N} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{N+s}} ds \\ &\leqq e^{-N} \int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{N}} ds \\ &\leqq \frac{e^{-N}}{\sqrt{N}} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Nを大きくとれば、第２項はいくらでも小さくできる。例えば、N=500にとると(3.5)は3.2E-219となるので、200桁以上の精度で計算できることになる。

(3.4)の第１項は、e^{-x} のTaylor展開式を代入して項別に積分すると

$$\int_0^N t^{x-1} e^{-t} dt = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k N^{k+x}}{k!\,(k+x)} \qquad (3.6)$$

となる。この級数の収束半径は無限大であるからどんなNに対しても任意の精度で計算できる。この方

法で計算するとき、Nが小さいほど(3.6)の級数は収束が速くなるのでなるべく小さくNを採るようにしなければならない。表2に要求計算精度を10進数でP桁とすると、第2項がその精度以下になる最小のNを与えた。また、(3.6)の級数がその精度まで計算するために必要な項数Mも求めた。項数は$x=\frac{1}{2}$として計算している。

表2

計算精度P	N	項数M
50	115	408
100	228	815
200	458	1640
400	918	3292
500	1148	4118
1000	2299	8251
2000	4601	16518
4000	9206	33054
5000	11509	41324

この表からわかるように、計算精度とNおよび計算精度と項数Mはほぼ比例することがわかる。これによってどの程度計算が必要か容易に推定できる。

4．不完全ガンマ関数の漸近展開を利用した計算

(3.4)の第2項は、Nを大きくすることによっていくらでも小さくできる。漸近展開によってその値を計算することによって、より誤差を小さくすることができる。この方法は、Euler数を計算するとき、D.W.Sweeney[4]が使った方法が今までの方法とすると、R.P.Brent[3]が提案しているEuler数の計算方法に対応する。この方法で計算するとほぼ2倍の速度で計算できる。

(3.4)の第2項は次のように漸近展開出来る。

$$\int_N^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = N^{x-1} e^{-N} \left(1+\frac{x-1}{N}+\ldots\right) \tag{4.1}$$

(4.1)の項が最小になるのは、第N項目であるからその値から漸近展開で計算できる精度が容易にわかる。

表2と同様に計算精度P、N、項数Mを表3に示した。

表3

計算精度P	N	項数M
50	57	243
100	114	489
200	229	985
400	459	1979
500	575	2478
1000	1150	4962
2000	2302	9937
4000	4604	19880
5000	5755	24851

この表3から、計算しなければならない項数は、表2の場合と比較して約半分である。また表3の場合は、漸近展開の式も計算しなければならないからあまり強力な計算方法には思えないかも知れない。しかし、表3の場合Nが小さいため、桁落ちが表2の場合と比較して、かなり小さくなるため、途中の計算精度を小さくすることが出来るので、かなりの高速化になる。

また表2と同様に、表3の場合もNおよびMは計算精度Pと大体比例する。このため精算精度を与えるとおよその計算量が容易に推定できる。

5．連分数を利用した計算

(3.4)の第2項は、連分数展開が可能である。連分数展開する利点は、漸近展開と違い収束展開級数であることである。そのため(3.4)の第2項を任意精度

で計算できるのでNを任意に選ぶことができる。

(3.4)の第2項は、次の様に連分数展開[5]が可能である。

$$\int_N^\infty t^{x-1}e^{-t}dt=e^{-N}N^x\left(\frac{1}{N+}\frac{1-x}{1+}\frac{1}{N+}\cdots\right) \tag{5.1}$$

$x=\frac{1}{2}$とすると、連分数の係数は、すべて正の数となるので、その収束性は明かである。連分数は次のような漸化式

$$A_n=b_nA_{n-1}+a_nA_{n-2}$$
$$B_n=b_nB_{n-1}+a_nB_{n-2} \tag{5.2}$$

ここで

$$\frac{A_n}{B_n}=b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\cdots \tag{5.3}$$

によって容易に計算出来る。このとき、収束は隣あった近似分数の差がつぎの式で表現できることを利用して判定する。

$$\frac{A_n}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}=(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{B_nB_{n-1}} \tag{5.4}$$

この式を利用して計算した場合、表2や表3に対応する表を表4に示す。

項数Lは連分数の計算で使用する項数である。ただし、ここで扱っている連分数は、2項単位で扱うと便利なので、2項単位で扱っている。したがって、実際の計算項数はこの項数の2倍となる。項数Mは表2や表3と全く同じもので、要求精度を得るために計算する必要がある項数である。

表4

計算精度P	N	項数L	項数M
50	10	98	91
100	20	194	184
200	30	499	327
400	80	775	743
500	100	969	930
1000	200	1939	1863
2000	400	3879	3729
4000	800	7759	7462
5000	1000	9700	9329

連分数は、どの様なNに対しても収束するがNが小さい場合、その収束は非常に遅くなる。Nを小さくとり高精度計算する方法は、原理的に可能であるが、実際的には不可能に近いほど収束が遅い場合がある。

表4は、LとMがほぼ同じになるようなNを求めている。このとき、乗除算の回数がほぼ最小になるためである。

表4と表3を比較すると、表4の場合、Nが非常に小さくできることがわかる。このため、桁落ちが小さくなるため、精度を短くしても同じ有効桁数を得ることができることを意味する。また、計算項数も非常に少なくなっているので、高速計算が可能である。表3と同じように計算精度PとN、L、Mはほぼ比例していることがわかる。このため、精度を与えれば、ほぼ計算量が推定できることになる。

6. 結論

表1から表4から変数xのgamma関数を計算するには、できるだけStirligの公式から計算するのが効果的である。ただし、Stirlingの公式を使って計算するには、Stirlingの展開係数が前もって計算されていなけならないので、どの程度まで計算が可能かはStirling公式の係数がどこまで与えられているかによって決められる。この係数は安定に計算できるがかなり計算時間を要する。

Stirling展開係数が与えられていない場合、連分数展開とTaylorの組み合わせによる計算法が効率的である。

7. 参考文献

1) A.C.ハーン（戸島訳）：REDUCEユーザーズマニュアル、マグロウヒル(1987)

2) 寺沢寛一：数学概論、第5章、岩波書店(1947)

3) R.P.Brent:A Fortran Multiple-Precision Arithmetic Package, ACM Transactions on Mathematical Software,Vol.4,No.1,March 1978,p.57-70

4)D.W.Sweeney:On the computation of Euler's constant.Math.Comput.17(1963),p.170-178

5)ｴﾘ・ｱ・ﾘｭｽﾃﾙﾆｸ、ｱ・ｴﾘ・ﾔﾝﾎﾟﾘｽｷｰ（佐藤訳）：解析学Ⅰ、第5章、総合図書

付録1 Stirlingの展開係数

n	a_n
0	1.0000000000000000000000000000000000E-00
1	8.3333333333333333333333333333333333E-02
2	3.4722222222222222222222222222222222E-03
3	-2.6813271604938271604938271604938272E-03
4	-2.2947209362139917695473251028806584E-04
5	7.8403922172006662747403488144228885E-04
6	6.9728137583658577742939882857578331E-05
7	-5.9216643735369388286483622560440119E-04
8	-5.1717909082605921933705784300205882E-05
9	8.3949872067208727999335751676498345E-04
10	7.2048954160200105590857193022501505E-05
11	-1.9144384985654775265008988583285225E-03
12	-1.6251626278391581689863512398027100E-04
13	6.4033628338080697948236380902657958E-03
14	5.4016476789260451518046750857024174E-04
15	-2.9527880945699120505440651054693824E-02
16	-2.4817436002649977309156583687434643E-03
17	1.7954011706123485610769940772222633E-01
18	1.5056113040026424412384221877131127E-02
19	-1.3918010932653374813991477635422731E+00
20	-1.1654627659946320085073403690714797E-01
21	1.3397985455142589217626930432019672E+01
22	1.1208044642899116068626394001399239E+00
23	-1.5680141270402272637282369844604119E+02
24	-1.3107863022633865659027505322267173E+01
25	2.1925555360905234329690129668354050E+03
26	1.8319073348452433808866211206047527E+02
27	-3.6101119293222075951913791014310212E+04
28	-3.0150773126223058542158273842951346E+03
29	6.9134637614187812160020149423620786E+05
30	5.7721336363040722716587219971632366E+04
31	-1.5235812145715274206827871380493291E+07
32	-1.2717356392530083922281796470202718E+06
33	3.8284767958047026326148095596422761E+08
34	3.1949820414797702114003599308321390E+07
35	-1.0880932972261803653900943755516898E+10