ハイパフォーマンス
コンピューティング 64－1
（１９９６．１２．１２）

Euler 定数 50 万桁の計算

平山　弘

神奈川工科大学　機械システム工学科

Mascheroni の定数とも呼ばれる Euler 定数、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0.5772156649015328606065 1\cdots$$

と exp(γ)の計算を、R. P. Brent と E. M. McMillan による 30, 100 桁の結果をさらに進め 500, 000 桁まで行った。さらに、これらの定数の連分数展開を計算した。この結果から、もし Euler 定数及び exp(γ)が、P 及び Q が整数として、P/Q と表現できるならば、$Q > 10^{250000}$ であることがわかる。

Calculation of Euler's Constant to 500,000 Decimals

Hiroshi Hirayama

Kanagawa Institute of Technology

The value of Euler's or Mascheroni's constants

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0.5772156649015328606065 1\cdots$$

has now been determined to 500,000 decimal places, extending previously known value of 30,100 places by R.P.Brent and E.M.McMillan. It is given that the first 495,000 partial quotients in regular continued fractions for Euler's constant γ and exp(γ). It follows from the continued fractions that, if γ and exp(γ) is of the form P/Q for integer P and Q, then $|Q| > 10^{250000}$

1. はじめに

Euler 定数は、Mascheroni 定数とも呼ばれ、

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right) = 0.5772156649015328606065 1\cdots \tag{1.1}$$

と定義されている定数である。円周率に次ぐ重要な定数で、gamma 関数や Bessel 関数の計算に不可欠なものである。この定数は、Euler によって、1735 年に 0.577218 と計算され、1887 年に、天文学者 J.C.Adams によって、263 桁まで計算されている。

コンピュータを使った計算では、1952 年に Wrench によって、328 桁まで計算され、1962 年に D.E.Knuth によって、1271 桁まで計算されている。同年 D.W.Sweeney[4]によって、 指数積分関数を利用する Bernoulli 数を必要としない計算方法が提案され、3683 桁までの計算が行われている。この計算方法を改良し、1974 年 W.A.Beyer と M.S.Waterman[3]が 7114 桁までの計算を行っている。1977 年に、R.P.Brent[2]は、W.A.Beyer と M.S.Waterman の方法を一般化して、20,700 桁の計算を行っている。1980 年に、R.P.Brent と E.M.McMillan[1]は Bessel 関数を利用する新しい計算法を複数提案し、その１つを計算法を使い 30,100 桁の計算を行っている。

本論文では、 R.P.Brent と E.M.McMillan が提案している計算方法の一つを使い、Euler 定数を少数点以下 50 万桁以上を計算する。また、その数値の指数関数や連分数展開を計算し、その数の性質をしらべる。

以下の計算には、コンパイラとして、Watcom C/C++ 10.5J、計算機としてパーソナル・コンピュータ NEC PC-9821Ra20(Pentium Pro 200MHz)を利用した。

2. 計算方法

Euler 数については、いろいろな計算方法が知られているが、 Brent 等（ R.P.Brent と E.M.McMillan[1] ）が提案している方法で計算する。 この方法は、次の公式を利用する。

$$\begin{aligned} K_0(x) &= -\left\{\log\left(\frac{1}{2}x\right)+\gamma\right\}I_0(x) + \left\{\frac{\frac{1}{4}x^2}{(1!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^2}{(2!)^2} + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^3}{(3!)^2} + \cdots\right\} \\ &= -\left\{\log\left(\frac{1}{2}x\right)+\gamma\right\}I_0(x) + S(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

ここで、

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2}H_k \tag{2.2}$$

$$H_m = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} \tag{2.3}$$

$I_0(x)$および$K_0(x)$は、それぞれ、第１種変形ベッセル(Bessel)関数、第２種変形ベッセル関数である。$I_0(x)$は次のように定義される関数である。

$$I_0(x)=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2}+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{(k!)^2} \tag{2.4}$$

また、xが大きな数値の場合、$K_0(x)$は次のように漸近展開される。

$$\begin{aligned}K_0(x)&\approx\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\left\{1+\frac{-1}{8x}+\frac{(-1)\cdot(-9)}{2!(8x)^2}+\frac{(-1)\cdot(-9)\cdot(-25)}{3!(8x)^3}+\cdots\right\}\\&=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{[(2k)!]^2}{(k!)^3(32x)^k}\end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで、xとして大きな数値を代入すると、(2.1)の左辺は、(2.5)の漸近展開式からわかるように、$K_0(x)$は指数関数的にゼロに近づくので、左辺をゼロとみなすことができる。(2.1)の左辺をゼロとおけば、(2.1)は Euler 定数を計算する式となる。すなわち、Euler 定数は

$$\gamma=-\log\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{S(x)}{I_0(x)} \tag{2.6}$$

として、計算される。 Brent等[1]は、この計算式を使ってEuler定数を計算している。(2.1)の左辺を単純にゼロと置かないで、(2.5)の式を使って、更に精密に評価すれば、Euler 定数はさらに正確な値が得られる。すなわち、

$$\gamma=-\log\left(\frac{1}{2}x\right)+\frac{S(x)-K_0(x)}{I_0(x)} \tag{2.7}$$

として、計算することができる。この方法については、 Brent等[1]も議論しているが、計算が複雑になることと計算量がほとんど変わらないことを理由にして、この方法を使っていない。

Brent 等[1]の計算量の評価では、(2.5)式の指数関数e^{-x}の計算を単純に Taylor 展開し、その式にxを代入するとして評価しているので、もし、高速 Fourier 変換(FFT)を使った高速の乗算法を使う場合、(2.7)の計算法が、(2.6)に比べ 1/4 程度速くなることがわかる。本論文では、この方法によって計算を行った。

3. 計算の詳細

xとして、(2.7)式の右辺第2項の分子が 50 万桁得られるように選ぶ。この場合、$\log(x/2)$ の計算を高速に計算するために、$x=2^l3^m5^n$と表される整数になるように選ぶ。このような数を探すと、いろいろな数値が得られるが、ある程度余裕をとって、$x=172800$として計算した。このようにxを選ぶと、$\log\frac{16}{15}$、$\log\frac{25}{24}$、$\log\frac{81}{80}$の計算結果から容易に、$\log x$を計算できる。上の対数は、たとえば、

$$\log\frac{16}{15}=\log\frac{1+\frac{1}{31}}{1-\frac{1}{31}}=2\left\{\frac{1}{31}+\frac{1}{3\cdot 31^3}+\frac{1}{5\cdot 31^5}+\cdots\right\} \tag{3.1}$$

として、効率的に計算できる。さらに、7、11 の倍数に対しても計算できるが、あまり計算量が減らないので、この方法を使った。

$S(x)$ の計算には、多倍長数と1語で表現できる整数との乗除算と多倍長数の加減算のサブルーチンを使って計算した。Brent 等[1]の論文では、多倍長数と x^2 の積は、高速に計算できるものとして計算量の評価を行っているが、32 ビットの計算機を使用する限り、x を上のように選ぶと、x^2 は、32 ビット以内に入らないために、2 回に分けて掛け算又は割り算を行わなければならなかった。

なるべく多くの桁数を扱うために、途中で倍精度の浮動小数点数を使っているが、その計算の中で、整数部分を取る演算(floor 関数)がかなりの回数呼び出される。この関数は単純な演算だと考えていたが、実際に消費時間を調べるとサブルーチンの形にコンパイルされるために非常に時間がかかることがわかったため、この部分をアセンブラで記述した。この最適化で、計算時間を約 1/3 高速化することができた。

$K_0(x)$ の中に現れる円周率及び平方根は、よく知られた FFT を利用した計算法を使って計算した。$K_0(x)$ はかなり小さい数になるので、計算精度は、半分の約 25 万桁の精度で計算すれば十分であることがわかるので、この部分は約 25 万桁で計算した。

e^x の計算は、定数 e を展開式

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tag{3.2}$$

で計算し、それの二乗を次々計算し、x を2進数展開し、これらの数値を掛けることによって計算した。これらの数値の乗算には、FFT を利用した乗算を利用した。 Brent 等[1]では、この部分も $S(x)$ の計算と同様に、級数展開式に x を代入することを想定して計算量を求めている。このような方法で計算すると、この方法は、 Brent 等[1]が提案している方法では、最高速となる。

e^γ は、

$$e^\gamma = \left(e^{\frac{\gamma}{1024}} \right)^{1024} \tag{3.3}$$

として計算した。括弧の中は、級数展開によって計算し、その数の2乗を次々計算して、1024 乗を計算する。1024 は、級数の計算時間と、2乗する計算時間の和ができるだけ小さくなるように選んである。

計算時間は、全体で 34 時間 43 分であった。$S(x)$ の計算が計算時間の大半を占め、29 時間 24 分であった。x の対数の計算時間は、3 時間 36 分、円周率の計算時間は 6 分、e^x の計算時間は 15 分、$K_0(x)$ の計算時間は 1 時間 42 分（円周率と e^x の計算時間を含む）であった。

計算のチェックために、$x = 180000$ として同様な計算を行い、50 万桁以上の一致することを確認している。

4. 連分数展開

連分数展開とは、

$$r = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_1 + \ddots}} \tag{4.1}$$

となるように、q_0、q_1、... を決めることをいう。整数部分 (q_0) を求め、その逆数を計算

する。さらに整数部分(q_1)を求めが逆数を計算する。この計算を繰り返せば、q_0、q_1、...をすべて求めることができるが、50 万桁の数値の逆数を何回も計算する必要があり、たとえ FFT を利用した高速な乗算法を使っても、Euler 定数を計算する時間の数倍以上の、かなりの計算時間が必要になる。ここでは、Brent[2]で使われている方法によって連分数展開を行った。計算は、分数に直したとき、分母が10^{250000}以上になるまで計算した。

計算時間は、Euler 定数及びe^{γ}共に、4 時間 21 分であった。

5. 計算結果

以下に、Euler 定数及び exp(γ)の連分数展開したときの、q_iの出現回数を示す。

q_iの値	出現回数 (Euler 定数)	出現回数 (exp(γ))
1	205894	206545
2	84014	84517
3	46182	46170
4	29254	29200
5	20294	20084
6	14615	14808
7	11366	11109
8	8922	8882
9	7191	7369
10	5857	5902
11 以上 20 以下	28828	28695
21 以上 50 以下	19385	19447
51 以上 100 以下	6815	6780
101 以上 1000 以下	6332	6332
1001 以上	738	776

q_iの大きな値とその出現場所を以下に示す。

順位	Euler 定数		exp(γ)	
	位置	q_i	位置	q_i
1	273271	2186175	390432	1768872
2	158567	717895	4294	1568705
3	275501	588826	254080	1061416
4	310290	525974	345736	236001
5	265879	413124	439538	133184
6	215960	190763	298818	120431
7	464343	93722	492261	115846
8	33260	87983	486319	100310
9	141713	72104	212381	99238
10	325733	69120	246522	77291

Brent[2]の論文で、以上に大きな値が、 exp(γ)が現れたが、390432 番目のq_iがその値を追い越すことがわかる。

6. 終わりに

Euler定数は、円周率ほどではないが、Bessel関数や指数積分関数など応用上重要な関数の計算に現れる定数である。円周率と異なり高速な計算法がないので、あまり高精度計算は行われていない。また、その性質もあまりよく知られていない。この定数が無理数であるかどうかも知られていない。

今回の計算で、次のような結論が出せる。もしEuler定数が有理数ならば、その分母は、10^{250000} より大きな整数となる。

参考文献

[1] Brent R.P., McMilan E.M., "Some New Algorithms for High-Precision Computation of Euler's Constant", Math. Comp. Vol.34, 1980,pp.305-312

[2] Brent R.P., "γ and exp(γ) to 20700D and regular continued fraction for Euler's Constant ", Math. Comp. Vol.31, 1977, pp.771-777

[3] Beyer W.A., Waterman M.s., "Error Analysis of Compution of Euler's Constant", Math. Comp. Vol.28, 1974, pp.599-604

[4] Sweeney D.W., "On the Compuation of Euler's Constant", Math. Comp. Vol.17, 1963, pp.170-178