

ブラックホール時空でのシンプレクティック・レイトレーシング

佐藤 哲

竹村 治雄

横矢 直和

奈良先端科学技術大学院大学 情報科学研究科

従来、ブラックホール時空でレイトレーシングを行いCG画像を作成する際には、光線を追跡するために通常の空間での直線の方程式に相当する測地線の微分方程式が用いられていた。しかしブラックホール時空では一般に測地線の微分方程式の解析解を求めることは不可能で、数値計算結果が正しいかどうか評価することが難しかった。そこで、測地線の微分方程式を用いて光線を追跡していく方法では計算誤差が蓄積していく可能性があることを示し、誤差が蓄積しない方法として測地線の微分方程式の代わりにハミルトンの正準方程式を用いる手法を紹介する。本報告では、ハミルトンの正準方程式を用いる手法をシンプレクティック・レイトレーシング法と呼び、計算精度と計算速度の両立を考えた場合に従来手法に比べ優位性があることを示し、実際に作成したCG画像を紹介する。

Symplectic Raytracing in Blackhole Spacetime

Tetsu SATOH

Haruo TAKEMURA

Naokazu YOKOYA

Graduate School of Information Science, Nara Institute of Science and Technology

This paper describes symplectic raytracing which generates CG images by solving Hamilton's canonical equations instead of geodesic equations. The typical method for generating CG images in the blackhole spacetime employs geodesic equations which correspond to equations of the straight line in normal space for tracing lights. However, because it is impossible to solve differential equations of geodesics in general, evaluation of correctness of computation results is difficult. To solve this problem, we present a method which doesn't accumulate errors by using Hamilton's canonical equations and suggests possibility of error accumulation when a method which traces light by using geodesic equations is used. In this paper, we call the method which employs Hamilton's canonical equations "symplectic raytracing". Its computational accuracy and speed are discussed. Also image generated by symplectic raytracing is introduced.

1 はじめに

ブラックホール時空での CG 画像を作成する手法の一つとして、写実的な CG 画像を作成する技法として広く使用されている光線追跡法を拡張した重力場光線追跡法 [1][2] がある。光線追跡法は光源から発射された光線の軌道を追跡するもので、処理の効率化のために観測者の視点から光線を発射する視線追跡法 [3] として使用されることが多い。重力場光線追跡法も、観測者の視点から光線を発射して物体に衝突するまで追跡する処理の流れは通常の光線追跡法と同様である。ただしブラックホール時空では光線は直進するとは限らないので、直線の方程式を拡張した測地線の方程式を使う。測地線の方程式は複雑な微分方程式であり、観測者の視点位置と視線方向を初期値として数値的に解いていく必要がある。

ところで、前述のようにブラックホール周辺では光線は直進するとは限らないので、光がブラックホール周囲を周回してから遠方に飛び去ることさえある。従って光線の軌跡が長くなり、局所的な数値誤差が蓄積して計算結果の正当性が下がる可能性がある。

そこで本論文では、局所的な数値誤差を蓄積させないシンプレクティック・レイトレーシング法 [4][5] を紹介し、測地線の方程式を使う手法と比べどの程度誤差の蓄積を抑えられ、それに伴い計算時間がどう変化するかを考察する。そして実際にシンプレクティック・レイトレーシング法を用いて作成した画像を紹介する。なお、文献 [4][5] では陰的な公式を用いて計算する手法をシンプレクティック・レイトレーシングと呼んでいるが、以下では計算の高速化のために開発した陽的な公式を用いる手法をシンプレクティック・レイトレーシングと呼ぶ。

2 ブラックホール時空での CG 作成

可視化には様々な手法が存在するが、本論文では光線追跡法の考え方を元に CG 画像を作成する手法を扱う。通常、密度が一様な空間では光線は直線の方程式に従うとされるが、ブラックホール時空では直線ではなく複雑な微分方程式により光線の軌道が計算される。

従来、重力場光線追跡法あるいは 4 次元光線追跡法と呼ばれていた手法では、微分幾何学という測地線の方程式と呼ばれる連立常微分方程式が使用されていた。この微分方程式は時空の歪みが無い時には直線の方程式に帰着され、通常の光線追跡法の素直な拡張になっている。こ

のような手法は、次のような流れに基づき CG 画像を作成する。

1. 観測者の視点の位置を固定し、観測者の前方に一定の大きさのスクリーンを設定する。
2. 以下をスクリーン上の全ての点について実行する。
 - (a) スクリーン上の一点 (i, j) の方向に視線を向けるとし、視点位置から (i, j) に向かうベクトルを視線とする。
 - (b) 観測者の視点位置と視線方向を、測地線の方程式の初期値とする。
 - (c) 測地線の方程式を数値的に解き、ある時点での光線の先端の座標 z_k から次の座標 z_{k+1} を計算し、光線を伸ばす。
 - (d) 線分 $z_k z_{k+1}$ と配置した物体との交差判定をする。物体表面と交差していれば、交差点の色を (i, j) にプロットする。交差していなければ、 $z_k \leftarrow z_{k+1}$ とし、(c) に戻りさらに光線を伸ばす。

一方、本論文で紹介する手法は、2. の (b), (c) の測地線の方程式を用いる部分が、測地線の方程式の代わりにハミルトンの正準方程式を用いるように変わる。その他の処理の流れは上述のものと同じである。ハミルトンの正準方程式に対しては、次節で説明するシンプレクティック数値解析という誤差の蓄積を抑えることが可能な数値解法が存在することが知られており、測地線の方程式を使用するよりも正確な結果を出せることが期待できる。

3 ブラックホール時空でのシンプレクティック数値解析

3.1 シンプレクティック数値解析

シンプレクティック数値解析は、ハミルトン力学に対して適用可能な微分方程式の数値解法で、数値的な局所誤差を蓄積させないという特徴がある。以下、ブラックホール時空は 4 次元空間なので、座標成分を 4 次元極座標系 (t, r, θ, ϕ) と表し、座標成分に対応する運動量成分を $(p_t, p_r, p_\theta, p_\phi)$ とする。ハミルトン力学では、この座標成分と運動量成分により構成される 8 次元位相空間内で定義される次の微分方程式が、物体の運動方

程式となる。

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \\ \frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \end{cases} \quad (1)$$

ここで、 s は各 8 成分の値を決定するパラメータであり、 H はハミルトニアンと呼ばれるスカラー関数である。そして q_i が各座標成分を、 p_i が各運動量成分を表す。本論文で対象とする、球対称のブラックホール周辺での光線の運動を表すハミルトニアンは、次のものである。

$$H = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{p_r^2}{2} - \frac{p_\theta^2}{2r^2} - \frac{p_\phi^2}{2r^2 \sin^2 \theta} \quad (2)$$

シンプレクティック数値解析とは、次のように定義される。まず、座標成分の微分形式 dq_i と運動量成分の微分形式 dp_i に対して、ある瞬間 $s = s_0$ の時の成分 ($dq_i(s_0), dp_i(s_0)$) から数値的に $s = s_0 + \Delta s$ 後の成分 ($dq_i(s_0 + \Delta s), dp_i(s_0 + \Delta s)$) を求める。そしてそれらの値が、外微分形式の外積 \wedge を用いて定義されるシンプレクティック 2 次形式が保存される形になっている場合、つまり

$$\sum_{i=0}^3 dq_i(s_0) \wedge dp_i(s_0) = \sum_{i=0}^3 dq_i(s_0 + \Delta s) \wedge dp_i(s_0 + \Delta s) \quad (3)$$

が成り立つ場合、その数値解法をシンプレクティック数値解析法と呼ぶ。一般に、広く使用されている古典的 Runge-Kutta 法などは、打ち切り誤差の次数に応じただけ誤差が生じ、式 (3) は満たされない。シンプレクティック数値解析では、個々の成分についてはやはり打ち切り誤差が生じるものの、外微分の総和を取ると誤差が打ち消し合い、式 (3) が厳密に満たされる。このようにシンプレクティック数値解析には厳しい制限条件があるため、古典的 Runge-Kutta 法のようにあらゆる問題に適用可能なわけではない。

3.2 1 次のシンプレクティック数値解法

式 (2) で定義されるハミルトニアンに対し、まず一次のオーダーの打ち切り誤差を持つシンプレクティック数値解法を導く。式 (2) が運動量成分について 4 項の和の形になっていることに注目す

ると、個々の項についてのシンプレクティック数値解法を導き順次実行し、そのハミルトニアンについてのシンプレクティック数値解法を構成するという手法が考えられる。そこで、まず第一項を

$$H_1 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \frac{p_t^2}{2} \quad (4)$$

とおくと、ハミルトンの正準方程式 (1) で右辺がゼロにならない式は

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = \frac{\partial H_1}{\partial p_t} = \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ \frac{dp_r}{ds} = -\frac{\partial H_1}{\partial r} = \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (5)$$

の二つである。そして左辺を差分で置き換えるオイラー法を適用すると、

$$\begin{cases} t(s + \Delta s) = t(s) + \Delta s \frac{p_t}{1 - r_g/r} \\ p_r(s + \Delta s) = p_r(s) + \Delta s \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2} \end{cases} \quad (6)$$

という 1 次の解法が得られる。これが式 (3) を満たすことは、次のような直接計算で容易に証明できる。

$$\begin{aligned} dt(s + \Delta s) &= dt(s) + \Delta s d\left(\frac{p_t}{1 - r_g/r}\right) \\ &= dt(s) + \Delta s \frac{dp_t(s)}{1 - r_g/r} - \Delta s \frac{p_t r_g dr(s)}{(r - r_g)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} dp_r(s + \Delta s) &= dp_r(s) + \Delta s d\left(\frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2}\right) \\ &= dp_r(s) + \Delta s \frac{r_g p_t dp_t(s)}{(r - r_g)^2} + \Delta s \frac{r_g p_t^2 dr(s)}{(r - r_g)^3} \end{aligned} \quad (8)$$

式 (5) 又は (6) より、 $dp_t(s + \Delta s) = dp_t(s)$ 、 $dr(s + \Delta s) = dr(s)$ であることに注意して外積を計算すると、式 (7)、式 (8) の結果を用いて

$$\begin{aligned} dt(s + \Delta s) \wedge dp_t(s + \Delta s) &= dt(s) \wedge dp_t(s) - \Delta s \frac{p_t r_g dr(s) \wedge dp_t(s)}{(r - r_g)^2} \end{aligned} \quad (9)$$

$$dr(s + \Delta s) \wedge dp_r(s + \Delta s) \\ = dr(s) \wedge dp_r(s) + \Delta s \frac{p_t r_g dr(s) \wedge dp_t(s)}{(r - r_g)^2} \quad (10)$$

よって

$$dt(s + \Delta s) \wedge dp_t(s + \Delta s) + \\ dr(s + \Delta s) \wedge dp_r(s + \Delta s) \\ = dt(s) \wedge dp_t(s) + dr(s) \wedge dp_r(s) \quad (11)$$

これで式 (6) がシンプレクティック数値解法であることが証明できた。全く同様に残りの項に対してもオイラー法を元に1次のオーダーのシンプレクティック数値解法を構成できる。結論として、次のサブルーチンを実行することがハミルトニアン (式 (2)) に対する1次のシンプレクティック数値解法となる。

subroutine first(Δs)

$$\text{first_t}(\Delta s); \text{first_r}(\Delta s); \\ \text{first_}\theta(\Delta s); \text{first_}\phi(\Delta s);$$

first_t(Δs) :

$$t \leftarrow t + \Delta s \frac{p_t}{(1 - r_g/r)}, p_r \leftarrow p_r + \Delta s \frac{r_g p_t^2}{2(r - r_g)^2}$$

first_r(Δs) :

$$r \leftarrow r - \Delta s p_r, \\ r \leftarrow \left(r + \sqrt{r^2 + 4\Delta s r_g p_r} \right) \div 2, \\ p_r \leftarrow p_r + \Delta s \frac{r_g p_r^2}{2r^2}$$

first_ θ (Δs) :

$$p_r \leftarrow p_r - \Delta s \frac{p_\theta^2}{r^3}, \theta \leftarrow \theta - \Delta s \frac{p_\theta}{r^2}$$

first_ ϕ (Δs) :

$$p_r \leftarrow p_r - \Delta s \frac{p_\phi^2}{r^3 \sin^2 \theta}, \\ p_\theta \leftarrow p_\theta - \Delta s \frac{\cos \theta p_\phi^2}{r^2 \sin^3 \theta}, \\ \phi \leftarrow \phi - \Delta s \frac{p_\phi}{r^2 \sin^2 \theta}$$

3.3 高次のシンプレクティック数値解析

本節では、文献 [6][7] の手法に基づき1次の解法の合成により4次の解法を導く。

サブルーチン **first(Δs)** を次のように順次実行すると2次の数値解法が実現でき、それをサブルーチン **second(Δs)** と定義する。

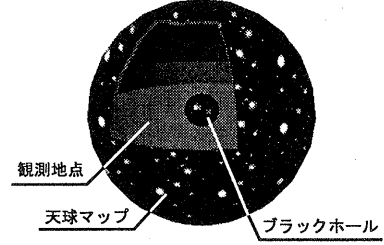


図 1: 設定するブラックホール時空モデル

subroutine second(Δs)

$$\text{first_t}(\frac{\Delta s}{2}); \text{first_r}(\frac{\Delta s}{2}); \text{first_}\theta(\frac{\Delta s}{2}); \\ \text{first_}\phi(\Delta s); \\ \text{first_}\theta(\frac{\Delta s}{2}); \text{first_r}(\frac{\Delta s}{2}); \text{first_t}(\frac{\Delta s}{2});$$

さらに、古典的 Runge-Kutta 法、すなわち4次の陽的な数値解法と比較するために、以下のように4次のシンプレクティック数値解法を定義する。

subroutine fourth(Δs)

$$\text{second}(k_1 \Delta s); \\ \text{second}(k_2 \Delta s); \\ \text{second}(k_1 \Delta s);$$

ここで、 k_1, k_2 は $k_1 = (4 + 2^{2/3} + 2^{4/3})/6$, $k_2 = -(1 + 2^{1/3})^2/3$ と定義される定数である。

4 シンプレクティック・レイトレーシング

シンプレクティック・レイトレーシングは、光線の運動方程式がハミルトンの正準方程式によって記述できる、つまり光線の運動に対するハミルトニアンが定義できる場合のCG作成技法である。自然界の物理現象の多くはハミルトンの正準方程式によって記述可能であり、文献 [4] によって球対称、軸対称などのブラックホール時空での光線の軌道を表すハミルトニアンが与えられている。従って、大抵のブラックホール時空に対してはシンプレクティック・レイトレーシングが適用可能である。

処理の流れは、2節での重力場光線追跡法の処理の流れの、測地線の方程式を用いる部分がハミルトンの正準方程式になるだけである。まず、図 1 に示すように、座標系の原点にブラックホールを配置し、ブラックホールを天球で覆

う。天球の内側には NASA が配布している Hubble Space Telescope Public Pictures のうち、Hubble Spies Giant Star Clusters Near Galactic Center¹ (STScI-PRC99-30) の写真データをマッピングする。そして天球の中に観測者を配置し、ブラックホールを観測するという状況設定にする。

観測者の視点から光線を発射した後、8次元位相空間内で光線を追跡する。そして天球に衝突した場合は衝突点の画像データの色を調べて描画する。ブラックホールに吸い込まれた場合は、黒を描画する。本論文で対象とするのは観測者が知覚する観測画像の可視化であるので、描画の際には 8 成分のうち時間成分と運動量成分は描画時には無視し、3次元座標成分のみを用いる。このように、光線をハミルトニアンに従う力学系として扱う手法がシンプレクティック・レイトレーシングである。

5 実験結果

ブラックホール時空での CG 作成を行う場合、前節までで説明した通り、光線の軌道を表す方程式としては測地線の方程式とハミルトンの正準方程式が、そしてそれらの方程式を数値的に解く手法としては、古典的 Runge-Kutta 法とシンプレクティック数値解析法がある。この方程式と数値解析法の組み合わせは、表1のように4通り存在する。しかし、ハミルトンの正準方程式を Runge-Kutta 法で解くことは、測地線の方程式を Runge-Kutta 法で解くこととほぼ同等である。また、測地線の方程式に対してはシンプレクティック数値解析が定義されない。従って本節では、重力場光線追跡法（測地線の方程式を Runge-Kutta 法で解く）とシンプレクティック・レイトレーシング（ハミルトンの正準方程式をシンプレクティック数値解析法で解く）を比較することにする。以下、計算は全て sgi 社の Onyx2 InfiniteReality (MIPS R10000×16, 195MHz, メモリ 3G bytes) を使い、MIPS C(ver. 7.30) 及び gcc(ver. 2.95) を用いて 10 進 16 桁程度の精度で計算されるよう実装した。

まず、速度比較と並列化の度合いを調べるために、100×100画素のスクリーンを設定して、計1万本の光線を発射して画像を作成する実験を、使用する CPU の個数を変化させて計測した。結果を図2に示す。横軸が CPU の個数を、縦軸が計算時間（単位：分）を表している。破線が重力場光線追跡法を用いた場合の計算時間、実線がシンプレクティック・レイトレーシング

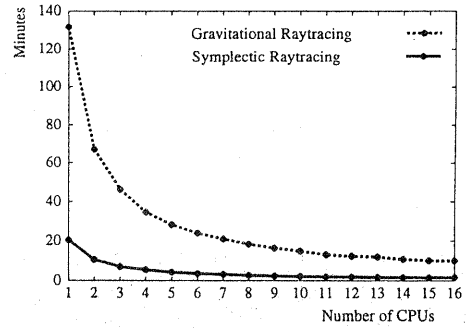


図 2: 使用 CPU 数と計算時間

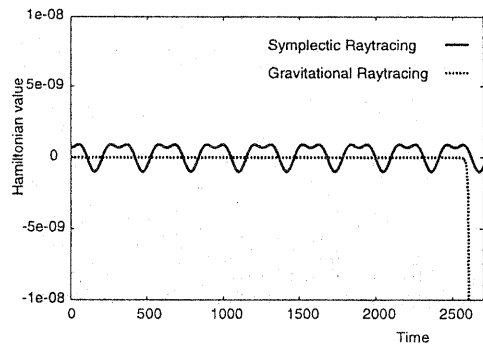


図 3: ハミルトニアン値

法を用いた場合の計算時間である。同じ 4 次の打ち切り誤差の精度を持つ数値計算法であるが、Runge-Kutta 法があらゆる常微分方程式に適用可能な汎用的な解法であるのに対し、シンプレクティック数値解析法はブラックホール時空専用開発されたので、速度が速くなっていることが分かる。また、どちらも光線追跡法に基づいた手法であり、各光線同士は干渉しないという仮定があるために各光線の軌道は独立に計算可能であり、ほぼ使用した CPU の個数に反比例して計算時間が短縮されていることが分かる。なお、キャッシュの疑似共有問題を考慮し、発射方向の全く異なる光線を同時に実行するプロセスに割り当てた実験も行ったが、計算時間は変わらなかった。従って光線追跡の計算時間に比べ、キャッシュメモリへのアクセスは無視できるほど小さいと言える。これは、分散処理を導入した場合に有効に働くことを意味する。

次に計算の精度を比較するために、ハミルトニアン値を測定した結果を図3に示す。一般相対論において光線の運動を表すハミルトニア

¹<http://oposite.stsci.edu/pubinfo/pr/1999/30/index.html>

表 1: 数値解法と対象の方程式の組み合わせ

	Runge-Kuuta 法など	シンプレクティック数値解析法
測地線の方程式	重力場光線追跡法	ありえない
ハミルトンの正準方程式	重力場光線追跡法と同等	シンプレクティック・レイトレーシング

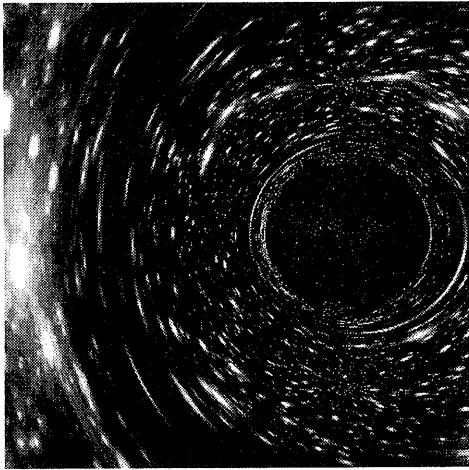


図 4: 銀河の写真の前にブラックホールを配置した場合の可視化例

ンの値はゼロになることが知られており、ハミルトニアン拘束条件と呼ばれ計算の誤差の測定にしばしば使用されている。図 3 では、縦軸がハミルトニアン値、横軸が光線の追跡期間を表す。実線がシンプレクティック・レイトレーシングによる計算結果、一点鎖線が重力場光線追跡法によるものである。重力場光線追跡法による結果は、追跡期間が 2500 回を越えるとハミルトニアン値が急激にマイナス無限大に発散している。これは、局所誤差が蓄積していたことを意味する。シンプレクティック・レイトレーシングによる結果は、ハミルトニアン値はゼロの周辺でごくわずかな揺らぎが見られるが、誤差が蓄積して発散することは無い。

作成画像は図 4 のようになる。中央部の黒い円上の部分にブラックホールが存在する。

6 おわりに

本論文では、球対称のブラックホール時空に対する陽的なシンプレクティック数値解析法を

導き、シンプレクティック数値解析を用いて光線の軌跡を計算し、物体との交差判定をして CG 画像を作成するシンプレクティック・レイトレーシングを紹介した。シンプレクティック・レイトレーシングは、ハミルトニアンが定義できる現象の可視化にしか適用できないという限界がある一方、適用可能な場合には通常の測地線の方程式と Runge-Kutta 法を用いる手法よりも高性能であることを示し、実際に作成した CG 画像を紹介した。現在のところ使用する CPU の個数を増やしても、最終的に 1 本の光線の軌道計算時間よりも速い速度で画像を作成することはできない。しかし従来手法の欠点である、誤差の蓄積が生じないという長所を持つ。

参考文献

- [1] Nollert, H., Kraus, U. and Ruder, H.: Visualization in Curved Spacetimes. I. Visualization of Objects via Four-Dimensional Ray-Tracing, *Relativity and Scientific Computing*, Springer-Verlag Berlin, chapter 16 (1996).
- [2] 山下義行: 相対性理論のコンピュータグラフィックス, 日本物理学会誌, Vol. 53, No. 11, pp. 819-825 (1998).
- [3] Whitted, T.: An Improved Illumination Model for Shaded Display, *Commun. ACM*, Vol. 23, No. 6, pp. 343-349 (1980).
- [4] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: シンプレクティック・レイ・トレーシングによるブラックホールの可視化, 情処全大, No. 2E-3-4, pp. 69-74 (1999).
- [5] 佐藤哲, 岩佐英彦, 竹村治雄, 横矢直和: シンプレクティック・レイ・トレーシング: 曲がった光線によるブラックホールの可視化, 日本応用数理学会 1999 年度会予稿集, pp. 120-121 (1999).
- [6] Yoshida, H.: Construction of Higher Order Symplectic Integrators, *Phys. Lett. A*, Vol. 150, pp. 262-268 (1990).
- [7] 大貫義郎, 鈴木増雄, 柏太郎: 経路積分の方法, 岩波書店, pp. 174-197 (1992).