Reaction–Diffusion Equations の Fractal 次元

大坪 敏昌, 谷 温之, 野寺 隆
慶應義塾大学数理科学科

Reaction – Diffusion Equations （$\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + g(u,\ x) = 0$） の一つの例として非線形項に Lorenz モデルの非線形項をもつものを考える．その方程式の初期 – 境界値問題における解の存在および，アトラクターの存在を示す．また，方程式を線形化することにより，方程式の解を Lyapunov 指数と関連づけアトラクターの Fractal 次元（Hausdorff 次元）の存在を調べることにする．

また，粘性係数 ν や非線形項 $g(u,\ x)$ に現れる定数を変化させることで Fractal 次元がどのような値をとるかを見るためにいくつかの例を挙げることにする．このとき，粘性係数を $\nu = 0$ としたときの Fractal 次元が Lorenz モデルのアトラクターの次元 $d_H(\mathcal{A}) = 2.538$ （ただし，$\sigma = 10$, $\mathrm{b} = \frac{8}{3}$, $\mathrm{r} = 28$ である）と一致していることから Lorenz モデルを含んでいる方程式であることが確認される．

FRACTAL DIMENSIONS OF THE REACTION – DIFFUSION EQUATIONS

Toshimasa Otsubo, Atusi Tani, Takashi Nodera

Department of Mathematics
Keio University

In this paper, we study the Fractal (Hausdorff) Dimension of the Reaction – Diffusion Equations ($\frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + g(u,\ x) = 0$). In particular, we discuss the Lorenz type equations. First, we will show the existence of the solutions and the attractors of the Lorenz type equations. We linearize these equations and it is concerned with Lyapunov Exponent. Then, it gives us the Fractal (Hausdorff) Dimension.

Finally, we will give you some numerical experiments of this dimension (It depends on the viscosity ν or the constants of nonlinear term σ, b, r). We can show that when $\nu = 0$ these equations coincides with the Lorenz Model (Hausdorff dimension of Lorenz Model is 2.538, where $\sigma = 10$, $\mathrm{b} = \frac{8}{3}$, $\mathrm{r} = 28$).

1　方程式の記述

今回扱う方程式は, Reaction − Diffusion Equations の一つであり, 次の初期 − 境界値問題で表される. ただし, $\Omega = (0,\ 1)$ であり, Γ は Ω の境界とする.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} - \nu \Delta u_1 + \sigma u_1 - \sigma u_2 = 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \nu \Delta u_2 + \sigma u_1 + u_2 + u_1 u_3 = 0, \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial t} - \nu \Delta u_3 + \mathrm{b} u_3 - u_1 u_2 \\ \qquad\qquad + \mathrm{b}(\mathrm{r} + \sigma) = 0 \end{cases}$$

$$\text{in} \quad \Omega \times \mathrm{I\!R}_+, \qquad (1)$$

$$u = 0 \qquad \text{on} \ \ \Gamma, \qquad (2)$$

$$u(x,\ 0) = u_0(x) \qquad \text{in} \ \ \Omega. \qquad (3)$$

$\nu \geq 0$ は粘性係数であり, u_0 は与えられているものとする. また, σ, b, r は次の関係式を満たす定数とする.

$$\sigma > 0, \qquad \mathrm{b} > 1, \qquad \mathrm{r} > 0.$$

この方程式を関数空間

$$\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\Omega), \qquad \mathrm{V} = \mathrm{H}_0^1(\Omega)$$

で考える. それぞれの空間のノルムを $|\cdot|$, $\|\cdot\|$ で表し, 次式のように定義する.

$$|u| = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2},$$

$$\|u\| = \left\{ \sum_i |\mathrm{grad}\ u_i|^2 \right\}^{1/2}.$$

この時, 次を仮定する.

仮定 1 正値不変な凸領域 $\mathcal{D} \subset \mathrm{I\!R}^3$ が存在する.

仮定 2 (1) 式の非線型項を $g(u,\ x)$ と置くとき, g は連続であり, $\mathcal{D} \times \bar{\Omega}$ 上で有界である. ここで,

$$c_1 = \sup_{\substack{u \in \mathcal{D} \\ x \in \Omega}} |g(u,\ x)|$$

と置くことにする.

2　基本定理

この節では, (1) − (3) 式の解の存在とアトラクターの存在を示す 2 つの定理を与える.

定理 1 もし $u_0 \in \mathrm{L}^2(\Omega;\ \mathcal{D})$ ならば, 問題 (1) − (3) は解をもち,

$$u(t) \in \mathrm{L}^2(\Omega;\ \mathcal{D}),\ \forall t,$$

$$u \in \mathrm{L}^2\left(0,\ \mathrm{T};\ \mathrm{H}_0^1(\Omega)\right),\ \forall \mathrm{T} > 0$$

を満たす. また写像 $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$ は $\mathrm{L}^2(\Omega)$ において連続となる. この $S(t)$ は半群となる.

さらに, $u_0 \in \mathrm{H}_0^1(\Omega) \cap \mathrm{L}^2(\Omega;\ \mathcal{D})$ ならば,

$$u \in \mathcal{C}\left([0,\ \mathrm{T}];\ \mathrm{H}_0^1(\Omega)\right) \cap \mathrm{L}^2\left(0,\ \mathrm{T};\ \mathrm{H}^2(\Omega)\right)$$

を満たす (ただし, $\forall \mathrm{T} > 0$).

次にアトラクターに対する定理を導くことにする. 空間 H, V において, それぞれ Gronwall の補題を用いることにより, 次の様なアプリオリ (a priori) 評価

$$|u(t)|^2 \leq |u_0|^2 e^{-2lt} + \frac{\mathrm{b}^2}{4l(\mathrm{b}-1)}(\mathrm{r}+\sigma)^2\left(1 - e^{-2lt}\right), \quad (4)$$

$$\|u(t)\|^2 \leq \|u_0\|^2 e^{-\nu t} + \left(\frac{c_1}{\nu}\right)^2\left(1 - e^{-\nu t}\right) \quad (5)$$

を導き出せる. ただし, $l = \min(1+\nu,\ \sigma+\nu)$ である. このとき, (4), (5) 式において上極限をとると

$$\limsup_{t\to\infty} |u(t)| \leq \frac{\mathrm{b}}{2\sqrt{l(\mathrm{b}-1)}}(\mathrm{r}+\sigma), \quad (6)$$

$$\limsup_{t\to\infty} \|u(t)\| \leq \frac{c_1}{\nu}. \quad (7)$$

さらに, (4), (5) 式より次のことがいえる.

- (6) 式の右辺を ρ_0 とおくと, 中心 0, 半径 $\rho_0'(\geq \rho_0)$ の空間 H の球 $\mathrm{B}(0,\ \rho_0') \equiv \mathcal{B}_0$ は, 半群 $S(t)$ に対して正値不変である. もし $\rho_0' > \rho_0$ ならば, この球は吸収集合 (Absorbing Set) となる.

  実際, 正数 R に対して B(0, R) を含む空間 H の有界集合を $\mathcal{B}$ とするならば, (4) 式により

  $$S(t)\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_0 \quad \text{for} \ \ \forall t \geq t_0 = t_0(\mathcal{B},\ \rho_0'),$$

  $$t_0 = \frac{1}{2l}\log\frac{\mathrm{R}^2}{{\rho_0'}^2 - \rho_0^2}$$

  が成り立つ.

- 空間 H と同様に, (7) 式の右辺を ρ_1 とおくと, 中心 0, 半径 $\rho_1'(\geq \rho_1)$ の空間 V の球 $\mathrm{B_V}(0,\ \rho_1')$ は半群 $S(t)$ に対して正値不変となる. (5) 式から $\rho_1' > \rho_1$ ならば, この球は吸収集合であることがわかる. すなわち,

$$S(t)\mathcal{B} \subset \mathrm{B_V}(0,\ \rho_1') \quad \text{for } \forall t \geq t_1 = t_1(\mathcal{B},\ \rho_1').$$

以上のことから次の定理が成り立つ.

定理 2 仮定 1, 2, および定理 1 の仮定を満たすものとする. このとき問題 (1) - (3) に付随する半群 $S(t)$ は最大アトラクター (*maximal attractor*) $\mathcal{A}$ をもつ. この $\mathcal{A}$ は空間 V で有界, 空間 $\mathrm{L}^2(\Omega;\ \mathcal{D})$ でコンパクトかつ連結となる. また空間 $\mathrm{L}^2(\Omega;\ \mathcal{D})$ の有界集合を引きつける.

3 アトラクターの Hausdorff 次元

3.1 次元の定義と仮定

定義 1 (Hausdorff 次元) E を距離空間 (*metric space*), $\mathrm{Y} \subset \mathrm{E}$ とする. $d \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon > 0$ を与えるとき

$$\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d,\ \varepsilon) \equiv \mathrm{Inf} \sum_{i \in \mathrm{I}} r_i{}^d$$

とおくことにする. ただし, Inf は半径 $r_i \leq \varepsilon$ の E の球の族 $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ による Y のすべての被覆 (*covering*) を考える. $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d,\ \varepsilon)$ は ε について非増加関数であるから, $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d)$ を

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d,\ \varepsilon) \\ &= \sup_{\varepsilon > 0} \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d,\ \varepsilon) \end{aligned}$$

で定義する. これを Hausdorff 測度 (measure) と呼ぶ.

もし, ある d' に対して $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d') < \infty$ ならば, $d > d'$ のとき $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d) = 0$ となる. よって, 次の条件を満たす $d_0 \in [0,\ \infty]$ が存在することになる.

$$\begin{cases} \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d) = 0 & \textit{for} \quad d > d_0, \\ \mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d) = \infty & \textit{for} \quad d < d_0 \end{cases}$$

このことより, $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y},\ d_0)$ は区間 $[0,\ \infty]$ のある値をとることがわかる. この数 d_0 を Y の Hausdorff 次元と呼び $\mu_{\mathrm{H}}(\mathrm{Y})$ で表すことにする.

ここで, 次の仮定をする.

仮定 3 $X \subset \mathrm{H}$ をコンパクト集合, $S : X \longrightarrow \mathrm{H}$ を連続で,

$$SX = X \tag{8}$$

が成り立つ. この X を不変集合 (*Invariant Set*) と呼ぶ.

仮定 4 S を「X 上, 一様微分可能」として与える. すなわち,

各 $u \in X$ に対し線形作用素 $L(u) \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ が存在して

$$\sup_{\substack{u,v\in X \\ 0<|u-v|\leq\varepsilon}} \frac{|Su - Sv - L(u)(v-u)|}{|v-u|} \longrightarrow 0 \qquad as \quad \varepsilon \longrightarrow 0 \tag{9}$$

が成り立つ.

仮定 5

$$\sup_{u\in X} |L(u)|_{\mathcal{L}(\mathrm{H})} < +\infty, \tag{10}$$

$$\sup_{u\in X} \omega_d\,(L(u)) < 1 \quad \textit{for some} \quad d > 0 \tag{11}$$

とする. ただし, $\omega_d(L)$ は以下で定義するものである.

$$\begin{cases} \omega_d(L) = \omega_n(L)^{1-s}\omega_{n+1}(L)^s \\ \qquad\qquad \textit{for} \quad d = n+s,\ n \in \mathbb{N},\ 0 < s < 1, \\ \omega_d(L) = 1 \quad \textit{for} \quad d = s,\ 0 < s < 1. \end{cases}$$

ただし, $\omega_n(L)$ は

$$\omega_m(L(t,\ u_0)) = \sup_{\substack{\xi_i\in\mathrm{H} \\ |\xi_i|\leq 1}} |U_1(t) \wedge \cdots \wedge U_m(t)| \tag{12}$$

で定義する. ただし, $U_j(t)$, $(j = 1,\ \cdots,\ m)$ は

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(t) = F(u(t)), \quad t > 0, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

と置いたときの線形化初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}(t) = F'(S(t)u_0) \cdot U(t), \\ U(0) = \xi \end{cases}$$

の m 個の解である (3.2 節を参照).

3.2 アトラクターの次元

Hausdorff 次元を求めるためにはまず, (1) - (3) 式を線形化する. そのために,

$$u' = F(u) \tag{13}$$

とおくことにする. また, U を次式で定義する.

$$U' = F'(u)U, \tag{14}$$

$$U(0) = \xi. \tag{15}$$

このようにすると, (1) - (3) 式は次式のように書き換えることができる.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t} - \nu\Delta U + g'_u(u,\ x)U = 0 & \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ U = 0 & \text{on } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ U(x,\ 0) = \xi(x) & \text{in } \Omega. \end{cases} \tag{16}$$

ただし, $U = U_1,\ U_2,\ U_3$ は (16) 式の解, $\xi = \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3$ はそれに対応する初期値である. このときに次式が成り立つ ($i = 2,\ 3$).

$$\frac{d}{dt}|U_1 \wedge \cdots \wedge U_i| = |U_1 \wedge \cdots \wedge U_i| \operatorname{Tr}(F'(u) \circ Q_i). \tag{17}$$

ただし, Q_i ($i = 2,\ 3$) は H 内の $U_1, \ldots,\ U_i$ で張られた空間への直交射影, u は (1) - (3) 式の解である. 今, φ_j を $Q_3(\tau)\mathrm{H} = \operatorname{Span}[U_1(\tau),\ U_2(\tau),\ U_3(\tau)]$ の正規直交基底とするとこれは,

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{3}}\sin(\pi j x)$$

で表すことができる.

ここで, (14) 式の右辺を

$$\begin{aligned} F'(u)U &= \nu\Delta U - g'_u(u)U \\ &= \nu\Delta U - (A_1 + A_2 + B(u))U \end{aligned}$$

と書き換える. ただし,

$$A_1 = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{b} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 \\ \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u_2 & 0 & u_1 \\ -u_2 & -u_1 & 0 \end{pmatrix}$$

である. そこで, $i = 2,\ 3$ について (17) 式の右辺を評価する.

$$\operatorname{Tr}(F'(u(\tau)) \circ Q_i(\tau)) = \sum_{j=1}^{i} (F'(u(\tau))\varphi_j(\tau),\ \varphi_j(\tau)).$$

$i = 2$ のとき

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}(F'(u) \circ Q_2) \\ &\quad \le -\frac{5}{3}\nu\pi^2 - (\sigma + \mathrm{b} + 1) + m \\ &\quad\quad + \frac{\mathrm{b}}{4\sqrt{l(\mathrm{b}-1)}}(\mathrm{r} + \sigma) \\ &\quad \equiv k_2. \end{aligned} \tag{18}$$

ただし, $m = \max(\sigma,\ \mathrm{b},\ 1)$ である.

$i = 3$ のとき

$$\begin{aligned} &\operatorname{Tr}(F'(u) \circ Q_3) \\ &\quad \le -\frac{14}{3}\nu\pi^2 - (\sigma + \mathrm{b} + 1) \\ &\quad \equiv k_3. \end{aligned} \tag{19}$$

$i = 2$ の場合には, (17) 式より

$$|U_1(t) \wedge U_2(t)| = |\xi_1 \wedge \xi_2| \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} F'(u) \circ Q_2(\tau)d\tau\right).$$

$L(t, u_0)$ を $U(t) = L(t,\ u_0)U(0)$ を満たす線形作用素とすると, (12) 式より

$$\omega_2(L(t,\ u_0)) \le \sup_{\substack{\xi_i \in \mathrm{H} \\ |\xi_i| \le 1}} \exp\left(\int_0^t \operatorname{Tr} F'(u) \circ Q_2(\tau)d\tau\right) \tag{20}$$

となる.

この ω を Lyapunov 指数に関連づける.

$$q_2(t) = \sup_{u_0 \in X} \sup_{\substack{\xi_i \in \mathrm{H} \\ |\xi_i| \le 1}} \left(\frac{1}{t}\int_0^t \operatorname{Tr} F'(u) \circ Q_2(\tau)d\tau\right),$$

$$q_2 = \limsup_{t\to\infty} q_2(t) \le k_2.$$

これより, Lyapunov 数 Λ_i と Lyapunov 指数 μ_i の関係式は

$$\Lambda_1\Lambda_2 \le \exp(q_2) \le \exp(k_2), \tag{21}$$

$$\mu_1 + \mu_2 \le q_2 \le k_2 \tag{22}$$

となる.

同様にして, $i = 3$ の場合には,

$$\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \le k_3 \tag{23}$$

という関係式が得られる.

このときに, 次の定理が成り立つ.

定理 3 仮定 (8) – (11) 式の下で, X の Hausdorff 次元は有限かつ d 以下となる.

この定理は次のように書き直すことができる.

定理 4 仮定 (8) – (10) 式の下で, $n \ge 1$ について,

$$\mu_1 + \cdots + \mu_{n+1} < 0$$

が成立するならば

$$\mu_{n+1} < 0, \qquad \frac{\mu_1 + \cdots + \mu_n}{|\mu_{n+1}|} < 1$$

となり, X の Hausdorff 次元は

$$n + \frac{(\mu_1 + \cdots + \mu_n)_+}{|\mu_{n+1}|} \tag{24}$$

以下である.

この定理に (22), (23) 式をあてはめると, 求めたいアトラクターの Hausdorff 次元は, $k_2 > 0$, $k_3 < 0$ となることから, (24) 式により

$$2 + \frac{k_2}{k_2 - k_3} \tag{25}$$

以下である. ただし,

$$k_2 = -\frac{5}{3}\nu\pi^2 - (\sigma + \mathrm{b} + 1) + m + \frac{\mathrm{b}}{4\sqrt{l(\mathrm{b}-1)}}(\mathrm{r} + \sigma),$$

$$k_3 = -\frac{14}{3}\nu\pi^2 - (\sigma + \mathrm{b} + 1)$$

である.

4 数値例

ここでは、前の節で行なった計算により, 得られた Hausdorff 次元の ν および非線形項の定数 σ, b, r に具体的な値を与えたいくつかの例を挙げる.

次の表は定数 $\nu = 0$, 0.5, 1.0 の場合における Hausdorff 次元を示している.

ν	**A**	**B**	**C**	**D**
0	2.53865	2.54080	2.61657	2.68
0.5	2.10118	1.79763	2.33787	1.45167
1.0	1.60569	1.23921	2.13850	1.05344

A : $(\sigma, \mathrm{b}, \mathrm{r}) = (10, \frac{8}{3}, 28)$ **B** : $(5, \frac{4}{3}, 14)$
C : $(20, \frac{16}{3}, 56)$ **D** : $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 10)$

表 1: Hausdorff 次元の比較

ここで扱っている 4 組の定数は, **A** は Lorenz[2] で示されているもの, **B**, **C** はそれぞれ **A** の 0.5 倍, 2 倍である. また, **D** については (18) 式の max, min (m, l) が他の 3 組とは異なる場合を示している.

5 考察・今後の課題

5.1 考察

表 1 から判るように ν の値が増えることにより, Hausdorff 次元の値が減少している. これは, ν が粘性係数と呼ばれるものであり, この値が増えることで解の収束時間が早くなりアトラクターの大きさもそれにつれて小さくなるためである (t_0, t_1 以降の同じ t について). この Hausdorff 次元は ν を大きくしていくことによって最終的には 0 に収束することがわかっている. これは, 次の注による.

注 1 定理 4 において $\mu_1 < 0$ となった場合は X の Hausdorff 次元はなくなる. すなわち 0 となる. ただし,

$$\mu_1 = -\frac{1}{3}\nu\pi^2 - \min(\sigma,\ \mathrm{b},\ 1) + \frac{\mathrm{b}}{4\sqrt{l(\mathrm{b}-1)}}(\mathrm{r} + \sigma)$$

で表す.

また, 定数の値が大きいほど減少率が少ない. これも, 非線形項の定数がある程度大きくないと, 非線形項の効果よりも粘性項の効果の方が大きくなり収束時間が早まるためであり, 定数がある程度の大きさであれば, 粘性の効果が少なくなるためである.

表 1 の ν が 0 のときの結果は, Lorenz[2] が示した Lorenz モデルの結果 (Temam[1]) と一致している (特に **A** の定数の組における Hausdorff 次元の値 2.538). このことからこの方程式は Lorenz モデルを含んでいると考えられる.

5.2 今後の課題

今後の課題としては

1. まだ, 他の方程式の Hausdorff 次元との比較ができていないので, 何種類かの方程式との比較を行なう.

2. 今回の評価よりも良いものがあるか. あればどれだけの違いが生じるか.

3. 領域や境界条件を変えたらどうなるか.

などが考えられる.

参 考 文 献

[1] R Temam, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and physics.* Springer – Verlag, **68**, 1988.

[2] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow.* J. Atmospheric Sci., **20**, 1963, 130–141.