

加速付反復固有値解法の評価

西田 晃* 小柳 義夫*

本稿では標準固有値問題 $Ax = \lambda x$ の主要な固有値を計算するための、反復 Arnoldi 法の加速について述べる。本研究では反復 Arnoldi 法に対して Chebyshev 多項式を適用することにより、QR 法に比べ遥かに少ない計算量で必要な固有値を計算できることを示しているが、ここでは固有値分布と収束性との関係について検討するとともに、近年進展の見られる他のアプローチとの比較結果についても示す。

Evaluation of Polynomial Acceleration Techniques for Restarted Arnoldi Method

AKIRA NISHIDA* AND YOSHIO OYANAGI*

We present an approach for the acceleration of the restarted Arnoldi iteration for the computation of a number of eigenvalues of the standard eigenproblem $Ax = \lambda x$. This study has applied the Chebyshev polynomial to the restarted Arnoldi iteration and has proved that it computes necessary eigenvalues with far less complexity than the QR method. We discuss here the dependence of the convergence rate of the restarted Arnoldi iteration on the distribution of spectrum. We also show that this method is more stable than other approaches, especially when the eigenvalues are not clustered, and is competitive with the methods based on the implicitly restarting strategy.

1. はじめに

標準固有値問題の数値解法は近年研究の活発な分野の一つであるが、従来は十分な研究がなされているとは言えなかった。QR 法は問題サイズ n に対して $O(n^3)$ の計算量を要し、制限が大きい。非対称行列に対しては Arnoldi 法、two-sided Lanczos 法、及び Davidson 法などが提案されていたが、その性質は十分に解明されていなかった。

過去 5 年間にこの分野では大きな発展が見られ、反復毎に必要な記憶容量が増大する Arnoldi 法は、Saad によるリスタート付反復解法の開発により最も実効的な解法となっている。リスタート付 Arnoldi 反復は大変効率的な解法であるが、必要な固有値が密集している場合には部分空間の次元が大きくなりやすい。本研究では収束を加速することによりこの問題点を改善したが [7], [8], ここでは固有値分布と収束性との関連を調べるとともに、最近進展の見ら

れる他のアプローチとの比較を通じてその性能を検討する。

2. 背景

Arnoldi 法では $Q^T A Q = H$ が Hessenberg 変換となるような直交行列 Q を生成する。 $Q = [q_1, \dots, q_l]$ として $Aq_l = \sum_{i=1}^{l+1} h_{il} q_i$ の最後の項を分離すれば

$$h_{l+1,l} q_{l+1} = Aq_l - \sum_{i=1}^l h_{il} q_i \equiv r_l,$$

$$h_{ii} = q_i^T A q_i, i = 1, \dots, l$$

となる。 q_1 を初期ベクトルとすれば、Krylov 部分空間 $\mathcal{K}(A, q_1, l)$ の直交基底

$$\text{span}\{q_1, \dots, q_l\} = \text{span}\{q_1, Aq_1, \dots, A^{l-1} q_1\}$$

を計算することになり、その射影は $H_l = (h_{ij})$ で表される。

$$1. h_{1,1} = (Aq_1, q_1);$$

*東京大学理学部情報科学科, Department of Information Science, Faculty of Science, the University of Tokyo, 7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo, 113 JAPAN

2. for $j = 1, \dots, l-1$, put

$$r_j = Aq_j - \sum_{i=1}^j h_{ij}q_i, \quad h_{j+1,j} = \|r_j\|_2,$$

$$q_{j+1} = h_{j+1}^{-1}r_j, \quad h_{i,j+1} = (Aq_{j+1}, q_i), \\ (i \leq j+1).$$

l ステップ後は

$$AQ_l = Q_l H_l + r_l e_k^T, \quad e_k = (0, \dots, 0, 1)^T$$

となるが、停止条件は $r_j = 0$ であり、これは q_1 に関する最小多項式が 1 次以上でなければ実現しない。この条件が満たされるならば H_l は既約 Hessenberg 行列である。反復法では初期ベクトル q_1 に対して適当な反復回数 m を決め、 H_m の固有ベクトルを求める。

陽的な反復 Arnoldi 法のアルゴリズムを Table 1 に示す。部分空間の次元 m は通常反復の長さと同精度とのトレードオフによって決まる。

Table 1. A block version of explicitly restarted Arnoldi reduction with polynomial acceleration

1. Choose $V_1 \in \mathbb{R}^{n \times r}$.
2. For $j = 1, \dots, m-1$ do
$W_j = AV_j$
For $i = 1, \dots, j$ do
$H_{i,j} = V_i^T W_j$; $W_j = W_j - V_i H_{i,j}$
end for
$Q_j R_j = W_j$; $V_{j+1} = Q_j$; $H_{j+1,j} = R_j$
end for
3. Compute the eigenvalues of $H_m = (H_{i,j}) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ and select $\{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r\}$ of largest real parts.
4. Stop if their Ritz vectors $\tilde{X}_0 = \{\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_r\}$ satisfy the convergence criteria.
5. Define the iteration polynomial $p_k(\lambda)$ of degree k by $\text{Sp}(H_m) - \{\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_r\}$.
6. $\tilde{X}_k = p_k(A)\tilde{X}_0$; $Q_k R_k = \tilde{X}_k$; $V_1 = Q_k$
7. Goto 2.

A を固有対 (u_j, λ_j) , $j = 1, \dots, n$ によって対角化可能な行列とする。多項式 $\psi(\cdot)$ において x_1 を固有ベクトルの基底に関して展開すると、

$$\psi(A)x_1 = u_1\psi(\lambda_1)\zeta_1 + \dots + u_n\psi(\lambda_n)\zeta_n$$

となる。固有対 (u_i, λ_i) が、必要な k 個の固有値から順に並べられているとすれば、必要な多項式は

$$\max_{i=k+1, \dots, n} |\psi(\lambda_i)| < \min_{i=1, \dots, k} |\psi(\lambda_i)|$$

であり、不要な固有値の成分は減衰する。Saad[10]により提案された加速法は、この min-max 問題を近似的に解くことによって加速することを目的としている。ここでは不要な Ritz 値を包む楕円 $\psi(A)$ 上の Chebyshev 多項式を、反復ベクトルに適用することによって収束の加速を行なう。

Chebyshev 加速で決定される楕円の形状は、それが不要な多項式の構成する凸包と大きく異なる場合には非効率となる。このため、適当な重み関数 ω のもとで凸包境界上の関数 ψ の L_2 ノルムを最小化する加速多項式の研究が行なわれている。このアルゴリズムの限界は、計算量・記憶容量上の制約から多項式の次数が限られる点にあるが、これは低次の多項式を合成することで解決できる。また Chebyshev 多項式を用いることで安定に計算することができる。以下簡単にそのアルゴリズムを示す。

簡単のため多項式を $\psi(\lambda_1) = 1$ となるよう正規化する。上記の制限を満たす多項式は $\psi_n(\lambda) \equiv 1 - \lambda s_n(\lambda)$ の形に書ける。ただし s_n は $n-1$ 次多項式である。最大値の原理から、 $|1 - \lambda s_n(\lambda)|$ の最大絶対値は A のスペクトルを包む凸包上にあるので、領域上で問題を定義すればよい。凸包 H 上の $\mu+1$ 点 h_0, h_1, \dots, h_μ が頂点を構成するとする。各辺 E_ν , $\nu = 1, \dots, \mu$ で重み関数 $w_\nu(\lambda)$ を定義し、 $c_\nu = (h_\nu + h_{\nu-1})/2$, $d_\nu = (h_\nu - h_{\nu-1})/2$ とすると、各辺の重み関数は $w_\nu(\lambda) = 2|d_\nu^2 - (\lambda - c_\nu)^2|^{-1/2}/\pi$ また複素多項式空間の内積は $\langle p, q \rangle = \sum_{\nu=1}^{\mu} \int_{E_\nu} p(\lambda)q(\lambda)w_\nu(\lambda)|d\lambda|$ で定義される。 $\{t_j\}$ を適当な多項式として、 $\langle t_i(\lambda), t_j(\lambda) \rangle$ を明に用いるアルゴリズムは、最小二乗多項式の計算のために利用されている。

ここでは $\{t_j\}$ を Chebyshev 多項式により $t_j(\lambda) = \sum_{i=0}^j \gamma_{i,j}^{(\nu)} T_i(\xi_\nu)$ と表す。ただし $\xi_\nu = (\lambda - c_\nu)/d_\nu$ は実数とする。展開係数 $\gamma_{i,j}^{(\nu)}$ は多項式の 3 項漸化式 $\beta_{k+1}t_{k+1}(\lambda) = (\lambda - \alpha_k)t_k(\lambda) - \delta_k t_{k-1}(\lambda)$ から容易に計算することができ、問題 $\min_{s \in \psi_{n-1}} \|1 - \lambda s_n(\lambda)\|_w$ は $J(\eta) = \|1 - \lambda s_n(\lambda)\|_w$ が最小となる $s_n(\lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i t_i(\lambda)$ 中の $\eta = (\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{n-1})^T$ の計算に等価である。

この方法では $\psi_n(0) = 1$ であることが必要であるが、直交多項式の極小性を用いた場合にはこの制約は不要となる。すなわち Chebyshev 重みに関して正規直交性を満たすように多項式を順次決定していけば、最適な関数が計算できる。方程式は

$$\beta_{k+1}p_{k+1}(\lambda) \\ = (d_\nu \xi_\nu + c_\nu - \alpha_k) \sum_{i=0}^k \gamma_{i,k}^{(\nu)} T_i(\xi_\nu) - \delta_k \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_{i,k-1}^{(\nu)} T_i(\xi_\nu)$$

と書くことができる。ただし γ は

$$\begin{aligned} \beta_{n+1}\gamma_{0,n+1}^{(\nu)} &= \frac{1}{2}d_\nu\gamma_{1,n}^{(\nu)} + (c_\nu - \alpha_n)\gamma_{0,n}^{(\nu)} - \delta_n\gamma_{0,n-1}^{(\nu)}, \\ &\beta_{n+1}\gamma_{1,n+1}^{(\nu)} \\ &= d_\nu(\gamma_{0,n}^{(\nu)} + \frac{1}{2}\gamma_{2,n}^{(\nu)}) + (c_\nu - \alpha_n)\gamma_{1,n}^{(\nu)} - \delta_n\gamma_{1,n-1}^{(\nu)}, \\ &\beta_{n+1}\gamma_{i,n+1}^{(\nu)} \\ &= \frac{d_\nu}{2}[\gamma_{i+1,n}^{(\nu)} + \gamma_{i-1,n}^{(\nu)}] + (c_\nu - \alpha_n)\gamma_{i,n}^{(\nu)} - \delta_n\gamma_{i,n-1}^{(\nu)} \\ &\quad i = 2, \dots, n+1, \\ &(\gamma_{-1,n}^{(\nu)} = \gamma_{1,n}^{(\nu)}, \quad \gamma_{i,n}^{(\nu)} = 0 \quad i > n), \end{aligned}$$

また α, δ, ν はそれぞれ

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \langle \lambda p_k, p_k \rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^{\mu} (c_\nu \sum_{i=0}^k \gamma_{i,k}^{(\nu)} \overline{\gamma_{i,k}^{(\nu)}} + d_\nu \sum_{i=0}^k \gamma_{i,k}^{(\nu)} \overline{\gamma_{i+1,k}^{(\nu)}}), \\ \delta_k &= \langle \lambda p_k, p_{k-1} \rangle = \sum_{\nu=1}^{\mu} d_\nu \nu, \\ \nu_\nu &= \gamma_{1,k}^{(\nu)} \overline{\gamma_{0,k-1}^{(\nu)}} + (\gamma_{0,k}^{(\nu)} + \frac{1}{2}\gamma_{2,k}^{(\nu)}) \overline{\gamma_{1,k-1}^{(\nu)}} \\ &\quad + \sum_{i=2}^{k-1} \frac{1}{2}(\gamma_{i-1,k}^{(\nu)} + \gamma_{i+1,k}^{(\nu)}) \overline{\gamma_{i,k-1}^{(\nu)}} \end{aligned}$$

から計算する。

行列のサイズを n , その非零要素の数を n_{nz} , ブロック Arnoldi の反復回数を m , 必要な固有値の個数を r , また Chebyshev 多項式の次数を k とすると, block Arnoldi 法の計算量は $\sum_{j=1}^m \{2rn_{nz} + 4nr^2j + 2r(r+1)n\} = 2rmn_{nz} + 2mr(mr + 2r + 1)n \approx \mathcal{O}(nm^2r^2)$ flops, QR 法による mr のサイズの行列 H_m の固有値の計算には $\mathcal{O}(m^3r^3)$ flops, 逆反復によるその固有ベクトルの計算には $\mathcal{O}(m^2r^3)$ の計算量がそれぞれ必要である。Chebyshev 反復には $2krn_{nz} + \mathcal{O}(n)$, その係数の計算には $\mathcal{O}(\mu k^2)$ flops を要するが, これらは前 3 者に比べれば無視できるほど小さい。

3. 比較評価

陰的リスタートを用いた Arnoldi 反復法 [5] は, 初期ベクトルは Hessenberg 行列 H_m に対する陰的シフト付 QR 法を用いて更新される。アルゴリズムは Table 2 の通りである。 $AX_m = X_m H_m + r_m e_m^T$, また $\phi(\cdot)$ を $p = m - k, k < m$ 次の多項式とする時,

$$\phi(A)X_k = X_m \phi(H_m)[e_1, e_2, \dots, e_k]$$

より, $\phi(H_m)[e_1, e_2, \dots, e_k] = Q_k R_k$ とすれば, $X_m Q_k$ の各列は $\phi(A)X_k$ の張る空間の直交基底となることを用いている。

Table 2. An implicitly restarted Arnoldi iteration as implemented by ARPACK

- | |
|--|
| <p>1. <i>Start</i>: Build a length m Arnoldi reduction $AX_m = X_m H_m + r_m e_m^T$ with the starting vector x_1.</p> <p>2. <i>Iteration</i>: Until convergence</p> <p>(1) Compute the eigensystem $H_m S_m = S_m D_m$ ordered with the k wanted eigenvalues located in the leading portion of the quasi-diagonal matrix D_m.</p> <p>(2) Perform $m - k = p$ steps of the QR iteration with the unwanted eigenvalues of D_m as shifts to obtain $H_m Q_m = Q_m H_m^+$.</p> <p>(3) <i>Restart</i>: Postmultiply the length m Arnoldi reduction with Q_k to obtain the length k Arnoldi reduction $AX_m Q_k = X_m Q_k H_k^+ + r_k^+ e_k^T$. Q_k represents the matrix consisting of the leading k columns of Q_m, and H_k^+ is the leading principal submatrix of order k of H_m^+.</p> <p>(4) Extend the length k Arnoldi reduction to a length m one.</p> |
|--|

ブロック Arnoldi 反復を用いて Harwell-Boeing の疎行列コレクションからいくつかを選び, 楕円による方法 (Sadkane[11] によるアルゴリズムを使用) との比較を行なった。本研究で提案したアルゴリズムは orthogonality-based method とした。問題のスペクトル分布を Figure 2 に示す。Table 4 と Table 5 から, 必要な固有値の絶対値がそれ以外のものに比べてある程度大きければ, 本研究によるアルゴリズムがより速く収束することを示している。

Table 6 は ARNCHEB, ARPACK, 及び Harwell-subroutine library の EB13 を比較した結果である [1], [4], [5]。ARNCHEB は Arnoldi 反復と Chebyshev 加速を実装したサブルーチン ARNOL を用いる。EB13 は Sadkane のアルゴリズムによるものである。ARPACK は陰的 Arnoldi 反復をサブルーチン DNAUPD により実装している。この結果から, 多項式加速がスペクトル分布に強く依存していることが分かる。スペクトルが密集していない場合には収束が遅くなっているが (Figure 2 参照), これは近似スペクトル分布が正確な場合と大きく異なっている場合があるためと考えられる。ARNCHEB では単一の固有値を求める場合には良い結果を与えるが, 複数次必要な場合

には収束が悪化することがある。ARPACK では単調に収束し、一般に収束は速いが、リスタート毎に必要な計算量が多い。また、部分空間反復法を実装した SRRIT[12] との比較結果から (Table 7 参照), Arnoldi 法は非正規性の強い問題では部分空間反復法に比べ重複固有値を落としやすいことが分かるが、これは Arnoldi 法の問題点の一つである。

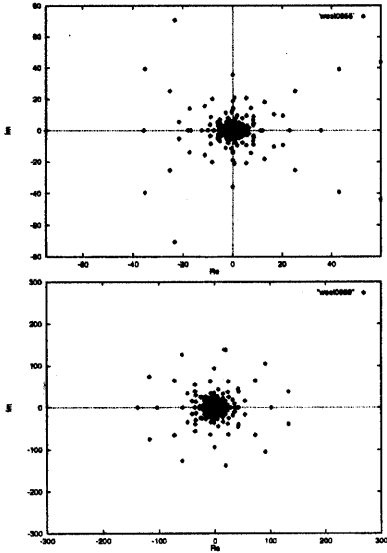


Figure 1. Computed Spectra of WEST0655 and WEST0989 from CHEMWEST.

4. 並列化

MIMD アーキテクチャによる非対称行列の並列解法については、QR 法の計算がボトルネックとなるため、低い並列性しか得られなかった。Arnoldi 法部分の並列化に関しては、SIMD 型超並列計算機上での Petiton[9] による研究が、また MIMD 型については Maschhoff[6] による PBLAS を用いた研究が行われているが、いずれもこの問題については解決されていない。実際ダブルシフト付 QR 法には $O(n)$ の並列性しかなく、 $O(n^2)$ で増大すべき記憶容量に $O(n)$ のプロセッサ数では対応できない [2]。この種の解法では部分空間の次元数 m が大きくなるほど収束は速くなるが、flop 数は逆に大きくなる。前述の計算量の評価からも分かるように、QR 法がボトルネックになることを避けるためには、 m はできるだけ小さく取らなければならない。

ダブルシフト付 QR 法には以上の問題点がある

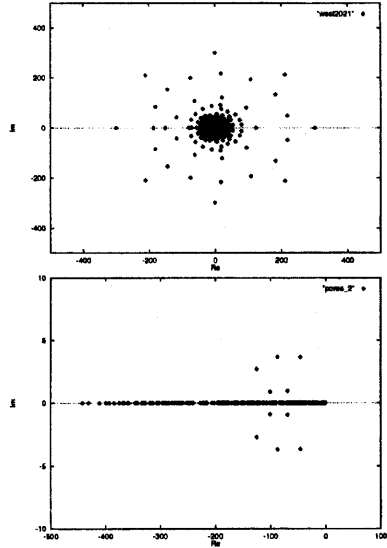


Figure 2. Computed Spectra of WEST2021 and PORES2

が、これはデータ分割を工夫することでかなり改善することができ [13]、ロードバランス及び通信待ちのないパイプラインングについてはほぼ完全な実装が可能であることが分かっている。さらにマルチシフトで得られた Ritz 値をもとに複数の QR 変換を同時に実行する手法が提案されており、スケーラビリティの問題もこれにより克服できると思われる。ただし問題サイズ n とプロセッサ数 p 間に $n = \rho\sqrt{p}$ を仮定すれば $\rho \rightarrow 0$ の場合に漸近的にスケーラブルとなることは分かっているものの、完全な結果は得られていない [3]。

5. 結論

Arnoldi 法の加速の際に必要な最小二乗多項式の計算を単純化することにより、凸包を用いた加速をより実的な解法とした。いくつかの行列を用いた評価の結果、問題の性質によっては他の解法に比べてより良好な結果を与えることが分かった。これはスペクトル分布の状態に依存するものと考えられる。並列化に関しては、QR 法部分がボトルネックとなっているものの、ある程度の性能は期待できるものと思われる。ただし計算量の問題を回避するためには、Hessenberg 行列の次元はできるだけ小さく取らなければならない、精度上の問題が生じる。この点は依然今後の課題である。

Table 3. Random matrices of order 50, for the cases of $\lambda_{\max} = 2, 1.5,$ and $1.1,$ while the distribution of the other eigenvalues is $\Re \lambda \in [0, 1],$ and $\Im \lambda \in [-1, 1].$ $m, n_c,$ and n_{iter} denote the order of the Arnoldi method, the maximum order of the Chebyshev polynomials, and the number of the iterations, respectively. CPU times (in seconds) by HP9000/720.

maximum eigenvalues	orthogonality-based					Arnoldi				QR	
	n_{iter}	m	n_c	error	time	n_{iter}	m	error	time	error	time
2	2	5	15	3.6E-15	0.38	2	15	8.9E-16	0.57	5.1E-15	1.87
1.5	3	5	20	3.0E-15	0.70	3	15	3.7E-15	0.82	3.6E-15	1.85
1.1	5	10	20	2.9E-14	1.6	1	50	7.5E-13	3.93	5.2E-15	18.8

Table 4. Test problems from CHEMWEST, a library in the Harwell-Boeing Sparse Matrix Collection, which was extracted from modeling of chemical engineering plants. The results by Ho's algorithm (right) versus those by the orthogonality-based method (left), with size of the basis 20, degree of the polynomial 20, and block size 1, respectively, are listed. * denotes the algorithm fails to converge. CPU time by Alpha Station 600 5/333.

problem	WEST0497		WEST0655		WEST0989		WEST2021	
order of matrix	497		655		989		2021	
number of entries	1727		2854		3537		7353	
number of multiplications	924	440	275	120	13751	*	767	320
number of restarts	14	10	3	2	162	*	12	7
CPU time (sec.)	0.37	0.22	0.17	0.12	8.71	*	1.28	0.67

Table 5. Test problems from TOLOSA extracted from fluid-structure coupling (flutter problem). Size of the basis, degree of the polynomial, and block size are 20, 20, 1, respectively.

order of matrix	2000		4000		6000		8000		10000	
number of entries	5184		8784		12384		15984		19584	
number of multiplications	589	240	393	180	236	140	393	380	236	80
number of restarts	7	4	5	3	3	2	5	7	3	1
CPU time (sec.)	0.83	0.43	1.24	0.70	1.23	0.85	2.57	2.81	2.14	0.97

Table 6. CPU times by IBM RS/6000 3BT and matrix-vector products for computing the right-most eigenvalues of WEST2021 (left) and PORES2 of order 1224 (right). * denotes convergence not reached within 2000m matrix-vector products. We denote by r the block size and by m the subspace dimension.

Algorithm	$r=1, m=8$	$r=5, m=20$
ARNCHEB	8.6/3233	71/15921
ARPACK	3.7/401	2.1/167
EB13	17/4860	18/4149

Algorithm	$r=1, m=12$	$r=4, m=20$
ARNCHEB	3.4/1401	4.7/1712
ARPACK	0.5/90	1.3/151
EB13	0.4/119	1.3/305

Table 7. Test problems from CDDE, extracted from constant-coefficient convection diffusion equation with $\rho = 10$ of order 2500. With $m=36$, SRRIT found 11 eigenvalues with the requested accuracy. † denotes that one or more of the requested eigenvalues was missed.

Algorithm	m=18	m=36
SRRIT	127/46098	332/88356
ARNCHEB	†	†
EB13	41/12178	46/3383

参考文献

- [1] T. BRACONNIER, *The Arnoldi-Chebyshev algorithm for solving nonsymmetric eigenproblems*, Tech. Report TR/PA/93/25, CERFACS, Toulouse, 1993.
- [2] G. HENRY AND R. VAN DE GEIJN, *Parallelizing the QR algorithm for the unsymmetric algebraic eigenvalue problems: myth and reality*, SIAM. J. Sci. Comput., 17 (1996), pp. 870–883.
- [3] G. HENRY, D. WATKINS, AND J. DONGARRA, *A parallel implementation of the nonsymmetric QR algorithm for distributed memory architectures*, Tech. Report 121, LAPACK Working Note, 1997.
- [4] R. B. LEHOUCQ AND J. A. SCOTT, *An evaluation of software for computing eigenvalues of sparse nonsymmetric matrices*, Tech. Report MCS-P547-1195, Argonne National Laboratory.
- [5] R. B. LEHOUCQ AND D. C. SORENSEN, *Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 17 (1996).
- [6] K. J. MASCHHOFF AND D. C. SORENSEN, *A Portable Implementation of ARPACK for Distributed Memory Parallel Architectures*, in Proceedings of Workshop on Applied Parallel Computing in Industrial Problems and Optimization, Technical University of Denmark, Aug. 1996.
- [7] A. NISHIDA AND Y. OYANAGI, *A Polynomial Acceleration of the Projection Method for Large Nonsymmetric Eigenvalue Problems*, in Kokyuroku, vol. 944, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, 1996, pp. 135–146.
- [8] ———, *Evaluation of Acceleration Techniques for the Restarted Arnoldi Method*, in Proceedings of 15th IMACS World Congress on Scientific Computation, Modeling and Applied Mathematics, Berlin, Germany, Aug. 1997, to appear.
- [9] S. G. PETITON, *Parallel subspace method for non-Hermitian eigenproblems on the Connection Machine (CM2)*, Applied Numerical Mathematics, 10 (1992), pp. 19–35.
- [10] Y. SAAD, *Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems*, Manchester University Press, Manchester, 1992.
- [11] M. SADKANE, *A block Arnoldi-Chebyshev method for computing the leading eigenpairs of large sparse unsymmetric matrices*, Numer. Math., 64 (1993), pp. 181–193.
- [12] G. W. STEWART, *SRRIT - A FORTRAN subroutine to calculate the dominant invariant subspaces of a real matrix*, Tech. Report TR-514, University of Maryland, 1978.
- [13] R. SUDA, A. NISHIDA, AND Y. OYANAGI, *A New Data Mapping Method for Parallel Hessenberg QR Method and its Efficient Implementation on AP1000+*, in Proceedings of Joint Symposium on Parallel Processing 1997, Kobe, 1997, pp. 377–384.