

Deflation を用いた GMRES(m) 法の収束性について

高 篠 秀 明[†] 森 屋 健 太 郎[†] 野 寺 隆[†]

GMRES 法は、大型で疎な非対称正則行列を係数とする連立 1 次方程式を解くための反復解法の 1 つである。しかし、直交化に非常に多くの計算量と記憶容量が必要となるため実用的ではない。したがって、通常はリスタートを用いた GMRES(m) 法が使われるが、しばしば GMRES(m) 法は問題によって収束しないことがある。それは、リスタートによって近似解の構成に必要な固有値に対する固有ベクトルの情報が欠落してしまうことが理由の 1 つである。我々は各リスタート時に前の反復で得ることのできる固有ベクトルの情報を付け足す 3 つの算法 (MORGAN(m, k) 法, DEFLATED-GMRES(m, k) 法, DEFLATION(m, k) 法) について考える。AP3000 による数値実験の結果, DEFLATED-GMRES(m, k) 法と DEFLATION(m, k) 法が, 従来の GMRES(m) 法と比べて残差ノルムの収束を大幅に加速できることを示す。

The convergence of GMRES(m) method with Deflation

HIDEAKI TAKASHINO,[†] KENTARO MORIYA[†] and TAKASHI NODERA[†]

The GMRES method is one of the iterative method for solving large sparse non-symmetric linear systems of equations. But it's not practical because it requires high computational cost and too many strategies. Usually the GMRES(m) method, a restarted version of the GMRES method, is used. However, the GMRES(m) method doesn't often converge in some problems. One of the reason is the information of eigenvector loses. We consider the three algorithms, MORGAN(m, k), DEFLATED-GMRES(m, k), and DEFLATION(m, k) method. Those algorithms add the information of eigenvector obtained in the previous iteration process. We also that show DEFLATION(m, k) and DEFLATED-GMRES(m, k) method can make the convergence of the residual norm much faster than the original GMRES(m) method through the numerical results on AP3000.

1. はじめに

大型疎行列を係数とする連立 1 次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

は、Navier-Stokes 方程式などの偏微分方程式の境界値問題の離散化によって生じる。通常、(1) は反復法によって解かれることが多い。

近年、GMRES 法¹⁾は、主要な反復法の 1 つであるが、計算量および記憶容量の点で実用的ではない。このため、適当な正の整数 m に対して、記憶容量を減らしたリスタート版の GMRES(m) 法が考案されている。しかし、GMRES(m) 法はリスタートによって固有ベクトルの情報が欠落してしまうことがあり、このことが原因で問題によっては収束しないことがある。そこで、我々は各リスタート時に前の反復で得られる固有ベクトルの情報を付け加えることにより、近似解の構成に必要な固有値に対応する固有ベクトルの情報の欠落を防ぐ 3 つの算法を提案する。第 1 の方法は、前のリスタート

のステップで得られる近似固有ベクトルをクリロフ部分空間に加える MORGAN(m, k) 法である。第 2 の方法は、各リスタート毎に固有ベクトルによって構築された前処理行列を更新する DEFLATED-GMRES(m, k) 法である。そして、第 3 の方法は前のリスタートのステップで得られた近似固有ベクトルをクリロフ部分空間に加え、さらに各リスタート毎に固有ベクトルによる前処理行列を更新する DEFLATION(m, k) 法である。

第 2 節では GMRES(m) 法について簡単に説明する。第 3 節では MORGAN(m, k) 法, DEFLATED-GMRES(m, k) 法, 及び DEFLATION(m, k) 法について述べる。最後に、分散メモリ型並列計算機 AP3000 による数値実験の結果から、DEFLATION(m, k) 法が最も優れていることを示す。

2. GMRES(m) 法

GMRES 法は、

$$K_m(A, r) = \text{Span}\{r, Ar, \dots, A^{m-1}r\}$$

によって与えられるクリロフ部分空間の直交基底を生

[†] 慶応義塾大学理工学部

Faculty of Science and Technology, Keio University

成するアーノルディ原理を用いている。まず、正則な行列 A と適当な非ゼロのベクトル r によって作られるベクトルの系列 $\{r, Ar, \dots, A^{m-1}r\}$ は 1 次独立であると仮定する。ベクトルの系列 $\{r, Ar, \dots, A^{m-1}r\}$ に対して、グラム・シュミットの直交化法を用いると、その系列で張られた部分空間

$$K_m(A, r) = \text{Span}\{r, Ar, \dots, A^{m-1}r\}$$

の正規直交系 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ が生成できる。ベクトルの系列 $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ を縦ベクトルにもつ行列を V_m 、 $(m+1) \times m$ の上ヘッセンベルグ行列を \bar{H}_m 、 \bar{H}_m の最後の行を取り除いた上ヘッセンベルグ行列を H_m とすると、アーノルディ原理の行列表現形として次式が成立する。

$$AV_m = V_{m+1}\bar{H}_m \quad (2)$$

このように、正則な行列 A と適当な非ゼロベクトル r から、正規直交系を作ることアーノルディ原理と呼んでいる。

次に、連立 1 次方程式 (1) の反復解の初期値を x_0 とすると、残差ベクトル r_m は、次の最小問題の解を求めることになる。

$$\min_{z \in K_m} \|b - A(x_0 + z)\| = \min_{z \in K_m} \|r_0 - Az\|$$

ただし、 $z = V_m y$ と表せ、 V_{m+1} がユニタリ行列であるので、この最小問題は次の m 次元関数の最小 2 乗問題になる。

$$\begin{aligned} J_m(y) &= \|\beta v_1 - AV_m y\| \\ &= \|V_{m+1}(\beta e_1 - \bar{H}_m y)\| \\ &= \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\| \end{aligned}$$

GMRES 法の算法は、

$$\|b - Ax_m\| = \min_{y \in R^m} \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\| \quad (3)$$

を満たすように $x_m = x_0 + V_m y_m$ を計算することである。一般に、最小 2 乗問題を解く方法はいろいろ考えられるが、Saad と Schultz¹⁾ はギブンス回転行列を用いて、上ヘッセンベルグ行列 \bar{H}_m を QR 分解し、最小 2 乗解を求める方法を提案している。ただし、GMRES 法は CG 法のように簡単な 3 項漸化式で書き表せないため、反復回数が増えるに従ってベクトルの系列 $\{r, Ar, \dots, A^{m-1}r\}$ と上ヘッセンベルグ行列 \bar{H}_m を保持しておく必要がある。これは計算量および記憶容量の点で実用的ではない。そうした欠点を改善したのが、リスタート版の GMRES(m) 法である。この算法を用いることによって計算量と記憶容量を減らすことができる。しかし、GMRES(m) 法は、リスタートによって近似解の構成に必要となる固有値に対する固有ベクトルの情報を欠落し、残差ノルムが収束しない可能性がある。それを改善するために、次節で固有値の情報を付加する新しい 3 つの算法について考える。

Algorithm: GMRES(m)

```

ε is the tolerance for the residual norm;
convergence := false;
choose x0;
until convergence := true do
  r0 = b - Ax0;
  Arnoldi process applied to A to compute Vm;
  ym = miny ∈ Rm ‖βe1 - Hmy‖;
  xm := x0 + Vmym;
  if ‖b - Axm‖ < ε then
    convergence := true;
  else x0 = xm;
  endif
enddo

```

図 1 GMRES(m)法の算法

3. デフレーションに基づく 3 つの算法

本節では、K. Burrage, J. Erhel²⁾ によって提案された 3 つの方法について検証する。いずれの算法も、前のリスタート周期で求めた固有ベクトルの情報を次のリスタート周期に取り入れることに基づいている。

3.1 MORGAN(m, k) 法

MORGAN(m, k) 法は、クリロフ部分空間を固有ベクトルを加えることにより拡張していく方法である^{3), 4)}。ここで、 m はクリロフ部分空間の次元、 k は $m+1$ 次元 ($l \leq k$) の拡張部分空間に解が存在するように選ばれる。 V_m を $K_m(A, r_0)$ の直交基底、 U を近似不変部分空間の基底、 $W = (V_m, U)$ を拡張部分空間の基底とすると、式 (2) は次のようになる。

$$AW = V\bar{H}$$

ただし、 $V = (V_{m+1}, V_l)$ 、 H を $(m+1+l) \times (m+l)$ の上ヘッセンベルグ行列である。MORGAN(m, k) 法の算法は、

$$\|b - Ax_m\| = \min_{y \in R^{m+l}} \|\beta e_1 - \bar{H}y\|$$

を満たすように $x_m = x_0 + W y_m$ を計算することになる。

次に、 l と U の選び方を考える。固有値、固有ベクトルを求めるには、次のような調和問題^{3), 4)}の解を求めればよい。

$$(AW)^*(A - \theta I)Wu = 0 \quad (4)$$

これは、一般固有値問題

$$Ru = \theta[QV^*W]u, \quad U = Wu \quad (5)$$

に帰着することができる。ただし、 $Q\bar{H} = (R, 0)^T$ とする。なお、 Q は $(m+1+l) \times (m+1)$ のユニタリ行列、 R は $(m+l) \times (m+l)$ の上三角行列、 $[QV^*W]$ は QV^*W の最初の $(m+l)$ 列からなる $(m+l) \times (m+l)$

Algorithm: MORGAN(m, k)

```

 $\epsilon$  is the tolerance for the residual norm;
convergence := false;
choose  $x_0$ ;
 $U := \{ \}$ ;
 $l := 0$ ;
until convergence := true do
   $r_0 = b - Ax_0$ ;
  Arnoldi process applied to  $A$  to compute  $V_m$ ;
   $W = (V_m, U)$ ;
  compute  $AU$ ;
  orthogonaize  $AW$  to get  $V$ ;
   $y_m = \min_{y \in \mathbb{R}^{m+l}} \| \beta e_1 - \bar{H}y \|$ ;
   $x_m = x_0 + Wy_m$ ;
  if  $\| b - Ax_m \| < \epsilon$  then
    convergence := true;
  else
     $x_0 = x_m$ ;
    choose  $l \leq k$ ;
    estimate  $l$  eigenvectors  $U$  of  $A$ ;
  endif
enddo

```

図2 MORGAN(m, k)法の算法

の行列である。これを CLAPACK⁷⁾を使って実装する。この計算により、小さい方から l 個の固有値と、それに対応する固有ベクトルを求めることができる。 l は、各リスタートにおいて k とおく方法^{3), 4)} と、0 から k まで増加させる方法⁵⁾ がある。ただし、今回は前者を適用した。

3.2 DEFLATED-GMRES(m, k) 法

DEFLATED-GMRES(m, k) 法は、各リスタート毎に更新される前処理を導入する方法である⁵⁾。 M を各リスタートごとに更新される前処理行列、 V_m をクリロフ部分空間 $K_m(r_0, AM^{-1})$ の直交基底とすると、DEFLATED-GMRES(m, k) 法の算法は、

$$AM^{-1}V_m = V_{m+1}\bar{H}_m$$

を満たすように GMRES(m) 法に対し、各リスタートごとに行列 AM^{-1} を適用したものである。ここで、 \bar{H}_m は $(m+1) \times m$ の上ヘッセンベルグ行列である。DEFLATED-GMRES(m, k) 法の算法は、

$$\| b - Ax_m \| = \min_{y \in \mathbb{R}^m} \| \beta e_1 - \bar{H}_m y \|$$

を満たすように $x_m = x_0 + M^{-1}V_m y_m$ を計算する。前処理行列 M^{-1} は、

$$M^{-1} := I_n + U(|\lambda_n|T^{-1} - I_l)U^T$$

のように定義する。ここで、 U は $l \leq k$ の固有ベクトルの集合、 $T = U^T A U$ とする。

次に、 l と U の求め方を考える。固有値、固有ベクト

Algorithm: DEFLATED-GMRES(m, k)

```

 $\epsilon$  is the tolerance for the residual norm;
convergence := false;
choose  $x_0$ ;
 $M := I_n$ ;
 $U := \{ \}$ ;
 $l := 0$ ;
until convergence := true do
   $r_0 = b - Ax_0$ ;
  Arnoldi process applied
    to  $AM^{-1}$  to compute  $V_m$ ;
   $y_m = \min_{y \in \mathbb{R}^m} \| \beta e_1 - \bar{H}_m y \|$ ;
   $x_m := x_0 + M^{-1}V_m y_m$ ;
  if  $\| b - Ax_m \| < \epsilon$  then
    convergence := true;
  else
     $x_0 = x_m$ ;
    choose  $l \leq k$ ;
    estimate  $l$  eigenvectors of  $A$ ;
     $T := U^T A U$ ;
     $M^{-1} := I_n + U(|\lambda_n|T^{-1} - I_l)U^T$ ;
  endif
enddo

```

図3 DEFLATED-GMRES(m, k)法の算法

ルを求めるには、次のような斜交 (oblique) 問題⁵⁾ を解けばよい。

$$V_m^*(AM^{-1} - \theta I)V_m u = 0$$

これは、標準固有値問題

$$H_m u = \theta u, \quad U = V_m u$$

に帰着することができる。ここで、 H_m は \bar{H}_m から最後の列を取り除いた上ヘッセンベルグ行列である。上ヘッセンベルグ行列に対する QR 法は、EISPACK⁶⁾ のルーチンを用いて実装した。この計算により、絶対値の小さい方から l 個の固有値と、それに対応する固有ベクトルを求めることができる。

3.3 DEFLATION(m, k) 法

MORGAN(m, k) 法では調和問題、DEFLATED-GMRES(m, k) 法では斜交 (oblique) 問題によって固有値、固有ベクトルを求めたが、調和問題を用いた方が精度がよいことが知られている⁴⁾。それゆえ、調和問題によって固有値、固有ベクトルを求めることを考える。つまり、次のような問題を解く。

$$(AM^{-1}V_m)^*(A - \theta I)M^{-1}V_m u = 0$$

これは、一般固有値問題

$$R_m u = \theta [Q_m V_{m+1}^T] u, \quad U = M^{-1}V_m u \quad (6)$$

に帰着できる。ここで、 $Q_m \bar{H} = (R_m, 0)^T$ とする。ただし、 Q_m は $(m+1) \times (m+1)$ のユニタリ行列、 R_m は $m \times m$ の上三角行列である。従って、 U におけるべ

クトルを連続的に更新する前処理デフレーションを考える。この方法を DEFLATION(m, k) 法と呼ぶ。この方法は、2つのステップで構成される。まず、 k 個までベクトルを計算する。次に、以下のような方法で各リスタート毎に U を更新する。

U_0 を、現在の周期に用いる k 次元の近似不変部分空間とする。この周期の最後に調和問題 (6) を用いて、 f 個の新しいベクトルを計算する。次に、 $(k+f)$ 個のベクトルからなる近似不変部分空間を求める。これは、次のような調和問題を解けばよい。

$$(AU_1)^*(A - \theta I)U_1 u = 0$$

これは、一般固有値問題

$$(AU_1)^*AU_1 u = \theta(AU_1)^*U_1 u, U_2 = U_1 u \quad (7)$$

に書き換えることができる。これを解いて、 $(k+f)$ 個の固有値のうち小さい方から k 個を選び、それに対応する固有ベクトルを u_2 と $U_2 = U_1 u_2$ を得るために直交化させる。 U_2 は、次の周期の新しい前処理行列を求めるために用いられる近似不変部分空間である。これをまとめると図 4 の算法が得られることになる。

4. 数値実験

大型で疎な係数行列を持つ連立 1 次方程式 (1) を前節で述べた 3 つの方法及び従来の不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法によって近似解を求め、反復法としての性能を比較した。ILU 分解はパイプライン処理によって並列化した^{8)~12)}。数値実験は以下のように行なった。

- 並列計算機: AP3000(PE16 台)
- 収束判定条件: $\|r_k\| / \|r_0\| < 1.0 \times 10^{-12}$
- 最大反復回数: 6000 回
- DEFLATION(m, k) 法における f の値: 2

結果は残差ノルムの収束に要した計算時間と反復回数を示した。なお、最大反復回数以内で残差ノルムが収束しない場合には (...) と記述した。

[数値例 1] 領域 $\Omega : [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ 上の Navier-Stokes 方程式を考える¹³⁾。

$$a_1 u_{xx} + a_2 u_{yy} + a_3 u_{zz} + R(a_4 u_x + a_5 u_y + a_6 u_z) + a_7 u = g$$

ただし、

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 + \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ a_2 &= 2 + \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ a_3 &= 2 + \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z) \\ a_4 &= \sin(4\pi x), \quad a_5 = \sin(4\pi y), \quad a_6 = \sin(4\pi z) \\ a_7 &= \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z) \end{aligned}$$

とする。ここで厳密解を

$$u(x, y, z) = \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z)$$

として右辺 g を決定して、メッシュ数を $64 \times 64 \times 64$ とし 7 点中心差分を用いて離散化する。この実験結果を表 1 に示す。また、残差ノルムの収束の様子を図 5 に示した。

Algorithm: DEFLATION(m, k)

```

ε is the tolerance for the residual norm;
convergence := false;
choose  $x_0$ ;
 $M := I_n$ ;
 $U := \{\}$ ;
 $l := 0$ ;
until convergence := true do
   $r_0 = b - Ax_0$ ;
  Arnoldi process applied to
     $AM^{-1}$  to compute  $V_m$ ;
   $y_m = \min_{y \in R^m} \|\beta e_1 - \tilde{H}_m y\|$ ;
   $x_m := x_0 + M^{-1}V_m y_m$ ;
  if  $\|b - Ax_m\| < \epsilon$  then
    convergence := true;
  else
     $x_0 = x_m$ ;
    estimate  $f$  eigenvectors  $U_1$  of  $A$  using (6);
     $U := \text{orthog}(U, U_1)$ ;
     $l = l + f$ ;
    if  $l > k$  then
      estimate  $k$  eigenvectors  $U$  of  $A$  using (7);
       $l = k$ ;
    endif
     $T := U^T A U$ ;
     $M^{-1} := I_n + U(|\lambda_n|T^{-1} - I_l)U^T$ ;
  endif
enddo

```

図 4 DEFLATION(m, k) 法の算法

不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法と MORGAN(m, k) 法ではレイノルズ (Reynolds) 数が 10.0 のときを除いて、残差ノルムはまったく収束しなかった。また、この MORGAN(m, k) 法における残差ノルムの収束は、不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法の場合よりもはるかに遅いものであった。しかし、DEFLATED-GMRES(m, k) 法と DEFLATION(m, k) 法では、計算時間と反復回数を大幅に短縮することができ、わずか 25 秒足らずで残差ノルムが収束していることがわかる。

[数値例 2] 正方領域 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ 上の偏微分方程式の境界値問題を考える¹⁴⁾。

$$-u_{xx} - u_{yy} + D\{(y-1/2)u_x + (x-2/3)(x-1/3)u_y\} = g$$

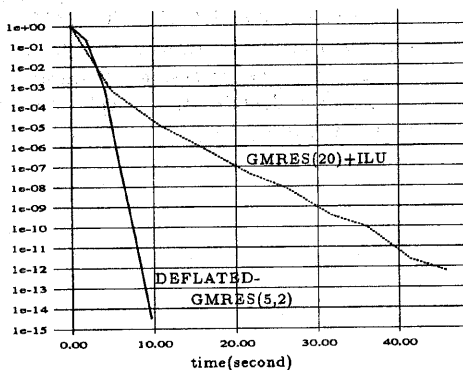
$$u(x, y)|_{\partial\Omega} = 1 + xy$$

厳密解を $u(x, y) = 1 + xy$ として右辺 g を定め、メッシュ数を 256×256 とし、5 点中心差分を用いて離散化し、この数値実験の結果を表 2 に示す。ただし、

表 1 数値例 1 の結果 (sec: 時間(秒) iter: 反復回数)
 Table 1 The computational result of example 1 (sec: second, iter: iterative number)

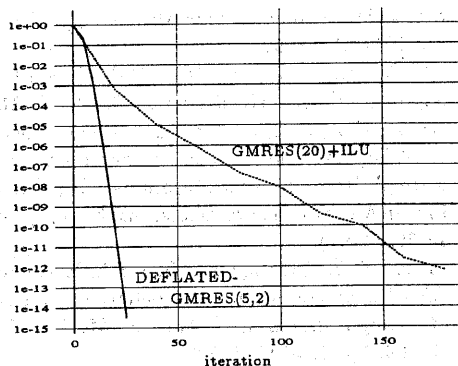
R	10.0		100.0		1000.0		10000.0	
	sec	iter	sec	iter	sec	iter	sec	iter
GMRES(5)+ILU	53.383	325
GMRES(10)+ILU	47.196	250
GMRES(20)+ILU	43.868	180
MORGAN(6, 4)	1622.084	2070
MORGAN(16, 4)	799.815	848
DEFLATED-GMRES(5, 2)	9.612	25	9.264	25	17.589	45	16.905	45
DEFLATED-GMRES(10, 2)	13.506	30	13.903	30	18.143	40	23.265	50
DEFLATION(5, 4)	10.472	20	10.130	20	19.353	35	23.011	40
DEFLATION(10, 4)	15.086	30	15.113	30	20.912	40	21.031	40

residual



(i) 計算時間 v.s. 残差ノルム

residual



(ii) 反復回数 v.s. 残差ノルム

図 5 数値例 1 に関する残差ノルムの収束する様子 ($R = 10.0$)

Fig. 5 The convergence behavior of residual norm for example 1 ($R = 10.0$)

h はメッシュ幅であり $h = 1/257$ とする。

不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法では、残差ノルムは収束しているのだが、最低でも 1000 回以上の反復回数と 2 分以上の計算時間を必要とする。また、MORGAN(m, k) 法ではいずれの場合も残差ノルムはまったく収束しなかった。しかし、数値例 1 と同様、DEFLATED-GMRES(m, k) 法と DEFLATION(m, k) 法では計算時間と反復回数を大幅に短縮することができ、残差ノルムは 10 秒以内の計算時間で収束し、その反復回数は 30 回以内であった。

5. 終りに

AP3000 による実験から得られた結果についてまとめることにする。MORGAN(m, k) 法は、固有ベクトルをヘッセンベルグ行列に付加する算法であったが、かえって残差ノルムの収束を悪くすることになってしまい、むしろ従来の不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法のほうが良い性能を発揮した。従っ

て、大型で疎な連立 1 次方程式を反復法によって解くのにこの算法を用いることは望ましくない。一方、DEFLATED-GMRES(m, k) 法と DEFLATION(m, k) 法は、各リスタート周期ごとに固有ベクトルによって前処理を構築する算法であるが、これらは従来の不完全 LU 分解を前処理とする GMRES(m) 法の場合と比較すると、残差ノルムの収束にかかる計算時間と反復回数を大幅に短縮させることができた。従って、大型で疎な連立 1 次方程式を反復法によって解く時は、従来の GMRES(m) 法に ILU 分解による前処理を組み込むよりは、今回我々が検証した DEFLATED-GMRES(m, k) 法及び DEFLATION(m, k) 法を用いることが望ましい。

参考文献

- 1) Y.Saad and M.K.Schultz.: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, No.7, pp. 856-869, (1986).

表 2 数値例 2 の結果 (sec: 時間 (秒) iter: 反復回数)
 Table 2 The computational result of example 2 (sec: second, iter: iterative number)

Dh 算法	2 ⁻²		2 ⁻¹		2 ⁰		2 ¹	
	sec	iter	sec	iter	sec	iter	sec	iter
GMRES(5)+ILU	315.839	3225	274.033	2775	317.423	3120	257.738	2640
GMRES(10)+ILU	174.031	1610	158.129	1460	171.029	1600	221.347	2110
GMRES(20)+ILU	129.359	1000	148.952	1180	168.362	1380	210.300	1680
MORGAN(6, 4)
MORGAN(16, 4)
DEFLATED-GMRES(5, 2)	2.008	25	2.192	25	2.254	25	2.624	25
DEFLATED-GMRES(10, 2)	3.158	30	3.161	30	3.139	30	3.659	30
DEFLATION(5, 4)	2.353	20	3.292	20	2.465	20	2.440	20
DEFLATION(10, 4)	4.576	30	4.472	30	4.152	30	4.041	30

- 2) K. Burrage and J. Erhel.: On the Performance of Various Adaptive Preconditioned GMRES Strategies. *Numer. Linear Algebra Appl.*, No. 5, pp. 101-121, (1998).
- 3) R. Morgan.: A restarted GMRES method augmented with eigenvectors. *SIAM J. Matrix Anal. App.*, No. 16, pp. 1154-1171, (1995).
- 4) A. Chapman and Y. Saad.: Deflated and augmented Krylov subspace techniques. *Numerical Linear Algebra with Applications*, No. 4(1), pp. 43-66, (1997).
- 5) J. Erhel, K. Burrage and B. Pohl.: Restarted GMRES preconditioned by deflation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, No. 69, pp. 303-318, (1996).
- 6) Smith, B. T., et al.: *Matrix Eigensystem Routines - EISPACK Guide*, 2nd ed., vol. 6, Lecture Notes in Computer Science (New York: Springer-Verlang), (1976).
 (<http://www.netlib.org/eispack/index.html/>)
- 7) 小国力 訳: 『行列演算パッケージ LAPACK 利用の手引』, 丸善, (1993).
 (<http://www.netlib.org/clapack/index.html/>)
- 8) 津野, 野寺: AP1000 における不完全 LU 分解の並列化, 情報研報, Vol. 97, No. 121, pp. 43-48 (1997).
- 9) 森屋, 野寺: AP3000 による 2 次元及び 3 次元問題における不完全 LU 分解の並列化, 情報研報, Vol. 98, No. 72, pp. 19-24 (1998).
- 10) P. Bastian and G. Horton.: Parallelization of robust multigrid methods: ILU factorization and frequency decomposition method. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. 12, No. 6, pp. 1457-1470 (1991).
- 11) 鷲尾, 土肥, 中田: 並列コンピュータ Cenju における ILU 前処理反復法の実現と評価, 電子情報通信学会論文誌, Vol. J75-D-1, No. 8, pp. 749-756 (1992).
- 12) L. Lamport.: The Parallel Execution of DO Loops, *Comm. of ACM*, No. 17, pp. 83-93 (1974).
- 13) W. Schönauer.: *Scientific Computing on Vector Computers*, NORTH HOLLAND
- 14) Joubert, W.: Lanczos methods for the solution of nonsymmetric systems of linear equations, *SIAM J. Matrix. Anal. Appl.*, Vol. 13, No. 3, pp. 928-943 (1992).