

電磁界解析における有限要素・境界要素併用法の並列処理手法

小幡 元樹 (早稲田大学)、前川 仁孝 (イメージ情報科学研究所/早稲田大学)、
若尾 真治、小貫 天、笠原 博徳 (早稲田大学)

現在、超電導モータ等の電気機器の開発にあたっては、発生する電磁界の解析が必須となっている。この電磁界解析手法として従来、有限要素法(FEM)あるいは境界要素法(BEM)が広く用いられている。有限要素法は、一般的に非線形性を含む不均一な領域の解析に適しており、境界要素法は均一な無限領域の解析を得意とする。しかし電磁界解析においては、磁性体のような非線形領域と周りの空気領域のように無限に広がる領域を含むため、解析時間を短縮し、さらに精度向上を目指し、著者らはFEMとBEMの長所を組み合わせた有限要素・境界要素併用法を提案している。この併用法により、FEM, BEMのみを用いた場合と比べ、計算時間は大幅に短縮されるが、本手法を用いても、大規模問題に対しては依然として長時間の解析時間を要する。そこで、本論文ではこの解析時間を短縮するための並列処理手法を提案し、NEC Cenju-3上で手法の性能評価を行った結果について述べる。

キーワード:有限要素・境界要素併用法、並列処理、データ分割・配置、連立方程式求解、マルチプロセッサシステム

Parallel Processing of Hybrid Finite Element and Boundary Element Method for Electro-magnetic field analysis

Motoki Obata(Waseda University),

Yoshitaka Maekawa(Lab. of Image Information Science and Technology / Waseda Univ.),

Shinji Wakao, Takashi Onuki, Hironori Kasahara(Waseda University)

Recently, for development of electrical appliances like super conductive motors, analysis of a generated electro-magnetic field is required. As a method of the electro-magnetic field analysis, the Finite Element Method(FEM) and the Boundary Element Method(BEM) have been widely used. The FEM is suitable for analysis of a complicated region which includes non-linear materials. On the other hand, the BEM is useful for analysis of infinitely extending fields. The electro-magnetic field to be analyzed for electrical appliances, however, includes non-linear and infinite subfields. Taking into consideration these factors, the authors have been proposing a hybrid FE and BE method to take full advantages of these two method. Though analysis time by the hybrid FE and BE method compared with the FEM or BEM is significantly reduced, high precision analysis for large scale needs a large analysis time. To reduce analysis time, this paper proposes parallel processing scheme for a distributed many multiprocessor and evaluate its performance on NEC Cenju-3.

Keyword: the hybrid finite element and boundary element method, parallel processing, data division and allocation, solution of equations, multiprocessor system

1. まえがき

超電導モータのような電気機器から発生する電磁界の様子を計算機を用いた数値計算によって機器の設計段階で行い、電氣的・磁氣的特性を算出すれば、機器開発にて要求される特性を持たせることが容易となる。従来、電磁界解析には有限要素法[1]や境界要素法[2]が利用されている。有限要素法は、不均一な領域や非線形性を有する領域の解析を自然に行うことが可能であるが、電気機器のように空気領域の解析も必要となる場合、精度を向上させるには莫大な数の未知変数を扱う必要があるため、一般的に非常に長い計算時間が必要となる。一方、境界要素法は、磁性体のような非線形領域の扱いに難しさが

あるが、解析領域の境界上を複数の要素に分割して解析を行うため、解析に必要な未知変数を大幅に減少させることができる。これらの両手法の長所・短所を考慮し、著者らは電磁界解析で要求される磁性体部分の非線形性、空気領域のような無限領域を効果的に解析できる有限要素・境界要素併用法[3][4]を提案している。しかし、電磁界解析では解析精度を上げると、なお長時間を要するため、並列処理による解析の高速化が必要となる。従来、有限要素法の並列化に関しては、サブストラクチャ法[5]や、サブドメイン間の境界上の節点において満たされる拘束条件を反復させながら解を求める反復法に基づく領域分割法[6]などの手法が研究されているが、今回対象とする電磁界解析の有限要素・境界要素併用法では、生成される係数行列の形状が、ブロック対角、ランダムスパース、ストライプ、密の異なる特徴を持つ部分行列の集合から構成されるため、反復法による求解は多くの場合困難となる。そのため、直接法による求解が必須となるが、直接法による求解の並列処理は非常に困難であることが知られている。そこで本稿では、有限要素法に対するサブストラクチャ法を境界要素法の領域まで拡張し、プロセッサ間データ転送を最小化するための係数行列の分割配置により、直接法の求解を効率良く並列処理[7][8]することにより、解析時間を短縮する手法を提案する。さらに、提案する手法を Cenju-3[9]上に実装し、手法の有効性の確認を行った結果について述べる。

2. 有限要素・境界要素併用法とサブストラクチャ法の適用

本章では、有限要素・境界要素併用法と、本手法に対するサブストラクチャ法の適用について述べる。

2.1. 有限要素・境界要素併用法の定式化

本節では、電磁界解析における有限要素・境界要素併用法の定式化について述べる。定式化に際し、図 1 に示すようなモデルを仮定する。領域 Ω_0 は空気領域であり、その中には励磁電流 \mathbf{J} が含まれ、領域境界 Γ_e は無限まで及ぶものとする。領域 Ω_e は渦電流が発生する導体領域であり、ここではその導電率 σ_e と透磁率 μ_e の線形性を仮定している。以下、空気領域 Ω_0 と線形磁性体領域には境界要素法を適用し、渦電流領域 Ω_e および非線形磁性体領域 Ω_m には有限要素法を適用して解析する。解析を行うにあたって、著者らは渦電流領域と空気領域に注目し、ここでは変形磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A}^* と磁界の強さ \mathbf{H} を未知変数とした併用 $\mathbf{A}^* - \mathbf{H}$ 法[4]の定式化の概要について述べる。

● 渦電流領域 Ω_e

変形磁気ベクトルポテンシャル \mathbf{A}^* を未知変数とした有限要素法を適用する。ガラーキン法を適用した場合に得られる残差方程式を(1)式に示す。ただし、式中の \mathbf{W} はベクトル補間関数、 \mathbf{n} は領域境界上の単位法線ベクトルである。

$$\int_{\Omega_e} \nabla \times \mathbf{W} \cdot \frac{1}{\mu_e} \nabla \times \mathbf{A}^* d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{W} \cdot \sigma_e \frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} d\Omega - \int_{\Gamma_e} \mathbf{W} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{n}) d\Gamma = 0 \quad \dots (1)$$

● 空気領域 Ω_0

Ω_0 領域に対しては、磁界の強さ \mathbf{H} を変数とする境界要素法を空気領域 Ω_0 に適用する。ベクトル量を変数とする境界積分方程式はヘルムホルツの定理を用いることで容易にかつ系統的に導出でき、(2)式が得られる。ただし、以下の式中で添え字 P, Q はそれぞれソース点および領域境界上に関する諸量、 r はソース点 P と観測点 Q との距離である。

$$\mathbf{C}_P \mathbf{H}_P = \int_{\Gamma_0} (\mathbf{H}_Q \times \mathbf{n}) \times \nabla_Q \frac{1}{r} d\Gamma - \int_{\Gamma_0} (\mathbf{H}_Q \cdot \mathbf{n}) \nabla_Q \frac{1}{r} d\Gamma + \int_{\Omega_0} \mathbf{J} \times \nabla_Q \frac{1}{r} d\Omega \quad \dots (2)$$

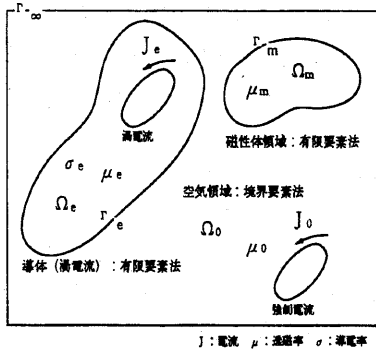


図 1 解析領域

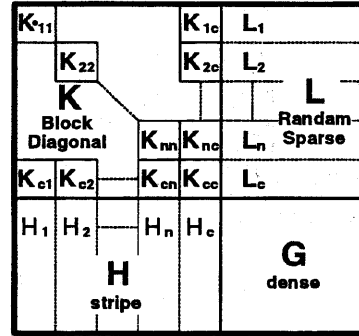


図 2 サブストラクチャ法を用いた係数行列

ここで、(1) 式、(2) 式の H の接線成分に関しては、その連続性より直接接合することができる。また式の H の法線成分は、 A^* の接線成分に変換され、その連続性より(1)式の A^* の接線成分と直接接合することができる。このようにして(1),(2)式を組み合わせたものを離散化して1次方程式を生成し、これをLU分解を用いて求解する。

2.2. 有限要素・境界要素併用法へのサブストラクチャ法の適用

本節では、有限要素・境界要素併用法へのサブストラクチャ法の適用法について述べる。有限要素法は、解析領域を有限個の要素で分割して、それぞれの節点上で求解する関数を近似することによって全体の数値解を求める手法である。そのため、最終的に解くべき線形方程式の係数行列では、互いに物理的距離の近い要素とのみ関連項ができ、そうでない遠い要素との関連項は0になるという性質を持つ。また、サブストラクチャ法は、物理的距離の近い要素をグループ化して、そのグループ内の要素の持つ節点をまとめて解析領域をいくつかの部分領域に分割する。この結果、解析領域全体は部分領域内の節点と領域境界上の節点とに分割され、境界上以外の各部分領域内の節点は独立に計算することができる。有限要素・境界要素併用法では、有限要素領域における領域分割を境界要素領域にも適用することにより、(1)、(2)式を組み合わせた係数行列は、図2に示すような複雑な形状となる。図2中の K は縁付きブロック対角行列、 L はランダムスパース行列、 H は縦のストライプ状の行列、 G は密行列である。

3. 有限要素・境界要素併用法の並列処理

本章では、有限要素・境界要素併用法の並列処理手法について述べる。電磁界解析に要する処理時間の中で大部分を占めるのは、有限要素・境界要素併用法による係数行列の生成と、線形方程式の求解である。よって以下では、係数行列の並列生成、係数行列の配置と線形方程式の並列求解について述べる。

まず、係数行列の生成は、後述する線形方程式求解におけるデータ配置を考慮して 図2におけるブロック部分 $K_{ii}(i=1 \sim n)$ と、その周辺部分 $K_{ic}, K_{ci}, K_{cc}, L, H, G(i=1 \sim n)$ の2つ領域にわけて 図3のようにデータを分割配置する。すなわち、図2におけるブロック対角部分 $K_{ii}(i=1 \sim n)$ は各ブロックをデータ生成、配置の割り当て単位とし、その周辺部分 $K_{ic}, K_{ci}, K_{cc}, L, H, G(i=1 \sim n)$ は図3のように逆L字型にサイクリックにデータを生成する。

次に生成された係数行列の並列求解法について述べる。前述のように、有限要素・境界要素併用法で生成される係数行列にサブストラクチャ法を適用した係数行列は、図2に示すように4つの領域に分かれ、これを効率良く並列処理するために、それぞれの領域についてプロセッサ間データ転送を最小化するようにデータの分割配置を行う。そこで著者らは、係数行列ブロック対角部分 $K_{ii}(i=1 \sim n)$ と、

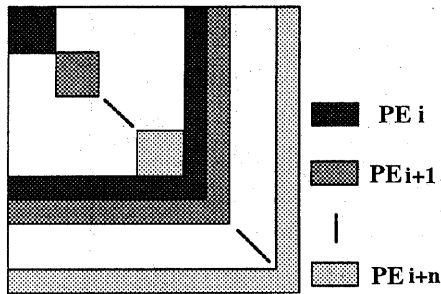


図 3 要素の分割配置

周辺領域 $K_{ic}, K_{ci}, K_{cc}, L, H, G (i=1 \sim n)$ に分け、それぞれをクラウト法により LU 分解[10]し、求解する。

まず、ブロック対角部分の LU 分解では、係数行列の生成の際にブロック単位で要素をプロセッサが生成し、方程式求解の際にも要素を所持しているプロセッサのデータのみを用いて処理可能である。ブロック対角部分の求解は、サブストラクチャ法の分割数までの粗粒度並列性を抽出できるため、効率良い並列処理が可能となる。

次のブロック対角部の周辺部分の LU 分解では、係数行列生成の際に、ブロック対角部分の周辺部分は 図 3 に示すように対角要素を中点とした逆 L 字型に分割し、プロセッサへサイクリックに配置される。縦ストライプ状の部分 H とランダムスパースの部分 L は、データを配置する方向と LU 分解を行う方向が同一となるように並列処理を行うが、先に LU 分解されたブロック対角部分のデータが全てのプロセッサで必要となるため、ブロック対角部分を LU 分解した結果を全プロセッサに事前にブロードキャスト転送する必要がある。残りの密行列部分では、クラウト法における計算手順を通常のループ並列化 [11][12]を用いて、行や列レベルの LU 分解の並列性を利用して並列処理する。クラウト法の計算手順では、ある行と列の LU 分解を行うために、まず対角要素の計算を行う必要がある。これを並列処理するために、まず対角要素を計算し、次に全プロセッサにブロードキャスト転送した後、各行と列の LU 分解を各プロセッサ上で行えばよい。このデータ転送のオーバーヘッドを軽減するために、図 3 に示すようにデータを配置している。

また、要素の格納法として 2 次元配列を用いた場合、転送を必要とするデータの配置が不連続となるため、複数回データ転送を行うか、もしくはバッファを介したデータ転送が必要となる。今回性能評価に用いたマルチプロセッサシステム Cenju-3 は、データ転送ユニットの起動に時間がかかるため、複数回の転送や、バッファを介した転送より、係数行列生成において、転送データが連続になるように各プロセッサにおいて要素を 1 次元配列に連続に格納してデータ転送を行っている。このことにより、転送は 1 回で済み、かつ転送用バッファへの格納及びバッファからの復元というオーバーヘッドがなくなるため、処理時間を顕著に短縮できる。同様のことがブロック対角部分にも適用でき、各ブロック対角部分を 2 次元配列を用いて格納した場合、ブロック対角部分から周辺部分に LU 分解が進む際のデータ転送において転送用バッファを用いる必要があるが、1 次元配列に連続に格納することで転送オーバーヘッドの軽減、メモリの節約が可能となる。

次にランダムスパース行列の特徴を考慮に入れた LU 分解について述べる。係数行列中のランダムスパース行列 L は有限要素と境界要素を併用し、無限領域を考慮に入れたことによる関連項であり、境界要素と有限要素が重なる場所、すなわち有限要素解析領域の表面の節点上に関する場所に関連項が生じる。具体的に述べると、境界要素節点が有限要素節点と重なる場所に要素が入る。境界要素には三角形要素を用いているため、行列 L の 1 列には 3 つの要素が存在することになる。さらに、サブストラクチャ法によって有限要素領域では、隣接した節点をまとめているため、行列 L における 1 列に生じる 3 つの関連項は、あるサブストラクチャ法によって分割された図 2 における L_i に属するか、分割境界上に相当する L_c に属するかのどちらかとなる。この特徴を利用することにより、 $L_i (i=1 \sim n)$ 内を LU 分解する際にフィルインが発生する箇所は、各列においては、あるブロック L_i 内のみとなる。よって、密行列部分 G の LU 分解における積和演算の回数の軽減、及び並列性を向上させることができる。

4. 性能評価

本章では、提案する手法の有効性を確認するために、評価に用いた Cenju-3 のアーキテクチャと、有限要素・境界要素併用法を用いた電磁界解析アプリケーションの並列処理時間とその評価について述べる。

4.1. Cenju-3 のアーキテクチャ

Cenju-3 は、プロセッサを最大 256 台接続可能な分散メモリ型マルチプロセッサシステムである。1 プロセッサエレメントには 50MHz の VR4400SC、命令 / データ 各 16 KB の 1 次キャッシュ、1MB の 2 次キャッシュ、主メモリには DRAM 32 MB 用いている。PE 間通信機構に関しては、送信用ユニットと受信用ユニットの 2 つから成り立っている。

4.2. 並列処理時間と評価

本節では、提案する手法の性能評価について述べる。有限要素・境界要素併用法を用いた電磁界解析の評価するための例として、空芯コイルの作る磁界の磁性板による遮蔽シミュレーション (電気学会三次元磁気シールドモデル[13]) と磁性体コアを持つ電磁石の作る磁界シミュレーション (電気学会三次元静磁界モデル[14]) の 2 種類を用いた。モデルのデータ特性を表 1 に示す。また、Cenju-3 には並列化プログラミングにおける並列化ライブラリとして Paralib-CJ と mini-MPI が用意されているが、データ通信を全プロセッサから同時に行う箇所があるため、データ通信の際に受信プロセッサが受信を明示する必要がない Paralib-CJ を用いた。空芯コイルの作る磁界の磁性板による遮蔽シミュレーション (以下 Shield model とする) 及び磁性体コアを持つ電磁石の作る磁界シミュレーション (以下 Magnet model とする) の並列実行時間を表 2 に示す。

表 1 評価に用いた電磁界解析問題

	shield	magnet
有限要素節点	324	637
境界要素節点	352	432
行列サイズ	676 × 676	1069 × 1069
非零要素の割合	41.50%	25.60%

表 2 電磁界解析アプリケーションの並列実行時間

プロセッサ数	Shield model			Magnet model		
	サブストラクチャ分割数			サブストラクチャ分割数		
	2	4	8	2	4	8
1	70.00	69.05	71.66	140.40	136.50	137.01
2	35.94	35.59	36.93	70.60	69.21	69.89
4	18.99	18.70	19.44	37.23	36.05	36.71
8	10.81	10.73	11.19	21.83	20.91	21.41

(単位: 秒)

行列の要素格納法、及びランダムスパース行列を考慮に入れたことについての評価であるが、例えばサブストラクチャ法 4 分割でプロセッサ 8 台の処理時間を比較した場合、行列を 2 次元配列に格納し、行列のスパース性を考慮しない場合 51.45 秒であるのに対して本手法では 20.91 秒で処理時間が 40% となり、全体としても両手法を適用した場合の方が処理時間が大幅に短縮されることが確認された。

次に、全体の実行時間については、表 2 より Shield model では、サブストラクチャ法 4 分割の場合が、プロセッサ 1 台の時に 69.05 秒要したものがプロセッサ 8 台では 10.73 秒となり、6.44 倍の速度向上率が得られ、最も処理時間が短い。また、Magnet model でもサブストラクチャ法 4 分割の場合が最

も処理時間が短く、プロセッサ 1 台で 136.50 秒要したものがプロセッサ 8 台では 20.91 秒となり、速度向上率は 6.53 倍であった。プロセッサの使用台数と処理時間を考慮すると、プロセッサ数が増えるにしたがって時間もほぼリニアに短縮されるため、本手法は有効であると考えられる。

5. まとめ

本稿では、有限要素・境界要素併用法を用いた電磁界解析の並列化手法について述べた。プロセッサ間通信をできるだけ減らすような係数行列の生成、係数行列の分割配置、係数行列の特徴を利用した LU 分解を用いた求解を並列処理を行い、Magnet model の場合で、サブストラクチャ法 4 分割、プロセッサ 8 台で $1/6.53$ というように顕著な処理時間短縮が得られた。また、行列格納法とランダムスパース行列の処理によって、行列を 2 次元配列に格納し、行列のスパース性を考慮しない場合に対して処理時間が 40% に短縮され、手法の有効性が確認された。

今後の課題として、ブロック部分のスパース性を考慮に入れることによって、さらに計算量を減少させられると思われるため、この特徴を利用した行列求解法の開発等があげられる。

参考文献

- [1] 矢川 元基, 吉村 忍 : 「有限要素法」, 培風館 (1991).
- [2] 神谷 紀生 : 「境界要素法の基礎」, 培風館 (1987).
- [3] 小貫 天・若尾真治 : 「スカラポテンシャルを未知数とする有限要素・境界要素併用法による三次元電磁界解析」, 電気学会論文誌, Vol. 112-A, No. 5, pp. 346-354 (1992).
- [4] S.Wakao, T.Onuki : "Electromagnetic Field Computations by the Hybrid FE-BE Method Using Edge Elements", *IEEE Trans. Magnetics*, Vol.29, No.2, pp.1487-1490 (1993).
- [5] C. Farhat, E. Wilson : "A new finite element concurrent computer program architecture", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (1987).
- [6] G.Yagawa, N.Soneda, S.Yoshioka : "A large scale finite element analysis using domain decomposition method on parallel computer", *Computers and Structures* (1991).
- [7] 坂本哲也・前川仁孝・若尾真治・小貫 天・笠原博徳 : 「有限要素法と境界要素法を利用した電磁界解析の並列処理」, 情報処理学会第 52 回全国大会, 4L-8 (1996).
- [8] 笠原博徳 : 「並列処理技術」, コロナ社 (1991).
- [9] 広瀬 哲也・加納 健・丸山 勉・中田 登志之・浅野 由祐・飯村 雄 : 「並列コンピュータ Cenju-3 のアーキテクチャ」, 情報処理学会研究報告計算機アーキテクチャ, ARC 107-16 (1994).
- [10] O.Tatebe, "LU Decomposition on Distributed Memory Machines", *IPSJ SIG Notes*, 95-HPC-57, pp.55-60 (1995).
- [11] U.Banerjee : "Loop Transformations for Restructuring Compilers", Kluwer Academic (1993).
- [12] M.Wolfe : "Optimizing Supercompilers for Supercomputers", MIT Press (1989).
- [13] 電気学会電力・エネルギー部門静止器技術委員会 : 「電磁界解析とその逆・最適化問題への応用」, 電気学会技術報告第 611 号 (1996).
- [14] 電気学会 : 「三次元静磁界数値計算技術」, 電気学会技術報告第 286 号 (1988).