

実非対称行列の固有値問題における分岐現象

樋口 健 鈴木 智博 鈴木 嘉彦

山梨大学 工学部

〒400 山梨県甲府市武田 4-3-11

実数非対称行列 A の固有値問題

$$Ax = \lambda x$$

を大域的収束性のある非線形方程式の解法であるホモトピー法を用いて解く。ホモトピーアルゴリズムを実非対称行列の固有値問題に適用した場合、一般に行列は複素固有値を持つため、ホモトピーパスの実数空間から複素空間、またはその逆への分岐現象は避けられない問題である。

我々はこの分岐現象のメカニズムを明らかにし、ホモトピーパスを実空間から複素空間へ分岐させるためのアルゴリズムを提案する。

Bifurcation Phenomenon for Solving Eigenvalue Problems with Homotopy Method

Takeshi HIGUCHI, Tomohiro SUZUKI and Yoshihiko SUZUKI

Department of Electrical Engineering and Computer Science,
Faculty of Engineering, Yamanashi University

The purpose of this paper is to solve the eigenvalue problem

$$Ax = \lambda x$$

for a real nonsymmetric matrix A with the homotopy method. Because of its global convergency, the homotopy method is a convenient solution for nonlinear equations. However, in applying this method to eigenvalue problems for real nonsymmetric matrices, the bifurcation phenomenon (a transition from real space to complex space or vice versa) of the homotopy paths is an inevitable problem. In this paper, the mechanism of the bifurcation behavior is made clear, and an algorithm which transfer from real homotopy path to complex homotopy path is proposed.

1 はじめに

本研究の目的は実数非対称行列 A の固有値問題

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

(ここで, $\lambda \in \mathbb{C}$ は A の固有値, $x \in \mathbb{C}^n$ は固有ベクトル) をホモトピー法を用いて解くことである。

固有値問題の数値解法には, ヤコビ法, ベキ乗法 (power method), QR法その他多くの数値解法が提案されている。

これらの多くの数値解法が存在する中で, 非線形方程式の解法として知られているホモトピー法を固有値問題の数値解法に適用するねらいは, この方法が分散処理に適しているからである。つまり, 我々が対象としているホモトピー法を用いた方法では, 互いに依存性のない n 本のホモトピーパスを追跡する問題となり, これらのホモトピーパスの追跡を複数台のホストに分割することが容易であるため分散処理に適しているのである。

ホモトピー法を用いた固有値問題の解法については近年 Li 等によって多くの成果が報告されている³⁾。Li 等の報告にもあるように, ホモトピーパスの追跡の際に, ホモトピーパスを実数空間から複素空間へ分岐させなくては, 解を求められなくなる場合が生じる。以後この分岐のことを分岐現象, 実数空間中のホモトピーパスを実数固有パス, 複素空間中のホモトピーパスを複素固有パス, 分岐現象が起こる境界点を分岐点とする。本論では分岐現象のメカニズムを明確にし, 実際にホモトピーパスを分岐させるアルゴリズムを提案する。

また, 分岐点は実数固有パスと複素固有パスが共存する点であるため実数空間に存在する。従って, 分岐点は実数固有パス上の点であり, 分岐点を見つけるために対象としていくのは実数固有パスとする。

2 ホモトピー法の概要

いま, 対象とする非線形方程式を $f(x) = 0$ とする。ここで $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ は連続写像である。この方程式の解を求めるために, 補助方程式 $g(x) = 0$ を導入する。 g は連続で, $g(x) = 0$ は既知な解を持つものとする。次に以下の条件を満たす連続写像 $H: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ を導入する。

$$H(x, 0) = g(x)$$

$$H(x, 1) = f(x)$$

このような H は f と g の間のホモトピーとよばれる。 $H(x, t) = 0$ は $t = 0$ の時, 既知な解である $g(x) = 0$ を満たす x を持つ。この $H(x, t) = 0$ に対して $t \in [0, 1]$

をパラメータとみなし, $f(x) = 0$ の解を求めようとするのがホモトピー法である。

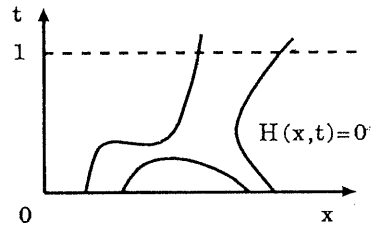


図-1 Homotopy paths

今回, 対象とするのは実数非対称行列の固有値問題であるので, 以下のように H を定義する。³⁾

$$H(x, \lambda, t) = \begin{bmatrix} \lambda x - [D + t(A - D)]x \\ \frac{x \cdot x - 1}{2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H: \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$$

なお, $dH_{(x, \lambda, t)}$ を $H(x, \lambda, t)$ の Jacobi 行列とする。また, D はその固有値及び固有ベクトルが既知な行列である。以後この行列 D を初期行列とよぶことにする。

3 分岐現象解析

3.1 定義

ここではこれから分岐現象を議論していく上での定義を示す。

定義 1 次の 1, 2 を満たす $(x_0, \lambda_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ を正則解という。

$$1. H(x_0, \lambda_0, t_0) = 0$$

$$2. dH_{(x, \lambda)}(x_0, \lambda_0, t_0) \equiv dH_{(x, \lambda)}^0 \text{ が正則}$$

定義 2 次の 1, 2 を満足する $(x_0, \lambda_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ を特異解という。

$$1. H(x_0, \lambda_0, t_0) = 0$$

$$2. dH_{(x, \lambda)}^0 \text{ が正則でなく,}$$

$$\dim \mathcal{N}(dH_{(x, \lambda)}^0) = \text{codim} \mathcal{R}(dH_{(x, \lambda)}^0) = 1$$

ただし, $\mathcal{N}(\cdot)$ は零空間, $\mathcal{R}(\cdot)$ はレンジを表す。

定義 3 次式を満たす特異解 $(x_0, \lambda_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times [0, 1]$ を特異点という。

$$H_t^0 \notin \mathcal{R}(dH_{(x, \lambda)}^0)$$

ここで, 我々が対象としているホモトピー関数 H は

$$H(x, \lambda, t): \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

であり、 H は C^∞ 級写像であるので、Sardの定理により、 H の臨界値の集合は測度が0であるような R^{n+1} の部分集合である。

したがって、定義2で示した特異解は、ほとんどの場合において定義3で示した特異点であり、今後の議論では特異点について話を進めていくが特異解の中のほとんど全てのものが特異点であることをここで強調しておく。

3.2 特異点を通る実数解曲線

以下では特異点を通る実数固有バスの存在を示す。

定理1 $(x_0, \lambda_0, t_0) \in R^n \times R \times [0, 1]$ が特異点であるときその点を通る固有バス Γ^I

$$\Gamma^I : \{\omega(s), t(s)\} \quad |s - s_0| < \delta \quad (3)$$

が存在する—ただし、 s は実数パラメータで

$$\omega(s_0) = \begin{cases} x_0 & t(s_0) = t_0 \\ \lambda_0 & \end{cases} \quad (4)$$

ここで、 $s \neq t$ 。そして、

$$\dot{t}(s_0) = \left. \frac{dt(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = 0 \quad (5)$$

$$\dot{\omega}(s_0) = \left. \frac{d\omega(s)}{ds} \right|_{s=s_0} \in N(H^0(x, \lambda)) \quad (6)$$

が成り立つ。

定理1の証明の前に、定理2を示す。

定理2

$$\text{codim} \mathfrak{R}(dH^0(x, \lambda)) = 1 \quad (7)$$

$$dH^0(x, \lambda)\phi = 0 \quad \phi \neq 0 \quad (8)$$

$$\psi^T dH^0(x, \lambda) = 0 \quad \psi \neq 0 \quad (9)$$

ならば、

$$\psi^T \phi \neq 0 \quad (10)$$

である。

定理2の証明：式(7),(8),(9)かつ

$$\psi^T \phi = 0 \quad (11)$$

であるとする。

式(9),(11)より ϕ は、ある Y に対して

$$\phi = dH^0(x, \lambda)Y \neq 0 \quad (12)$$

と表せる。ただし、 $\phi \neq 0$ より

$$Y \neq \alpha\phi \quad Y \in R \quad \alpha \in R$$

である。

これを式(8)へ代入すると

$$dH^0(x, \lambda)dH^0(x, \lambda)Y = 0 \quad (13)$$

となる。

ここで、 $dH^0(x, \lambda)$ が0を一つ(重複度1)固有値に持つ行列と考えると、式(7),(12),(13)より固有値0の標数⁶⁾は $k=2$ 、重複度は $m = \text{codim}(dH^0(x, \lambda)) = 1$ であるから

$$k > m$$

となってしまう、標数と重複度の関係 $k \leq m$ ⁶⁾に矛盾。よって

$$\psi^T \phi \neq 0$$

である。

なお、これ以降の定理や証明の ϕ, ψ は定理2に示したものとす。

定理1の証明：定義2,3より

$$N(dH^0(x, \lambda)) = \text{span}\{\phi\} \quad (14)$$

$$\mathfrak{R}(dH^0(x, \lambda)) = \{v \in R^n \mid \psi^T v = 0\} \quad (15)$$

$$d \equiv \psi^T dH^0_i \neq 0 \quad (16)$$

となる $\phi \in R^{n+1}$ 、 $\psi \in R^{n+1}$ が存在し、定理2より

$$\psi^T \phi \neq 0 \quad (17)$$

である。

ここで、次のような系を考える。

$$F(\omega, t, s) \equiv \begin{pmatrix} H(\omega, t) \\ \psi^T[x - x_0] - (s - s_0) \end{pmatrix} = 0 \quad (18)$$

$$\omega = (x^T, \lambda) \quad , \quad x_0, s_0 \text{ is constant}$$

$$F : R^n \times R \times [0, 1] \times R \rightarrow R^{n+1} \times R$$

陰関数定理を F に適用することができれば、固有バス Γ^I の存在がいえるので、陰関数定理が適用できることをこれから示す。 $F(\omega_0, t_0, s_0) = 0$ は明らかである。

$$B \equiv \frac{\partial F(\omega_0, t_0, s_0)}{\partial(\omega, t)} = \begin{pmatrix} dH^0(x, \lambda) & dH^0_i \\ \psi^T & 0 \end{pmatrix} \quad (19)$$

とする。いま、

$$B \begin{pmatrix} \nu \\ \chi \end{pmatrix} = 0 \quad (20)$$

なる $\nu \in R^{n+1}$ 、 $\chi \in R$ について考えると、式(20)より

$$dH^0(x, \lambda)\nu + dH^0_i\chi = 0 \quad (21)$$

である。この式に左から ψ^T を作用させると、

$$\psi^T(dH^0(x, \lambda)\nu + dH^0_i\chi) = 0 \quad (22)$$

となる。

$$dH^0(x, \lambda)\nu \in \mathfrak{R}(dH^0(x, \lambda)), \quad \psi^T dH^0_i \neq 0 \text{ より} \\ \chi = 0$$

がいえる。よって、 $\chi = 0$ を式(21)へ代入すると

$$dH^0(x, \lambda)\nu = 0$$

となり、当然の結果として

$$\nu = \beta\phi \quad \text{for some } \beta \in R$$

である。この結果と式(17),(20)より

$$\begin{aligned}\psi^T \beta \phi &= 0 \\ \beta &= 0\end{aligned}$$

つまり

$$\nu = 0$$

であるから式(20)より、 B は正則である。

これによって式(18)に陰関数定理を適用することができ、 $s = s_0$ 近傍での $F(\omega(s), t(s), s) = 0$ を満足する固有パス Γ^I の存在がいえた。よって、

$$H(\omega(s), t(s)) = 0 \quad (23)$$

となり、式(23)を $s = s_0$ で微分すると

$$dH_{(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}(s_0) + dH_{t_0}^0 \dot{t}(s_0) = 0 \quad (24)$$

となり、定義3より式(24)は

$$\begin{aligned}dH_{(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}(s_0) &= 0 \\ dH_{t_0}^0 \dot{t}(s_0) &= 0\end{aligned}$$

であるから式(5),(6)は明らかである。

もちろん、 s_0 の付近でパラメータ $s \equiv t$ ならば $\dot{t}(s_0) = 1$ となるため、 $s \equiv t$ は矛盾である。 ■

3.3 凸な特異点

以下では式(23)を用いて、 $s = s_0$ の点を通る固有パスの解析をして、最終的に特異点を境界にして一方には実数固有パスが存在し、もう一方には複素固有パスが存在することを示す。

式(23)の s による2階の導関数は次式ようになる。

$$\begin{aligned}dH_{(x,\lambda)}^0 \ddot{\omega}_0 + dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}_0 \dot{\omega}_0 + 2dH_{(x,\lambda)t_0}^0 \dot{\omega}_0 \dot{t}_0 \\ + dH_{t_0 t_0}^0 \dot{t}_0^2 + dH_{t_0}^0 \ddot{t}_0 = 0\end{aligned} \quad (25)$$

定理1より特異点においては $\dot{t}_0 = 0$ だから、式(25)は

$$dH_{(x,\lambda)}^0 \ddot{\omega}_0 + dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}_0 \dot{\omega}_0 + dH_{t_0}^0 \ddot{t}_0 = 0 \quad (26)$$

である。式(26)に式(15)の ψ^T を左から作用させると

$$\psi^T dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}_0 \dot{\omega}_0 + \psi^T dH_{t_0}^0 \ddot{t}_0 = 0 \quad (27)$$

式(6)より

$$\dot{\omega} = \alpha \phi \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

である。また、式(16)より、式(27)は

$$\dot{t}_0 = -\alpha^2 \frac{\psi^T dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \dot{\omega}_0 \dot{\omega}_0}{\psi^T dH_{t_0}^0} \quad (28)$$

となり、もし $\dot{t}_0 \neq 0$ ならば局所的に解曲線は t_0 の一方に存在することになる。

定義4 (x_0, λ_0, t_0) が特異点で

$$a \equiv \psi^T dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \phi \phi \neq 0 \quad (29)$$

のとき、 (x_0, λ_0, t_0) を凸な特異点という。

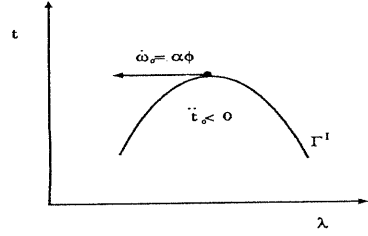


図-2 Convex singular point

ここで、我々が対象としているホモトピー関数 H では、 (x_0, λ_0, t_0) が特異点であるならば、それは凸な特異点であることを示す。

定理3 行列 $[D + t(A - D)]$ の固有値の重複度が2で、解曲線が交わる時

$$a \neq 0$$

である

証明

$$\psi = \begin{pmatrix} g \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \phi = \begin{pmatrix} h \\ \nu \end{pmatrix}, \quad g, h \in \mathbb{R}^n, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

とすると、

$$dH_{(x,\lambda)}^0 \phi = \begin{bmatrix} [A(t_0) - \lambda_0 I] h - \nu x_0 \\ x_1 h_1 + \dots + x_n h_n \end{bmatrix} = 0 \quad (30)$$

より、 $\nu \neq 0$ でなければならない。なぜならば、 $\nu = 0$ であるとする、 h は $A(t_0)$ の固有ベクトルである。また、 $\dim\{\ker[A(t_0) - \lambda_0 I]\} = 1$ であるので、 $h = c x_0$ ($c \neq 0$)となる。

しかし、 $h = c x_0$ ($c \neq 0$)であるとする、

$$c [x_1^2 + \dots + x_n^2] = c \neq 0$$

となり、これは矛盾であるので、 $\nu \neq 0$ である。また、

$$\begin{cases} 0 = \psi^T dH_{(x,\lambda)}^0 \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ = (g^T, \bar{\mu}) \begin{pmatrix} A(t_0) - \lambda_0 I & -x_0 \\ x_0^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{\mu} \\ 0 \neq \psi^T \phi = (g^T, \bar{\mu}) \begin{pmatrix} h \\ \nu \end{pmatrix} = g^T h \end{cases} \quad (31)$$

より

$$a = \psi^T dH_{(x,\lambda)(x,\lambda)}^0 \phi \phi = -2\nu g^T h \neq 0 \quad (32)$$

がいえる。 ■

今後凸な特異点について話を進めていく。

3.4 特異点を通る複素解曲線

$$R^{n+1} \oplus iR^{n+1} \equiv \{\omega = \mu + i\nu \mid \mu \in R^{n+1}, \nu \in R^{n+1}\}$$

と定義する。

そして、 $H(\omega, t) = 0$ を次のように考える。

$$H \equiv H(\mu + i\nu, t) \equiv f(\mu, \nu; t) + ig(\mu, \nu; t) = 0 \quad (33)$$

ここで、 $t \in R$ で $f(\cdot), g(\cdot)$ は H の実部と虚部である。

また、 $\nu = 0$ のとき $H(\omega, t) = 0$ は実数だけの問題として次のように考えられる。

$$\left. \begin{aligned} f(\mu, 0; t) &\equiv H(\mu, t) \\ g(\mu, 0; t) &= 0 \end{aligned} \right\} \forall \mu \in R^{n+1}, t \in R \quad (34)$$

さらに、 $H(\omega, t) = 0$ は ω に関して、微分可能であるとすると、Cauchy-Riemann の定理より次式を満足しなければならない。

$$\left. \begin{aligned} f_\mu(\mu, \nu; t) &= g_\nu(\mu, \nu; t) \\ f_\nu(\mu, \nu; t) &= -g_\mu(\mu, \nu; t) \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

ここで、

$$\Gamma(s) : \{\mu(s), \nu(s), t(s)\} \quad (36)$$

の形式で式 (33) のなめらかな解を探す。

式 (33), (36) から

$$\left\{ \begin{aligned} f(\mu(s), \nu(s); t(s)) &= 0 \\ g(\mu(s), \nu(s); t(s)) &= 0 \end{aligned} \right. \quad (37)$$

である。 $s = s_0$ で式 (36) は特異点であるから、

$$\mu(s_0) = \omega_0, \quad \nu(s_0) = 0, \quad t(s_0) = t_0$$

である。式 (37) を $s = s_0$ で微分すると

$$\left\{ \begin{aligned} f_\mu^0 \dot{\mu}_0 + f_\nu^0 \dot{\nu}_0 + f_t^0 \dot{t}_0 &= 0 \\ g_\mu^0 \dot{\mu}_0 + g_\nu^0 \dot{\nu}_0 + g_t^0 \dot{t}_0 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (38)$$

ここで、式 (34) より

$$g_\mu(\mu, 0; t) = 0, \quad g_t(\mu, 0; t) = 0$$

そして、式 (35) より式 (38) は

$$\begin{pmatrix} f_\mu^0 & 0 \\ 0 & f_\mu^0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mu}_0 \\ \dot{\nu}_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_t^0 \\ 0 \end{pmatrix} \dot{t}_0 = 0 \quad (39)$$

定義 2, 3 と式 (34) より

$$f_t^0 \notin \mathfrak{R}(f_\mu^0)$$

となり、式 (39) の解は

$$\dot{t}_0 = 0, \quad \dot{\mu}_0 = \alpha\phi, \quad \dot{\nu}_0 = \beta\phi, \quad \alpha, \beta \in R \quad (40)$$

と表せる。ここで、 α, β は任意の実数パラメータである。

次に $s = s_0$ で式 (37) を 2 階微分し、 ψ^T を左から作用させ、式 (34) と式 (35) から

$$\left. \begin{aligned} f_\nu^0 &= -g_\mu^0 = 0 & f_{\nu\nu} &= -f_{\mu\mu} \\ f_{\mu\nu}^0 &= -g_{\mu\mu}^0 = 0 & g_{\mu\nu} &= f_{\mu\mu} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

を得る。

式 (40), (9) より

$$\left\{ \begin{aligned} [\alpha^2 - \beta^2] \psi^T f_{\mu\mu}^0 \phi + \psi^T f_t^0 \dot{t}_0 &= 0 \\ \alpha\beta \psi^T f_{\mu\mu}^0 \phi &= 0 \end{aligned} \right. \quad (42)$$

である。 (ω_0, t_0) は凸な特異点であるので式 (42) の解は、式 (6) と定義 3 より

$$\left\{ \begin{aligned} \beta &= 0 \\ \dot{t}_0 &= -\alpha^2 \frac{a}{d} \end{aligned} \right. \quad (43)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= 0 \\ \dot{t}_0 &= \beta^2 \frac{a}{d} \end{aligned} \right. \quad (44)$$

よって、 (ω_0, t_0) を通る固有パスは次のように 2 つ存在する。

$$\Gamma^I : \left\{ \begin{aligned} \omega^I(s) &= \omega_0 + \alpha[s - s_0]\phi + \mathcal{O}([s - s_0]^2) \\ t^I(s) &= t_0 + 0 - \alpha^2[s - s_0]^2 \frac{a}{d} + \mathcal{O}([s - s_0]^3) \end{aligned} \right.$$

$$\Gamma^{II} : \left\{ \begin{aligned} \omega^{II}(s) &= \omega_0 + i\beta[s - s_0]\phi + \mathcal{O}([s - s_0]^2) \\ t^{II}(s) &= t_0 + 0 + \beta^2[s - s_0]^2 \frac{a}{d} + \mathcal{O}([s - s_0]^3) \end{aligned} \right.$$

これより (ω_0, t_0) を境にして、一方には実数解曲線が存在し、もう一方には複素数解曲線が存在することがわかる。さらに、 (ω_0, t_0) における接線ベクトルは ϕ 方向と、 $i\phi$ 方向であることがわかる。

以上で凸な特異点を境界にして、一方には実数固有パスが存在し、もう一方には複素固有パスが存在することが示された。

4 分岐アルゴリズム

ここでは、固有パスを実数パスから複素パスへ分岐させるアルゴリズムを紹介する。原理は極めて単純であるが、分岐点を見つけてから分岐させる従来の方法よりも効率的である。

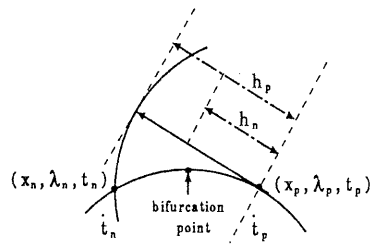


図-3 bifurcatin predictor

分岐現象解析で分岐は凸な特異点で起こることが示された。したがって、固有パスを追跡していく過程で接線ベクトルの i 成分が負になった時に得られる実数固有パス上の点 (x_n, λ_n, t_n) と、その一つ前の点 (x_p, λ_p, t_p) との間に分岐点があることは、明らかである。また、きざみ幅 h_p が大き過ぎない限り、 (x_p, λ_p, t_p) から (x_n, λ_n, t_n)

までの固有パス上の接線ベクトルの*i*成分は単調減少するものと考えて問題はない。

そこでLi等によって提案された分岐点探索アルゴリズム³⁾で用いられた式(45)によりきざみ幅 h_p を h_n に変更し、きざみ幅 h_n を用いて新しく予測点を生成する。

$$\frac{h_n}{h_p} \dot{x}_p + \frac{h_p - h_n}{h_p} \dot{x}_n = 0 \quad (45)$$

我々のアルゴリズムではこの新しく生成された予測点にわずかな複素成分を含ませ、Inverse Iteration Method⁷⁾⁸⁾ (IIM) を用いて複素固有パスに分岐させる。ここで、IIM を用いたのは、新しく生成された予測点 がそれほど正確な値でなくても解に収束するからである⁷⁾。

以下にアルゴリズムを示す。

```
#define ε = 1.0 - e6
#define sign(x) (x > 0 ? 1.0 : -1.0)
```

```
/* correct step size */
h_n = (i_n * h_p) / (t_n - t_p);
/* generate predictor */
x = x_p + h_n * x_dot_p + i(sign(x_dot_p) * ε);
λ = λ_p + h_n * λ_dot_p + i(sign(λ_dot_p) * ε);
t = t_p + h_n * t_dot_p;
/* Inverse iteration method */
IIM(x, λ, t);
```

(ただし、 $i(\cdot)$ は虚数部を表している。)

このアルゴリズムは、予測点生成の簡単さと、この予測点の精度の荒さをカバーするIIMの収束性の良さの二つの特徴をいかした方法である。

5 おわりに

今回M.E.Henderson¹⁾やE.L.Allgower²⁾等の成果をもとに、実非対称行列の固有値問題にホモトピー法を適用したときに生じる、実数空間から複素空間への分岐現象を明確にし、実数固有パスから複素固有パスへの新しい分岐アルゴリズムを提案した。

分岐現象の解析においては、固有値問題に適用したホモトピー法での分岐点は凸な特異点になっており、分岐点を境に一方には実数固有パスもう一方には複素固有パスが存在していることを示した。凸な特異点での実数固有パス上の接線ベクトルが具体的には ϕ 方向であったとすると、複素固有パス上の接線ベクトルは $i\phi$ 方向であるという単純な構造であることを明らかにした。

また、分岐アルゴリズムでは解析結果から分岐点の一方には複素固有パスが存在することがわかったので、

分岐点を求めるのではなく分岐点より複素固有パスが存在する側に予測点を生成し、IIMを用いて複素空間に分岐させる手法を用いることにした。実際に異なる10個の100×100行列の数値計算例では、いずれも予測点から一回の反復で分岐に成功している。

しかし、ホモトピー法を用いることでの最大の利点であると思われる、分散処理に関する効果を実証するまでには至っておらず、我々の研究ではホモトピー法を用いた固有値問題の解法の、他の固有値問題の数値解法に対する優位性を確認できていない。また、IIMを分岐アルゴリズムに適用した場合、IIMで用いられている幾つかのパラメータの最適値の決定法は十分なものではない。そして、ホモトピー法を用いた解法の効率を左右する重要な問題である初期行列の選び方の理論的な考察がなされていない。

以上課題、問題点に対する研究成果は稿を改めて論じたい。

参考文献

- 1) M.E.Henderson and H.B.Keller : "Complex Bifurcation From Real Path", SIAM J.APPL.MATH., vol.50.No.2, pp.460-482. april(1990)
- 2) E.L.Allgower : "Bifurcations arising in the calculation of critical points via homotopy methods", in Numerical Methods for Bifurcation problems, proc.Conf. at University of Dortmund, T.Kupper, H.D.Mittelman, and H.Weber, eds., Basel, 1984, Birkhäuser Verlag, pp.15-28
- 3) T.Y.Li, Zhonggang Zeng and Luan Cong : "Solving Eigenvalue Problems of Real Nonsymmetric Matrices with Real Homotopies", SIAM J.Number.Anal., 29(1992), pp.229-248
- 4) 戸川隼人 : "マトリクスの数値解法", オーム社(昭和46)
- 5) 小島政和 : "相補性と不動点", 産業図書(昭和56)
- 6) 笠原 : "線形代数と固有値問題", 現代数学社(昭和47)
- 7) Toshio SUZUKI : "Inverse Iteration Method with a Complex Parameter", Proc.Japan Acad., 68, Ser.A, No.3, (1992), pp68-73
- 8) Toshio SUZUKI : "Inverse Iteration Method with a Complex Parameter II", Advanced Studies in Pure Mathematics 23, 1994 spectral and Scattering Theory and Applications, pp.307-310
- 9) Yamamura KIYOTAKA : "Simple Algorithms for Tracing Solution Curves", IEEE Trans.Circuits Syst., vol.40, NO.8, pp537-541
- 10) 鈴木智博, 樋口健, 鈴木嘉彦 : "ホモトピー法を用いた固有値問題の解法", 情報研報 93-HPC-47, pp.21-28(1993)