ハイパフォーマンス
コンピューティング 73－5
(1998. 10. 9)

複素力学系の図形の性質

青山智夫[†]

二次複素漸化式$Z_{n+1}=Z_n^2-Z_{n-1}+A$で表現される力学系から生成される複素数列の性質について数値的に調べた結果を発表する。数列の要素数は10^4～10^7の範囲である。数列を複素平面にプロットすると、数の出現順序に意味が無くなり、平面上の点の相対的位置関係が有意となり、その位置関係が図形の性質を決定する。生成する種々の図形のうちで楕円のような閉曲線の性質について研究した。

Properties of Images genarated by using Complex Dynamics

Tomoo AOYAMA

We study collective properties of complex progressions which are genarated by complex-dynamical-systems which are represented by using second-order-iterations: $Z_{n+1}=Z_n^2-Z_{n-1}+A$. The dynamics generate a closed-curve which looks like an ellipse, which arouse our curiosity.

1. はじめに

種々の表現形の興味ある複素力学系が知られているが、その中でも漸化式で表現される複素力学系から生成される複素数列を複素平面にプロットした「図形」は、特異な形の美しさで興味深く、コンピュータグラフィックスの分野で注目されたこともある。[1)]しかし形状を制御する方法が不明で、それが漸化式に基づく作図法の欠点とされてきた。漸化式から生成される図形は形への興味、その制御という観点が主に研究対象となっており、漸化式と図形そのものの研究はあまりされていないのが現状であるように思われる。

現在の計算機の処理速度から複素数列の要素数の上限は10^4～10^7となろう。大きな数であるが、統計的処理の対象になる十分大きな数ではない。この範囲の要素数を持つ数の集合の性質を調べるにはコンピュータによる数値的な扱いが適しているように思われる。

数列を複素平面にプロットした場合、要素の順序に意味が無くなり複素平面上の点の相対的位置関係が有意となる。位置関係が何らかの関連を示すと「図形」を生成したように人の目は錯覚する。[2)]それは数列の集合としての一つの性質である。「図形」は図形のように見えるが、そこには連続な線，対称という概念が無く、従来の意味での図形とは異なる性質を持つ何かである。

† 宮崎大学 工学部 電気電子工学科，aoyama@esl.miyazaki-u.ac.jp

2. 漸化式の決定

種々の漸化式の中で図形生成という点から見れば、二次の漸化式：

$$Z_{n+1}=Z_n{}^2-Z_{n-1}+A \qquad (1)$$

が興味深い。一般に漸化式を使って描く図形は乱雑になるか、無限大に発散して行く。形状としてはあまり面白いものではない。また従来の作図法による図形とあまりにもかけ離れていて、図形そのものの性質を調べる興味を抱かせない。そこで単純な漸化式であり、かつ閉曲線のような図形を生成する漸化式(1)を研究の対象とした。この漸化式のパラメータ$\{A, Z_0, Z_1\}$が共に原点(0,0)の近傍にある時の性質は調べられている。[4]ただし、原点近傍では描画速度の点で(iteration回数で言えば10^7以上となり)研究の対象とするのは難しい。幸いに式(1)は3種のパラメータが原点から相当離れても閉曲線を生成する範囲が拡がっている。[3]ここでは、

(1)生成される閉曲線が楕円様である

(2)パラメータの少々の変更で形状が変化しない領域が広い

(3)描画速度がiteration回数で10^4程度でも図形が描け、かつ

(4)10^9まで計算してもほとんど変化しない

という図形の性質を調べるのに都合のよい組合せ：$A=(0.0685, 0)$, $Z_0=(0.1, 0.1)$, $Z_1=\mathrm{conj}(Z_0)$ とする。この組合せで描かれた楕円様の図形を以下図1と呼ぶ。

3. 図形の安定性

一般に漸化式で描かれる図形は少ないiteration回数では、明瞭な曲線で描かれているように見えるが、回数を多くしてゆくと次第に曲線が太くなり、やがては平面を埋め尽くす可能性がある。現象としては式(1)の図形群もそのような挙動を示すようである。ただその速度は非常に遅い。$10^4\times10^4$ドットの仮想的画面で調べた結果、

iteration	図形の画素数/全画素数
1,000,000	0.03965 %
2,000,000	0.03984 %
4,000,000	0.03990 %
略	
128,000,000	0.04000 %

左表を得た。図形面積は単調増加である。原因が計算機の浮動小数点形式による誤差の累積によるものなのか漸化式の性質なのかは現在のところ不明である。

図形の画素数/全画素数の理論的予想値は0.04%である。

「パラメータの微小変化が数列要素間の距離に影響する度合」は次のようである。微小変化を$Z_0=Z_0+(0, \delta)$, $Z_1=\mathrm{const.}$としたとき、$\delta=0$の数列の要素との距離が10^{-3}以上となる(CRT画面上での1ドットの距離)iteration回数は以下であった。

δ	iteration回数
-0.100010	17,412
-0.100005	34,940
-0.1000025	69,996
-0.10000125	139,969

$\delta=10^{-4}$の変化で図形は明らかに変形する。図形はこういうパラメータ変化に不安定である。$\delta>0$の領域も同様の不安定性であった。

4. 複素共役条件：$Z_1=\mathrm{conj}(Z_0)$

式(1)でAが実数のとき、

$$\{Z_0=(x, y), Z_1=(x, -y)\}\Rightarrow Z_2=(x^2-y^2-x+A, -2xy-y), Z_3, \ldots\ldots$$

$$\{Z_0'=(x, -y), Z_1'=(x, y)\}\Rightarrow Z_2'=(x^2-y^2-x+A, 2xy+y)=\mathrm{conj}(Z_2), Z_3'=\mathrm{conj}(Z_3), \ldots$$

である。$\{Z_0, Z_1, ...\}$と$\{Z_0', Z_1', ...\}$がたまたま同じ図形のとき$\{Z_0', Z_1', ..\} \equiv \{Z_1, Z_0, Z_{-1}, ..\}$だから、その図形は順方向に描いても逆でも同じになり、閉曲線になる可能性がある。閉曲線のときは実軸対称形である。閉曲線の数は一つとは限らない。

条件$Z_1 = \mathrm{conj}(Z_0)$が存在すると漸化式のパラメータの微小変化が図の形状に影響する度合はおよそ10^2オーダ少なくなる。[3)]

5. 図形の性質

力学系から描かれる図形を一筆書き可能な閉曲線である、と仮定して、ある点Z_jの最近接点を$\{Z_i\}$の中から探しだし、それとの距離を積算して閉曲線長を求めた。

n	線長	最近接距離平均	分散値
320,000	0.790016	0.00000246	0.813716E-11
640,000	0.790016	0.00000123	0.443343E-12
1,280,000	0.790016	0.00000062	0.939165E-13

$n \sim 10^6$ならばiterationの回数によらず閉曲線長は一定である。この指標で見る限りフラクタル的な曲線ではないように思われる。任意の点での接線に漸近する直線も一定に収束する。

重心(𝕄)の変化は以下であった。iterationの回数によってプロットに不均一性が生じることはない。

n	Mx	My
1,000,000	0.0320529	0.0000001
2,000,000	0.0320529	0.0000001

図形の幾何中心(𝔾)をつぎのように定義した。

Gx=(各要素の実数部の最大値+各要素の実数部の最小値)/2

Gy=(各要素の虚数部の最大値+各要素の虚数部の最小値)/2

n	Gx	Gy
1,000,000	0.0252713	0.0000000
2,000,000	0.0252713	0.0000000

iterationの回数によって図形のサイズが大きくなったり、小さくなったりしない。最大/最小の位置は定まっている。

以上の性質は古典的な曲線と同じである。しかし𝕄≠𝔾である。漸化式で描かれる図形は有限個の点から構成されているので、点の分布が偏ればこのようなことが起こり得る。それは古典的な曲線には有り得ない。分布の偏りがiteration回数によって変化するかを調べる。幾何中心からx座標の負の方向にある点数と正方向にある点数を計数した結果が以下の表である。

n	-方向	+方向	比
1,000,000	444,332	555,668	1.2506
2,000,000	888,664	1,111,336	1.2506

分布の偏りは平滑化される傾向にない。これはこの曲線の性質と思われる。

以上の結果は図1が見掛けは良く似ていても楕円の性質を持っていないことを示す。𝕄≠𝔾という事実が引き起こす問題は図形の対称性であろう。

6. 対称性

漸化式によって描かれた図形の線は連続なように見えても有限個の点からなるので、至る所不連続である。従来、対称性は図形上の任意の点Pが対称操作𝕆によって、

$$P' = \mathbb{O}P \tag{2}$$

P’なる点に対応し、このP’点が元の図形に含まれている、と定義されているが、この定義であると漸化式から描かれた図形は対称性の議論がほとんど出来なくなってしまう。そこで定義を次のようにしたい。

「iterationを決定する初期パラメータが別のそれと何らかの対応があるとき、それぞれのパラメータから計算された数列が図形的に一致する」とき対称性がある。「図形的に一致」とは、図形の特徴：重心、曲線長、図形の大きさ、幾何中心等が一致することである。

この定義は何らかの対応を、対称操作⓪によって変換される位置の関係によって結び付けられるものと考えれば従来の対称性と同じである。図形を楕円とみなし、対称面が幾何中心を通る平面としたとき、平面対称操作によって $\{Z_0, Z_1\} \rightarrow \{Z_0', Z_1'\}$。この $\{Z_0', Z_1'\}$ を使ってiterationし、プロットした図形と元の図を比較した結果が下図である。

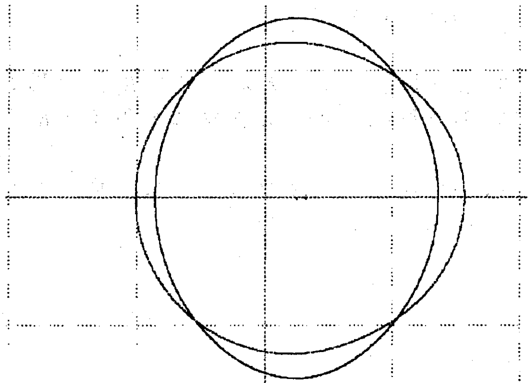

図1

明らかに平面対称操作はiterationから作られる楕円のような図形の対称操作ではない。
幾何中心を重心と変えても元の図形と一致しない。
図1は見掛けはy軸について対称性があるように見えるが、それは偽である。
（x軸についての対称性は存在する。）

7. 図形上の特異な点

数列の中に $Z_{m+1}=\mathrm{conj}(Z_m)$ という関係がどれだけあるかを調べた。完全な一致は成立しない（と思われる）ので $Z_{m+1}=\mathrm{conj}(Z_m)+\delta$, $|\delta|<10^{-8}$ で調べた。mが1億以下の計算で見いだされた対は以下である。

m	Z_{m+1}	Z_m
16,283,864	(-0.038288168, -0.114149739)	(-0.038288164, 0.114149743)
32,567,727	(0.100000003, 0.099999997)	(0.099999997, -0.100000004)
80,284,862	(0.100000006, 0.100000003)	(0.100000004, -0.100000005)

この図形はx軸（実軸）について対称であるから、Z_0, Z_1 との関係と違うのは、m=16,283,864の一対だけである。δ を 10^{-6} にすると非常に多くの対が見いだされるが、全部が上記の2種類の対に帰属する。念のため10億回までiterationを行い調べたが、上記の2種類の対以外は発見できなかった。おそらくこの図形において $Z_{m+1}=\mathrm{conj}(Z_m)$ の関係が成立するのは2対だけであろう。点 Z_m と Z_0 の2点は特異な点である。

他の関係：$\{Zr_{m+1}=-Zr_m, Zi_{m+1}=Zi_m\}$、$(Zi_{m+1}-Zi_m)/(Zr_{m+1}-Zr_m)=1$
で調べると、関係を満たすものはやはり2種類の対のみである。従って $Z_0 \Leftrightarrow Z_m$ なる何らかの対応を考えないわけにはいかない。これは一種の対称性のように思える。[5)]

以上をまとめると、複素力学系によって描かれた図1は連続的に思える曲線、iteration回数に依存しない曲線長、重心、幾何中心を有し、形状は楕円にそっくり

であるが、線の密度が均一ではなく、重心と幾何中心は一致せず、x軸についての対称性はあるが、y軸については従来の意味では対称性はなく、それに代る二点対の対応関係がある図形である。

8. 図形の制御

図1は楕円ではない図形であることが判明したが、形状はそっくりであるから、図1を初等関数で表わせるであろう。また初等関数が作図できるように、図1も作図可能な筈である。それは今まで不可能と言われていた力学系の図形制御の簡単な形式である。

パラメータ$A=(0.0685,0)$, $Z_0=(0.094,-0.094)$, $Z_1=\mathrm{conj}(Z_0)$を用いると有効数字3桁で最も楕円に近いと思われる図形が描かれる。この図形を関数$ax^{v}+y^{v}=r$でfitさせた。(楕円$ax^2+y^2=r$でも可能であるが、より良いfittingを求めたため。)$a=1.78869685$, $r=0.02076099$, $v=1.925$が得られた。図1からこれで関数$ax^{v}+y^{v}=r$をプロットした図をさし引いたものが図2である。

次に関数$ax^{v}+y^{v}=r$上の点を初期値としてiterationを計算して楕円様の図形が書けるかを試みた。まず$x>0, y>0$領域のx座標を512等分し、関数$ax^{v}+y^{v}=r$上のZ_0点を決める。同様にして、同関数上にZ_1点を取る。この2点を初期値として$Z_2, Z_3, Z_4, ..., Z_{\nu}$を計算する。それらの全点が、関数の評価式から$|r-ax^{v}-y^{v}|<5\times10^{-5}$となる場合の$Z_0, Z_1$対を採用する。この方法でiterationを計算してゆくと$n=8000$回程度までは関数上に乗るが、それ以降は次第に関数から離反してしまう。νを大きくとるのは現実的でない。x座標の分割をもっと細密にすればより良い初期値が求まる筈であるが、それも計算時間の点で現実的でない。また図1を初等関数で表わしたときに幾分かの誤差が入り込むから、細密分割によって良い初期値が求まる保証はない。従ってもっとラフな初期値から図1の形状を生成する手段が必要になる。それにはZ_0, Z_1点の検索を複素共役条件付きで行うことである。この条件があることにより、x座標分割の細密さが2オーダ以上低くても良く、かつ検索次元が1つ減少する。

上記と同じ様に$|r-ax^{v}-y^{v}|<5\times10^{-9}$で行うと、$Z_0=(0.094634, 0.093869)$が得られた。その点からiterationを計算すると元の関数とほとんど同じ形状のプロット結果図3が得られ、目的の図形を複素力学系で描くことに成功した。

元の初等関数の軌跡を複素力学系で再現するには、高精度で初期値を決定しなければならない。それを数値的に行うのは困難である。今回はZ_0, Z_1間の複素共役関係を付加して、閉曲線かつx軸対称という制約を付加して、精度の問題を回避したことになる。

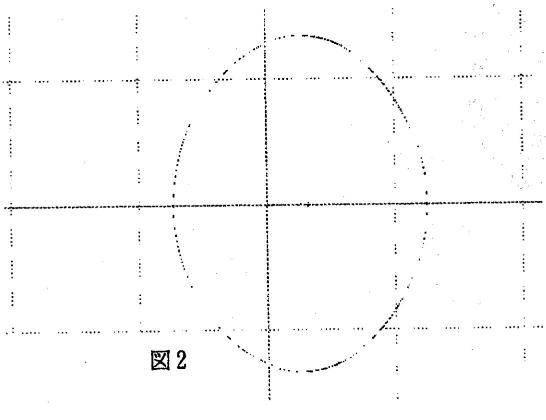

図2

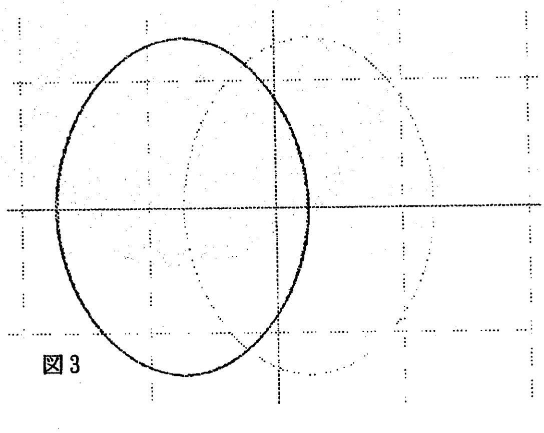

図3

9. おわりに

複素漸化式によって図形を描くと、一般には図形は乱雑になるか、無限大に発散して行くが、中には閉曲線のような図形を生成する漸化式が存在する。その一つの漸化式は、

$Z_{n+1}=Z_n{}^2-Z_{n-1}+A,\ \ Im(A)=0,\ \ Z_1=conj(Z_0)$

である。この漸化式とパラメータによって様々な閉曲線が描け、楕円様の曲線も描ける。この楕円様の曲線はiteration回数が10^7程度までは、古典的な楕円の性質(曲線の連続性、曲線長、重心、幾何中心の存在)を有しているが、線の密度に偏りがある。x軸を含む平面について対称であるが、y軸については(見掛けとは違って)対称ではない。ただしy軸については対称性に代るような二点対の対応関係が存在する。
上記の漸化式は安定に楕円様の図形を生成する。従って、生成した図形を初等関数で表わせ、逆にその初等関数の形状に近い漸化式を求めることもできる。
以上の知見を数値計算だけから求めることができ、数値的手段が図形形状研究の一つの方法となりうることを示した。

参考文献

1)川上博「カオスCGコレクション」サイエンス社(東京,1990).
青山智夫,川添良幸「コンピュータ・グラフィックス」共立出版(東京,1995).
2)白岩、青木"http://www.chaos.is.tsukuba.ac.jp/lab/fsec1.html"
記述の不変集合の用語で言えば、この場合は周期点ではなく準周期点である。
3)青山"http://www.esl.miyazaki-u.ac.jp/~aoyama/index.html"の
複素力学系研究ノート
4)青山智夫,長谷川年洋,池田且将「複素力学系から生成される図形」
HyperSpace,6,39～44(1997.4.1).
5)桜田、五味"http://www.me.sophia.ac.jp/~scitech/sci7/p17.html"
の代数方程式のガロア群についての記述を読むと、それに対応するものではないかと思われる。ただし現在のところ群の表現行列が解らない。

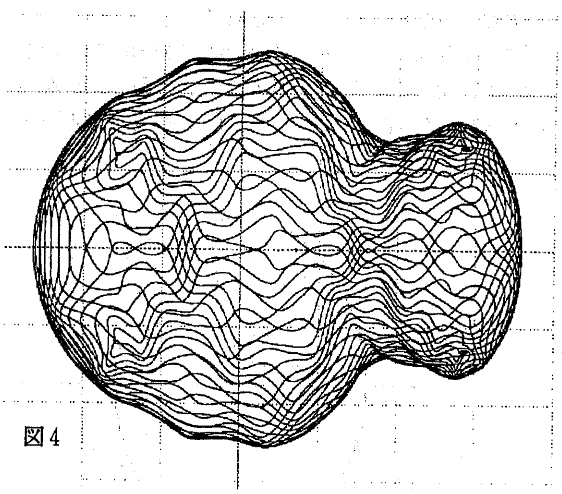

図4