

球面上の Poisson 方程式の高速解法

石黒 貴之[†] 服部 啓太[†]
 須田 礼仁[†] 杉原 正顯[†]

球面上の Poisson 方程式は地球の大気の運動をシミュレーションする上で欠かせない方程式である。従来、気象学の分野では球面上の Poisson 方程式の数値解法として、球面調和関数を用いたスペクトル法及び、差分法等が一般的に利用されてきた。しかし前者はスペクトル範囲以内では正確に計算できるが、計算速度が遅い。逆に後者は高速に計算できるが精度が悪い。そこで Yee によって高速 Fourier 変換 (FFT) を用いた高精度かつ高速な二重 Fourier 級数展開法が提案された。本報告では Yee の方法で解析が不完全なところを補い、さらに改良を加えた。その結果、我々の手法では、Yee の方法の精度を保ちつつ、2 倍程度の計算速度の向上を実現した。

Fast Solution for Poisson's Equation on a Sphere

TAKAYUKI ISHIGURO,[†] KEITA HATTORI,[†] REIJI SUDA[†]
 and MASAOKI SUGIHARA[†]

In meteorology, the spectral and finite difference methods are commonly used as the numerical solutions of the Poisson equation on a sphere. Nevertheless the former, being highly accurate, is slow, whereas the latter, being fast, is lowly accurate. To improve this situation, Yee has recently proposed a fast and highly accurate method based on the FFT, which is called truncated double Fourier series. In this report we make up for incomplete point of Yee's report and improve Yee's scheme. As a result our scheme achieves doubled performance with keeping the same level accuracy.

1. はじめに

Poisson 方程式は様々な物理現象を表す重要な方程式である。そのなかで球面上の Poisson 方程式は球面上で地球の大気の運動をシミュレーションする上で欠かせないものである。

従来、気象学の分野では球面上の Poisson 方程式の数値解法として、球面調和関数を用いたスペクトル法及び、差分法が一般的に利用されてきた。しかし前者はスペクトル範囲以内では正確に計算できるが、計算速度が遅い。逆に後者は高速に計算できるが精度が悪い。そこで Yee は高速 Fourier 変換 (FFT) を用いた高精度かつ高速な二重 Fourier 級数展開法を提案した。

Yee^{1,2)} は、図 1 のように緯度方向を θ 、経度方向を λ と定めるとき、球面上の滑らかなスカラー関数 $u(\theta, \lambda)$, $f(\theta, \lambda)$ が次のような二重 Fourier 級数に展開できる (付録参照) ことを利用して球面上の Poisson 方程式の解法を開発した。

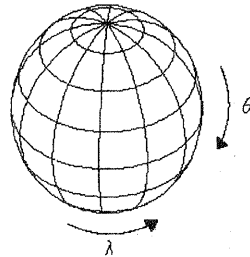


図 1 極座標。

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,m} F^{(m)}(l, \theta) e^{im\lambda}, \quad (1)$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} f_{l,m} F^{(m)}(l, \theta) e^{im\lambda}.$$

$$u_{l,m} = \frac{c}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\theta, \lambda) e^{-im\lambda} d\lambda \right] F^{(m)}(l, \theta) d\theta, \quad (2)$$

$$f_{l,m} = \frac{c}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) e^{-im\lambda} d\lambda \right] F^{(m)}(l, \theta) d\theta.$$

ここで

[†] 名古屋大学工学研究科計算理工学専攻
 Department of Computational Science and Engineering,
 Graduate School of Engineering, Nagoya University

$$c = \begin{cases} 1 & l=0 \\ 2 & l \neq 0 \end{cases}$$

$$F^{(m)}(l, \theta) = \begin{cases} \cos l\theta & m = \text{even} \\ \sin l\theta & m = \text{odd} \end{cases}$$

本報告では Yee の論文では十分考慮されていない問題を解決し、さらに改良を行った。

本報告の構成は次の通りである。2 節では Yee の方法及び、極問題、右辺項 $f(\theta, \lambda)$ の与え方の問題について説明する。3 節では実際に計算をする時の計算手順と計算量を紹介する。4 節では Yee の方法に加えた改良点と、その改良によって改善される計算時間について説明する。最後に 5 節では Yee の方法及び改良を加えた方法の、精度と計算時間を測定する。

2. Yee の方法

2.1 節では Poisson 方程式の解法を Yee の方法に従って説明する。Yee の方法を用いる場合、極問題を考えなくて良いことを 2.2 節で説明する。2.3 節では、右辺項 $f(\theta, \lambda)$ の与え方についての問題について考える。

2.1 二重 Fourier 級数展開による Poisson 方程式の解法

極座標系では球面上の Poisson 方程式は次のように表される。

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u(\theta, \lambda)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u(\theta, \lambda)}{\partial \lambda^2} = f(\theta, \lambda). \quad (3)$$

$u(\theta, \lambda), f(\theta, \lambda)$ を二重 Fourier 級数を用いて展開すると次のようになる。

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\theta) e^{im\lambda}, \quad (4)$$

$$f(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(\theta) e^{im\lambda},$$

$$u_m(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,m} F^{(m)}(l, \theta), \quad (5)$$

$$f_m(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{l,m} F^{(m)}(l, \theta).$$

(3) 式に (4) 式を用いると、 λ についての恒等式になるので、両辺の係数を比較することにより

$$u_m''(\theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} u_m'(\theta) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} u_m(\theta) = f_m(\theta), \quad (6)$$

となる。ただし $-\infty < m < \infty$, $u_m'(\theta), u_m''(\theta)$ はそれぞれ θ 方向の 1 階微分, 2 階微分である。

(6) 式に (5) 式を用いて式変形を行うと、次のように

なる。

m が偶数の時

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(l+2)u_{l+2,m} + (l-1)(l-2)u_{l-2,m} \\ & \quad - (2l^2 + 4m^2)u_{l,m}] \cos l\theta - 2u_{2,m} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} [2f_{l,m} - f_{l-2,m} - f_{l+2,m}] \cos l\theta \\ & \quad - f_{0,m} \cos 2\theta + f_{2,m}, \quad (7) \end{aligned}$$

m が奇数の時

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} [(l+1)(l+2)u_{l+2,m} + (l-1)(l-2)u_{l-2,m} \\ & \quad - (2l^2 + 4m^2)u_{l,m}] \sin l\theta - 2u_{2,m} \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} [2f_{l,m} - f_{l-2,m} - f_{l+2,m}] \sin l\theta \\ & \quad + f_{0,m} \cos 2\theta + f_{2,m}. \quad (8) \end{aligned}$$

(7)(8) 式は θ の恒等式なので、係数を比較することにより次のように行列で表すことができる。

$$\begin{pmatrix} b_{0,m} & c_0 & & & 0 \\ 0 & b_{2,m} & c_2 & & \\ & & a_4 & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{h}_e, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} b_{1,m} & c_1 & & & 0 \\ a_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix} \mathbf{u}_o = \mathbf{h}_o. \quad (10)$$

ここで $a_l = (l-2)(l-1), b_{l,m} = -2l^2 - 4m^2, c_l = (l+1)(l+2)$ であり

$$h_{l,m} = -f_{l-2,m} + 2f_{l,m} - f_{l+2,m} (l \neq 2),$$

$$h_{2,m} = -(1 + (-1)^m) f_{0,m} + 2f_{2,m} - f_{4,m} (l = 2),$$

$$\mathbf{u}_e = {}^t(u_{0,m}, u_{2,m}, \dots),$$

$$\mathbf{u}_o = {}^t(u_{1,m}, u_{3,m}, \dots),$$

$$\mathbf{h}_e = {}^t(h_{0,m}, h_{2,m}, \dots),$$

$$\mathbf{h}_o = {}^t(h_{1,m}, h_{3,m}, \dots).$$

m が奇数かつ $l = 0$ の時、(8) 式の両辺が消えてしまい、 $u_{0,m}$ は (9) 式に現れてこないが (2) 式より $u_{0,m} = 0$ であることがわかる。

従って (9)(10) 式、 $u_{0,m} = 0 (m = \text{odd})$ を用いることによって Poisson 方程式を解くことができる。

2.2 極問題

(6) 式には $1/\sin \theta, 1/\sin^2 \theta$ という項があるため $\theta = 0, \pi$ の時に発散してしまう可能性がある。よって、図 1 のような極を含むグリッドで問題を扱う場合には極問題を考えなくてはならない。Yee の論文では、極問題を完全

には解決していない。本報告では、極問題を完全に解決したので説明する。

(6) 式が発散しないためには全ての m について次のような条件 A, B を満たさなければいけない。

$$A : u_m(0) = u_m(\pi) = 0, \quad (11)$$

$$B : u'_m(0) = u'_m(\pi) = 0. \quad (12)$$

まず m が奇数の時を考える。(5) 式より Fourier sine 変換を用いて解を構成するので、 $u_m(0) = u_m(\pi) = 0$ である。よって条件 A を満たす。

次に条件 B を考える。(5) 式を θ で微分し、 $\theta = 0, \pi$ を代入すると次のようになる。

$$u'_m(0) = - \sum_{l=0}^{\infty} l u_{l,m}, \quad (13)$$

$$u'_m(\pi) = - \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l u_{l,m}. \quad (14)$$

ところで (8) 式を θ で微分し、 $\theta=0, \pi$ を代入すると、

$$4(m^2 + 1) \sum_{l=0}^{\infty} l u_{l,m} = 0, \quad (15)$$

$$4(m^2 + 1) \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l u_{l,m} = 0, \quad (16)$$

となる。 $0 < 4(m^2 + 1)$ なので

$$\sum_{l=0}^{\infty} l u_{l,m} = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l l u_{l,m} = 0.$$

(13)(14) 式より、 $u'_m(0) = u'_m(\pi) = 0$ 、すなわち条件 B を満たす。

次に m が偶数の時を考える。 $m = 0$ の時には、(6) 式において $u_m(\theta)$ の項は消えてしまうので条件 A は満たさなくてもよい。 $m \neq 0$ の時、条件 A を満たすためには

$$u_m(0) = u_{0,m} + u_{1,m} + u_{2,m} + \dots = 0, \quad (17)$$

$$u_m(\pi) = u_{0,m} - u_{1,m} + u_{2,m} - \dots = 0,$$

とならなければならない。よって

$$u_{0,m} + u_{2,m} + \dots = 0, \quad (18)$$

$$u_{1,m} + u_{3,m} + \dots = 0, \quad (19)$$

が成り立たなければならない。実は (9) 式と (18) 式、(10) 式と (19) 式は独立ではないので (18), (19) 式は自動的に満たされる。よって条件 A は方程式 (9)(10) 式を解くことにより満たされている。

m が偶数であるときには (5) 式より

$$u'_m(\theta) = - \sum_{l=0}^{\infty} l u_{l,m} \sin l\theta, \quad (20)$$

であるから、 $u_m(0) = u_m(\pi) = 0$ となるので条件 B も満たす。

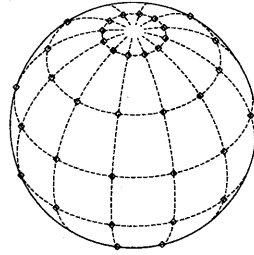


図 2 球面の分割。

以上のことから、極において (6) 式が発散することはなく、極における非発散条件を方程式に加える必要性がないことが示された。

2.3 右辺項 $f(\theta, \lambda)$ の問題

(3) 式が解を持つための必要十分条件として右辺項 $f(\theta, \lambda)$ は次を満たさなければならないことが知られている。

$$\int_S f(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = 0. \quad (21)$$

ここで S は球面を表す。右辺項 $f(\theta, \lambda)$ が (21) 式を満たしていなければ解 $u(\theta, \lambda)$ は存在しないが、実際に数値計算を行うときには、数値誤差などが含まれるので (21) 式が成り立っているとは限らない。

厳密解が存在しないのに数値解を計算すると、誤差が解 $u(\theta, \lambda)$ の高波数成分まで伝搬してしまう。そこで $f(\theta, \lambda)$ が (21) 式を満たすよう修正することが実用上は必要となる。

(21) 式に $f(\theta, \lambda)$ に対する二重 Fourier 展開を用いると次のようになる。

$$\int_S f(\theta, \lambda) \sin \theta d\theta d\lambda = 4\pi \sum_{l=\text{even}} f_{l,0} \frac{1}{1-l^2}. \quad (22)$$

従って、以下のように $f_{0,0}$ を決めることによって (21) 式を満たすように修正できる。

$$f_{0,0} = - \sum_{l=\text{even} \neq 0} \frac{f_{l,0}}{1-l^2}. \quad (23)$$

これは $f(\theta, \lambda)$ の定数項を調節しているということに他ならない。

3. 実際の計算手順

Yee は極を含むグリッドで計算をしたが、今回、図 2 のような極を含まないグリッドに適用した。この極を含まないグリッドで問題を扱う場合、極問題が生じないという大きな利点がある。

ここでは、この極を含まないグリッドでの実際の計算手順、及び計算量を説明する。ただし [] は計算量を表す。

L, M を 2 のべき乗とし、緯度方向のグリッド数を L 、経度方向のグリッド数を $2M$ とする。また、 $\lambda_k =$

$2\pi k/2M, \theta_j = (j+1/2)\pi/L, |k| \leq M, 0 \leq j \leq L-1$ とする。

3.1 $f(\theta_j, \lambda_k)$ の Fourier 変換

まず $f_{l,m}$ までの計算手順を考える。球面上で $f(\theta, \lambda)$ が与えられた時、(2) 式の

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) e^{-im\lambda} d\lambda,$$

を台形則で近似した

$$f_m(\theta_j) = \frac{1}{2M} \sum_{k=-M}^M f(\theta_j, \lambda_k) e^{-im\lambda_k}, \quad (24)$$

を用いて $f_m(\theta_j)$ を求める [$O(LM \log M)$].

次に (2) 式の

$$f_{l,m} = \frac{c}{\pi} \int_0^\pi f_m(\theta) F(l, \theta) d\theta,$$

を台形則で近似した

$$f_{l,m} = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{L-1} f_m(\theta_j) F^{(m)}(l, \theta_j), \quad (25)$$

を利用して $f_{l,m}$ を計算する [$O(ML \log L)$].

次に (21) 式が成り立つように $f_{0,0}$ を修正する。(23) 式を有限項でうち切った次の式を用いて $f_{0,0}$ を求める [$O(L)$].

$$f_{0,0} = - \sum_{l=\text{even} \neq 0}^{L-1} \frac{f_{l,0}}{1-l^2}, \quad (26)$$

3.2 $f_{l,m}$ から $u_{l,m}$ を求める

次に $f_{l,m}$ から $u_{l,m}$ を求める。

(9),(10) 式の l, m を有限の値でうち切ると、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} b_{0,m} & c_0 & & & & 0 \\ 0 & b_{2,m} & c_2 & & & \\ & a_4 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & & c_{L-4} \\ 0 & & & a_{L-2} & b_{L-2,m} & \\ \left(\begin{array}{l} b_{1,m} & c_1 & & & 0 \\ a_3 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & & c_{L-3} \\ 0 & & a_{L-1} & b_{L-1,m} & \end{array} \right) \end{pmatrix} \mathbf{u}_e = \mathbf{h}_e, \quad (27)$$

ただし、ここで新たに

$$\mathbf{u}_e = {}^t(u_0, u_2, \dots, u_{L-2}),$$

$$\mathbf{u}_o = {}^t(u_1, u_3, \dots, u_{L-1}),$$

$$\mathbf{h}_e = {}^t(h_0, h_2, \dots, h_{L-2}),$$

$$\mathbf{h}_o = {}^t(h_1, h_3, \dots, h_{L-1}),$$

とした。この行列を各 m について解く。これは Gauss の消去法を用いて解くことができる [$O(LM)$].

ここで m が 0 の時に、 $u_{0,0}$ は方程式に現れない。そもそも Poisson 方程式の解自体に定数項の任意性があるので、定数項を表す $u_{0,0}$ は何でもよいのだが、ここでは両極があると仮定して、両極の和が 0 になるように定める。

$$u(0) + u(\pi) = 0. \quad (29)$$

これは簡単な計算より次のようになる [$O(L)$].

$$u_{0,0} = - \sum_{l=\text{even}, \neq 0} u_{l,0}. \quad (30)$$

また m が奇数の時には $u_{0,m} = 0$ とする [$O(M)$].

3.3 $u(\theta_j, \lambda_k)$ への Fourier 逆変換

次に $u_{l,m}$ から $u(\theta_j, \lambda_k)$ へ逆変換する。(5) 式を $0 \leq l \leq L-1$ でうち切った

$$u_m(\theta_j) = \sum_{l=0}^{L-1} u_{l,m} F^{(m)}(l, \theta_j), \quad (31)$$

を用いて $u_m(\theta)$ を計算する [$O(ML \log L)$].

最後に (4) 式を $-M \leq m \leq M$ でうち切った

$$u(\theta_j, \lambda_k) = \sum_{m=-M}^M u_m(\theta_j) e^{im\lambda_k}, \quad (32)$$

を用いて $u(\theta_j, \lambda_k)$ を計算する [$O(ML \log M)$].

総計算量は $O(LM \log(L+M))$ であり、特に $L = O(M)$ の時には $O(M^2 \log M)$ となる。

4. Yee の方法の改良

我々はさらに改良を加え、計算量の軽減を行った。

第 1 の改良は、扱う問題が実数であるときに、 θ 方向の計算を半分にするものである。

第 2 の改良は、右辺項 $f(\theta, \lambda)$ が東西方向に滑らかなのである時の、高波数成分の計算を省くものである。

本節では、これらの改良法を提案し、計算量がどれだけ減少するか説明する。

4.1 改良 1: 実関数の場合の高速化

与えられる $f(\theta, \lambda)$ が実数の場合、(24) 式において $f_m^*(\theta) = f_m(\theta)$ となる。また Fourier cosine(sine) 変換、連立方程式、逆 Fourier cosine(sine) 変換は実部、虚部は独立に計算でき、かつ各 m について独立しているので $u_m^*(\theta) = u_m(\theta)$ となる。よって Fourier cosine(sine) 変換と連立方程式、Fourier cosine(sine) 逆変換については $0 \leq m \leq M$ で計算すれば $-M \leq m \leq -1$ で計算する必要はない。 $0 \leq m \leq M$ で $u_m(\theta)$ まで計算してから、 $u_{-m}(\theta) = u_m^*(\theta)$ とすればよい。

4.2 改良 2: 高波数成分の計算の省略

最初に計算する東西方向の Fourier 変換において $f(\theta, \lambda)$ が東西方向に比較的滑らかな時、高波数部分が 0 に近くなることを利用する。 $-M \leq m \leq M, 0 \leq \theta \leq \pi$ においての $f_m(\theta)$ の最大値 $|f_m(\theta)|_{\max}$ を探し出す。そしてある k について $f_k(\theta) \leq \epsilon |f_m(\theta)|_{\max}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) と

なる列 k は, 全て 0 にしてしまい, Fourier cosine(sine) 変換と連立方程式, Fourier cosine(sine) 逆変換については計算しない.

4.3 計算量の改善

ここでは, この2つの改良によって計算時間がどれだけ節約できるのか概算する. 長さ n のデータを複素 Fourier 変換するためにかかる時間が $Tn \log n$ であると仮定する. また, 同じ長さのデータを扱う場合, Fourier cosine/sine 変換は複素 Fourier 変換の3倍の計算時間がかかるとする.

東西方向の波を波数 J までで近似すると仮定する. メッシュを $M \times 2M$ (南北 \times 東西) とするときそれぞれの計算にかかる計算量はおよそ次のようになる.

- 東西方向の計算量 $T \times 2M \log 2M \times M = 2TM^2 \log 2M$
- 南北方向の計算量 (Yee の方法) $3T \times M \log M \times 2M = 6TM^2 \log M$
- 南北方向の計算量 (改良) $3T \times M \log M \times J = 3TJM \log M$

総計算量はおよそ次のようになる.

- Yee の方法 $8TM^2 \log M$
- 改良を加えた方法 $TM(2M + 3J) \log M$

改良を加えた方法の計算時間を見てみる. $J = M$ の時には計算量は $5TM^2 \log M$ となる. このとき改良2の効果は効いていないので改良1のみの効果がわかる. 改良1のみでも Yee の方法に比べて計算時間が約 5/8 になっているのがわかる.

$J = M/2$ の時には 計算量は $(7/2)TM^2 \log M$ となり, 計算時間は半分以下になる.

$J = 2$ の時は $f(\theta, \lambda)$ が長い波長しか持たない時に相当する. このとき計算量は $2TM^2 \log M$ となるので計算時間は約 1/4 まで減らすことができる.

5. 数値実験

次の関数を用いてテストを行った.

$$f(\theta, \lambda) = - \sum_{m=m_1}^{m_2} (m+1)(m+2) \cos \theta \times \sin^m \theta \cos m(\lambda - d_m) - 2 \cos \theta.$$

ここで d_m は $0 \leq d_m \leq 2\pi$ の乱数である. ここで m_2 が大きくなると東西方向の複雑さが増すことに注意する. この時の厳密解はわかっている,

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{m=m_1}^{m_2} \cos \theta \sin^m \theta \cos m(\lambda - d_m) + \cos \theta,$$

である. また, 解 $u(\theta, \lambda)$ の誤差を次のように評価する.

$$\|E\| = \|u - u_A\| / \|u_A\|.$$

ここで u_A は厳密解であり, u は数値解である.

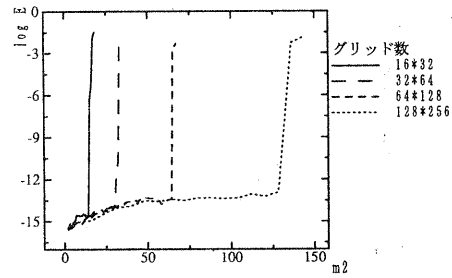


図3 東西の波の複雑さと誤差の関係 (Yee の方法).

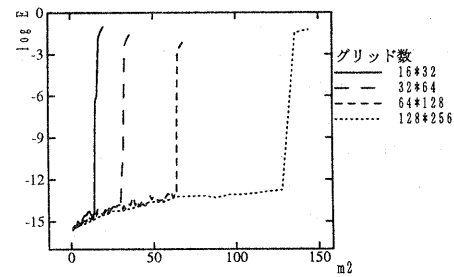


図4 東西の波の複雑さと誤差の関係 (改良を含んだ場合).

5.1 解の精度

$f(\theta, \lambda)$ の東西方向の複雑さを決定する m_2 を変化させたときの精度を測定した. また, 極を含まないグリッドで測定した. Yee の方法の精度を図3, 改良を加えたときの精度を図4に示す. なお $m_1 = 1, \epsilon = 10^{-10}$ とした.

図3,4より, Yee の方法も, 改良を加えた方法も同様に, $f(\theta, \lambda)$ が2グリッドより長い波長 ($m_2 \leq M$) しか持たない時には精度良く計算できている. 逆に Nyquist 周波数 ($m_2 = M$) を越えたときに精度が一気に落ちることがわかる.

5.2 計算時間

Yee の方法と, 改良を加えた場合の計算時間を計測した. その結果を図5に示す. また, Yee の方法は計算時間が m_2 に依存しないので $m_2 = 2$ で計算した. また, 極を含まないグリッドで測定した.

今回, 我々が用いた FFT のルーチンは同じデータの長さを計算するとき, 複素 Fourier 変換に比べて, Fourier cosine(sine) 変換の方が3倍弱の計算時間がかかる. 計算時間の結果を見てみると, 4.3節で考察した内容をよく表している. Yee の方法が右辺項 $f(\theta, \lambda)$ に関係なく, 計算時間は一定であるが, 改良を加えた方法は, 右辺 $f(\theta, \lambda)$ が東西方向に滑らかなほど, 計算時間が短くなっているのが分かる.

なお, 極を含むグリッドについて測定した結果, 計算速

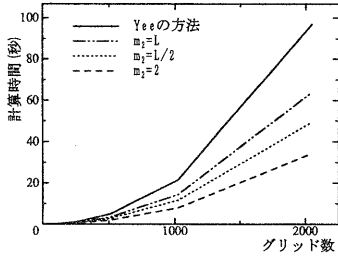


図5 Yeeの方法と改良を加えた場合の計算速度.

度, 計算時間のともに同様な結果が得られた.

6. まとめ

本報告では二重 Fourier 級数展開を用いて Poisson 方程式を解く Yee の方法について報告し, 問題点の解決と高速化手法の提案を行った.

Yee の論文では十分考慮されていない極問題について完全に解決することができた. Yee の論文には右辺項 $f(\theta, \lambda)$ の与え方の問題について明確な記述がなかったので, この問題の解決法を提案した. また Yee は極を含むグリッドしか扱っていないが, 本報告では, 極を含まないグリッドについても適用した. さらに Yee の方法の計算速度を改良を提案した. その結果, Yee の方法の精度を保ちつつも, 2 倍程度の計算速度の向上を実現した.

今後は渦度方程式などに適用し, 評価を行う予定である.

参考文献

- 1) Samuel Y.K.Yee. 1981: Solution of Poisson's equation on a Sphere by Truncated Double Fourier Series, *Mon. Wea. Rev.*, 109,500-504.
- 2) Samuel Y.K.Yee. 1980: Studies on Fourier Series on Spheres, *Mon. Wea. Rev.*, 108,676-678.
- 3) Steven.A.Orszag. 1974: Fourier series on spheres, *Mon. Wea. Rev.*, 102,56-75.

付 録

ここでは球面上のスカラー関数 $u(\theta, \lambda)$ が (1) 式のように二重 Fourier 級数展開で表せることを証明する.

$u(\theta, \lambda)$ は, 球面上で滑らかな関数であると仮定する. このとき $u(\theta, \lambda)$ は, 球面調和関数 $Y_n^m(\theta, \lambda)$ を使い

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} a_{nm} Y_n^m(\theta, \lambda), \quad (33)$$

と書ける. また, $Y_n^m(\theta, \lambda)$ は Legendre 関数 $P_n^m(\cos \theta)$ を使い

$$Y_n^m(\theta, \lambda) = c_{n,m} P_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda}, \quad (34)$$

と書ける. ただし

$$c_{n,m} = \left[\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right]^{\frac{1}{2}}$$

よって $u(\theta, \lambda)$ は結局

$$\begin{aligned} u(\theta, \lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} a_{nm} c_{n,m} P_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} a_{nm} c_{n,m} P_n^m(\cos \theta) e^{im\lambda}, \quad (35) \end{aligned}$$

となる (n, m の範囲に注意). 次に

$$P_n^m(\cos \theta) = \sin^{|m|} \theta P_{nm}(\cos \theta), \quad (36)$$

($P_{nm}(\cos \theta)$ は $\cos \theta$ の多項式 [3]) の関係式より,

$$\begin{aligned} u(\theta, \lambda) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} a_{nm} c_{n,m} \sin^{|m|} \theta \\ &\quad \times P_{nm}(\cos \theta) e^{im\lambda}. \quad (37) \end{aligned}$$

ところで

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u_m(\theta) e^{im\lambda}, \quad (38)$$

であるから

$$u_m(\theta) = \sum_{|m| \leq n} a_{nm} c_{n,m} \sin^{|m|} \theta P_{nm}(\cos \theta). \quad (39)$$

上式において, $P_{nm}(\cos \theta)$ は \cos の多項式だから偶関数であり, $\sin^{|m|} \theta$ は, m が偶数であるとき偶関数, m が奇数であるとき奇関数である. よって $u_m(\theta)$ は, m が偶数であるとき偶関数, m が奇数であるときには奇関数となる. 偶関数は \cos , 奇関数は \sin で近似できるので

$$u_m(\theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,m} \cos l\theta & m = \text{even} \\ \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,m} \sin l\theta & m = \text{odd} \end{cases} \quad (40)$$

これを (38) 式に代入して

$$u(\theta, \lambda) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} u_{l,m} F^{(m)}(l, \theta) e^{im\lambda}. \quad (41)$$

ただし

$$F^{(m)}(l, \theta) = \begin{cases} \cos l\theta & \text{if } m = \text{even} \\ \sin l\theta & \text{if } m = \text{odd} \end{cases}$$