

不完全 LU 分解前処理付き反復解法におけるオーダリングの新しい評価手法の提案

岩 下 武 史[†] 中 西 佑 一^{††} 島 崎 眞 昭^{††}

クリロフ部分空間反復法の代表的な前処理である不完全 LU 分解前処理は、未知数のオーダリングの影響を受けることが知られている。本論では、オーダリングが前処理効果（反復法の収束性）に与える影響に関する新しい評価手法を提案する。新しい評価指標は Remainder matrix の行列ノルムと相関関係を持つ。ランダムオーダリング、多色順序付け、ブロック化赤 - 黒順序付けによる数値実験により新しい評価手法を検証する。また、数値実験の結果、新しい評価法の有用性ととも、ブロック化赤 - 黒順序付け法の 3 次元問題、非対称問題での有用性を示す。

Proposal of A New Evaluation Method for Ordering in Incomplete LU Factorization Preconditioned Iterative Methods

TAKESHI IWASHITA,[†] YUUICHI NAKANISHI^{††}
and MASAOKI SHIMASAKI^{††}

It is well known that ordering of unknowns greatly affects convergence in Incomplete LU factorization preconditioned iterative methods. The present paper proposes a new evaluation method for effects of ordering on the convergence. The new method is related to the remainder matrix. Numerical tests using random ordering, multi-color ordering and block red-black ordering confirms the effectiveness of the new evaluation method. These tests also show that the block red-black ordering method attains high parallel performance both in a 3-d problem analysis and in a non-symmetric problem analysis.

1. はじめに

連立一次方程式の反復解法に関する重要な技術として不完全 LU 分解 (ILU 分解) 前処理がある¹⁾。不完全 LU 分解前処理はその並列化が困難であるとされ、そのために並列化手法について様々な研究が行われている。そのひとつにリオーダリング手法がある²⁾。これは、解くべき方程式の未知変数を並列処理に適したオーダリングに並べ替える手法で、そのような並列化に適したオーダリングは Parallel ordering (並列オーダリング) と呼ばれている。これまでに、特に差分解を対象として様々なオーダリングが提案されており、有限要素解析等の非構造型の解析への応用も試みられている³⁾。

オーダリングに関する初期の研究において重要なものに Duff, Meurant による研究がある²⁾。彼らは同研究において、ILU 分解前処理付き反復法の収束性がオーダリングの影響を受けることを示し、一般に並列性が高いオーダリングほど収束性が悪いという数値計算結果を示した。この結果は現在「並列オーダリングにおける並列性と収束性のトレードオフ問題」として知られている。また、同研究

では、前処理効果を計る方法として、Remainder matrix $R = M - A$ のマトリクスノルムを用いることを提案し、数値実験により収束性との関連性を確認した。ここで、 M は前処理行列で A は係数行列である。Remainder matrix による前処理効果の評価法は、現在のところそれを否定する報告もされておらず、本論で提案するオーダリング評価法の基本となるものである。

Duff らの研究に続くオーダリングに関する重要な研究として土肥, Lichnewsky, 鷲尾らによる研究があげられる⁴⁾⁵⁾⁶⁾。彼らはまず、オーダリングの評価法としてオーダリンググラフを用いることを提案し、広範囲な数値実験、解析的検討から、グラフ中に Incompatible node が多いほど収束性が悪化することを示した。そして、並列処理のためには、代入計算の開始点としていくつかの Incompatible node が必要なことから、上記のトレードオフに関する説明をはじめて与えた。さらに、オーダリングの定量的評価法として、Incompatible node の全節点に占める比率を表す Incompatibility ratio を提案し、これに基づき具体的な並列オーダリングとして大きな色数による多色順序付けを提案した。同順序付けは、並列度、収束性のバランスの観点で優れており、現在の所、最も優れた並列オーダリングの一つと言える。

このような背景の下で、著者らも新しい並列オーダリングの提案など、オーダリングに関する研究を行ってき

[†] 京都大学学術情報メディアセンター
Academic Center for Computing and Media Studies, Kyoto University

^{††} 京都大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Kyoto University

た⁷⁾ . 其中で, Incompatibility ratio によるオーダリングの評価が不十分な場合があることが分かった . それらの問題点の詳細については後述するが, その一つをあげるならば, Incompatibility ratio では複数のタイプがある Incompatible node を区別せずに扱っている点である . Incompatible node には例えば, x 方向のみに Incompatible な x-incompatible node と x, y 方向に Incompatible な xy-incompatible node があるが, これらの前処理効果に対する影響は同じではない . 従って, これらの区別を考慮したオーダリングの評価法が求められる .

そこで本論では, Remainder matrix の性質に基づいた新しいオーダリングの評価法を提案する . 本評価法をランダムオーダリングに適用し, その有用性を確認する . また, 著者らが提案中のブロック化赤 - 黒順序付け法⁷⁾ について, 数値実験, 新しい評価法に基づき, 3 次元問題, 非対称問題での有効性を示す .

2. 差分解析における不完全 LU 分解前処理

本論文では, 偏微分方程式を 7 点差分公式により離散化し, 得られる連立一次方程式を解く .

未知数の置かれる差分格子として $nx \times ny \times nz$ (それぞれ x 方向, y 方向, z 方向の格子点数) の格子を用い, 各格子点を

$$(i, j, k) \in G = \{(i, j, k) \mid 1 \leq i \leq nx, \\ 1 \leq j \leq ny, 1 \leq k \leq nz\} \quad (1)$$

と表すと, 7 点差分公式は

$$a_{ijk,1}u_{ijk-1} + a_{ijk,2}u_{ij-1k} + a_{ijk,3}u_{i-1jk} \\ + a_{ijk,4}u_{ijk} + a_{ijk,5}u_{i+1jk} + a_{ijk,6}u_{ij+1k} \\ + a_{ijk,7}u_{ijk+1} = f_{ijk} \quad (2)$$

で与えられる . 格子点の総数を $n = nx \times ny \times nz$ とし, 格子点全体 G に対して式 (2) を連立させると, 解くべき方程式として

$$Au = f \quad (3)$$

のような n 元連立一次方程式が得られる . ここで, G 上の未知数 $\{u_{ijk}\}$, 右辺値 $\{f_{ijk}\}$ のベクトル u, f へのマッピングが節点のオーダリング (番号付け, 順序付け) である . 本論では, あるオーダリングに基づいた節点 (i, j, k) の番号を p_{ijk} と表記することとする .

連立一次方程式 (3) を反復解法により解く場合, 前処理¹⁾ と呼ばれる操作がよく用いられる . これは解くべき方程式を

$$(K_1^{-1}AK_2^{-1})(K_2u) = K_1^{-1}b \quad (4)$$

のように変換し, 係数行列の条件数などを改善することにより, 反復解法の収束性を高めるものである . ここで, $M = K_1K_2$ は前処理行列と呼ばれる . 7 点差分公式より得られる係数行列に対する ILU 分解前処理の場合, 前処理行列は,

$$M = LD^{-1}U^T = (L_s + D)D^{-1}(U_s + D) \quad (5)$$

で与えられる . 但し, L_s, U_s はそれぞれ係数行列 A の狭義下三角部分, 狭義上三角部分で, 行列 D は次式を前

進代入計算することにより求められる .

$$D = \text{diag}(A) - \text{diag}(L_s D^{-1}U_s) \quad (6)$$

ここで, $\text{diag}(X)$ は行列 X の対角部分を表す .

$$\text{ILU 分解前処理の適用は, 反復中で前進代入計算} \\ y = L^{-1}r = D^{-1}(r - L_s y) \quad (7)$$

および後退代入計算

$$z = U^{-1}Dy = y - D^{-1}U_s z \quad (8)$$

を行うことで与えられる . オーダリングは, 前処理行列の決定 (6), 代入計算 (7)(8) に影響を及ぼすため, これらの計算の並列実行性や ILU 分解前処理付き反復法の収束性に影響を与える .

3. 新しいオーダリングの評価法

3.1 Remainder matrix, オーダリンググラフ, Incompatibility ratio

本小節では, 反復法の収束性とオーダリングに関する研究の中で, 本論文に関連した重要なものについて述べる .

反復法における前処理効果を定量的に計る方法として, 例えば, 前処理後の係数行列 $K_1^{-1}AK_2^{-1}$ の条件数や固有値分布を調べることが考えられる . しかし, 固有値解析は計算コストが多であるばかりでなく, 節点のオーダリングと固有値について平易な形で相関関係を示すことは困難である . そこで, Duff らが提案した以下の方法が広く用いられている²⁾ .

Duff らによる評価法

$$\text{ILU 分解前処理の効果を Remainder matrix,} \\ R = M - A \quad (9)$$

の行列ノルムにより評価する . ノルムが小さいほど収束性はよい .

Duff らの評価法に基づいてオーダリングと収束性の関連性をより詳細に分析し, 新しいオーダリングの設計のための指標を導入した一連の研究が Doi らによって行われている⁴⁾⁵⁾ . これらの研究では, まず図 1 に示すようなオーダリンググラフを導入した . オーダリンググラフ中の矢印は隣接する節点間の順序を表す . 即ち, 例えば, $p_{ijk} < p_{ijk+1}$ であれば, 節点 (i, j, k) が始点となり, 節点 $(i, j, k+1)$ が終点となる . 次に, Doi, Lichniewsky は Remainder matrix の Stencil 表現を用いた解析から, オーダリンググラフ中の Incompatible node が収束性を悪化させ, 特に対象とする問題の異方性が強い場合, その影響が大きいことを示した . ここで incompatible node とは, x, y, z のいずれかの方向に外向矢印のみを持つ節点である . その一方で, Doi らは Incompatible node が代入計算の並列実行の開始点として必要であることを指摘し, はじめて「オーダリングにおける収束性と並列性のトレードオフ」に説明を与えた . さらに, オーダリンググラフに関する解析に基づいて, 収束性の指標として, Incompatibility ratio R_{ic} を提案した .

Doi らによる Incompatibility ratio による評価法

オーダリンググラフにおいて Incompatibility ratio ,

$$R_{ic} = N_{ic}/N_{icp} \quad (10)$$

が高いほど ILU 分解前処理付き反復法の収束性は悪い . ここで , N_{ic} は Incompatible node 数で , N_{icp} はオーダリンググラフが持ちうる最大の Incompatible node 数で Doi らは , 全体の節点数の半数としている .

Incompatibility ratio はオーダリングの性質をよく表現しており , 著者らの研究でもその有用性は確認されている . しかし , その研究過程で問題点もいくつか明らかになってきた .

3.2 Incompatibility ratio による評価の問題点

まず , 以降の説明を容易にするために幾つかの表記を導入する . 各節点において , ある方向 , 例えば x 方向について , I/O , O/I , O/O , I/I の表記を導入する . これはオーダリンググラフ中のある節点に関する x 方向の矢印の向きを表し ,

$$\begin{aligned} \text{I/O} & : p_{i-1jk} < p_{ijk} < p_{i+1jk} \\ \text{O/I} & : p_{i-1jk} > p_{ijk} > p_{i+1jk} \\ \text{O/O} & : p_{i-1jk} > p_{ijk} < p_{i+1jk} \\ \text{I/I} & : p_{i-1jk} < p_{ijk} > p_{i+1jk} \end{aligned}$$

である . y 方向 , z 方向にも同様の表記を導入し , 各節点について (I/O , I/O , I/O) のように表し , これを節点の I/O 表現とよぶ . この場合 , Incompatible node は , いずれかの方向に O/O の有向グラフを持つ節点である . 1 , ないし 2 方向に O/O となる場合 , その節点は Partially incompatible node と呼ばれ , 3 方向全てに O/O , 即ち (O/O , O/O , O/O) の節点は Fully incompatible node と呼ばれる .

Incompatibility ratio による評価の第一の問題点は , Partially incompatible node と Fully incompatible node を区別していない点である . 実際 , 後述の数値実験が示すようにこれらの収束性に与える影響力は異なる . Doi らの研究において , 本問題が生じなかったのは , 同評価手法が主として多色順序付け法に適用されたためと考えられる . 多色順序付けでは , 境界を除いて Fully incompatible node しか存在しないからである . 次に , 第二の問題点は , Incompatible node のみに着目し , Incompatible node 以外の節点による Remainder matrix の影響を考慮していない点である . この扱いは異方性が強い問題の場合については適切といえるが , そういった場合 , 結合の強い方向の Incompatible node のみが影響を及ぼすので , Incompatible node を一様に扱う Incompatibility ratio による評価にはやはり問題が残る .

そこで , 著者らは上記の問題点を考慮し , 以下のような考えに基づいて , 新しいオーダリングの評価法を提案する . 1. 複数の Incompatible node のタイプを区別して扱えること . 2. Incompatible node 以外の節点による

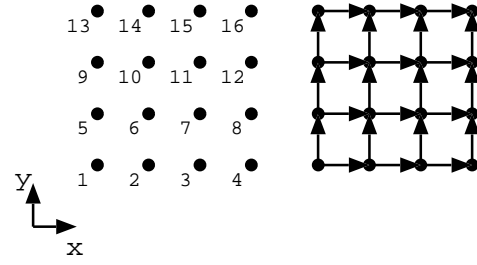


図 1 オーダリンググラフの例 (辞書式順序付け)
Fig.1 Examples of ordering graph (Natural ordering)

Remainder matrix への影響を考慮できること . 即ち , 等方性の問題に対して収束性の指標を提示できること .

3.3 収束性に関するオーダリングの新しい評価法

本小節では , 本論で提案する新しいオーダリングの評価法について述べる .

ここではまず , ILU 分解における Remainder matrix について考える . ILU 分解前処理の場合 , Remainder Matrix は ILU 分解中に無視されたフィルインにより構成される . 即ち , ILU 分解中に $-\tilde{a}_{IJ}$ のフィルインが発生し , これを無視した場合 , Remainder matrix の (I , J) 要素 r_{IJ} は

$$r_{IJ} \leftarrow r_{IJ} + \tilde{a}_{IJ} \quad (11)$$

に更新される .

次に , 7 点差分公式では , (i , j , k) 節点に隣接する 6 つの節点は互いに依存関係を持たないことに注目する . 上記の隣接節点の集合を節点番号を使って ,

$$S_a = \{p_{i-1jk}, p_{i+1jk}, p_{ij-1k}, p_{ij+1k}, p_{ijk-1}, p_{ijk+1}\} \quad (12)$$

と表す . このとき , 節点 p_{ijk} より後の番号を持つ節点の集合

$$S_n = \{p \mid p \in S_a, p > p_{ijk}\} \quad (13)$$

を定義すると , 集合 S_n 内の任意の 2 つの節点 p' , p'' は依存関係がなく , ピボット p_{ijk} に関する分解中に p' 行 p'' 列および , p' 行 p'' 列へのフィルインが発生し , 不完全分解では無視される . このことから以下のことが成り立つ .

差分解析における Remainder matrix の性質

$$\exists p' \in S_n, \exists p'' \in S_n \text{ s.t. } p' \neq p'' \quad (14)$$

ならば , Remainder matrix の p' 行 p'' 列要素 , p' 行 p'' 列要素が式 (11) に従い更新される .

即ち , 簡単のために節点の I/O 表現を使って述べると , (i , j , k) 節点の I/O 表現において O となる隣接節点が 2 つ以上あった場合 , これらの隣接節点間に対応する Remainder matrix の要素に更新が生ずる .

ここで本論では , 最も簡便な評価法として , 上記の Remainder matrix の更新回数に基づいた指標 S.R.I. (Simple Remainder Index) を提案する . 式 (11) における更新量は , 実際には対象となる節点により異なるが , S.R.I. ではこれらを等しく 0.5 とカウントし (r_{IJ} , r_{JI} の更新をあ

表 1 新しい評価法における節点の分類と一節点あたりの S.R.I.
Table 1 S.R.I per node for different types of nodes

	オーダリング グラフ	外向矢印数 l	(S.R.I.) _{/node} ${}_l C_2$
TYPE 0		0	0
TYPE 1		1	0
TYPE 2		2	1
TYPE 3		3	3
TYPE 4		4	6
TYPE 5		5	10
TYPE 6		6	15

わせて 1 とカウントする), 全節点について合計する. 上記の性質より, 各節点における S.R.I. の更新量 (S.R.I.)_{/node} は,

$$(S.R.I.)_{/node} = {}_l C_2 \quad (15)$$

で与えられる. 但し, l は (i, j, k) の関数で, 当該節点についての集合 S_n 内の要素数を表し, その節点の I/O 表現における O の数に等しい. 式 (15) より, S.R.I. は

$$S.R.I. = \sum_{ijk} {}_l(i,j,k) C_2 \quad (16)$$

で与えられる. S.R.I. が小さいほど, 収束性はよい. 表 1 は, S.R.I. による評価法を一つのノード単位についてまとめたものである. 即ち, S.R.I. では, 節点の I/O 表現における O の数により全節点を 7 つのタイプに分類する. また, 各々のタイプの節点はそれぞれ異なる (S.R.I.)_{/node} 値を持つ. S.R.I. では複数の Incompatible node のタイプを区別できる他, Incompatible node 以外の節点による影響も考慮される. また, 表 1 中には示されていないが, 式 (16) は境界面上の節点を含む場合についてもそのまま適用可能である.

S.R.I. と Remainder matrix との関係については, 平方性の媒質を対象としたポアソン (ラプラス) の方程式において, 差分化に際して充分多い節点数を用いた場合, 分解中に無視されるフィルインの各要素はほぼ等しいことから,

$$\|\mathbf{R}\|_A \approx S.R.I. \quad (17)$$

が成り立つ. 但し, $\|\mathbf{R}\|_A$ は行列 \mathbf{R} の各要素の絶対値の和で,

$$\|\mathbf{R}\|_A = \sum_{IJ} |r_{IJ}| \quad (18)$$

で与えられ, 行列ノルムに関する性質を満たす. 評価指標 S.R.I. は, 与えられたオーダリングに対して簡単な整数計算で求めることができ, 新しいオーダリングの設計などに用いることができる.

次に本論では, S.R.I. と比較してより精細な評価指標として, P.R.I. (Precise Remainder Index) を提案する. P.R.I. は, ピボット p_{ijk} に関する不完全 LU 分解中に無視されたフィルインの絶対値和を $S_f(p_{ijk})$ と表すと,

$$P.R.I. = \sum_{p_{ijk}=1}^n S_f(p_{ijk}) \quad (19)$$

で与えられる. P.R.I. は係数行列 \mathbf{A} が対称行列で, その対角要素符号がすべて同一の場合,

$$\|\mathbf{R}\|_A = P.R.I. \quad (20)$$

を満たす. 評価指標 P.R.I. は与えられた問題およびオーダリングに対する収束性の指標を与え, 問題の異方性についても考慮される. Reminder matrix やそのフロベニウスノルムの導出には無視されたフィルインの数に等しいオーダーの記憶容量が必要なのに対し, P.R.I. は ILU 分解中に一つのスカラ変数を用いて計算できる.

P.R.I. は問題, オーダリングの両方が決定された時点で求められるもので, 一般的なオーダリングの良し悪しを判別するには S.R.I. の方が向いている. そこで, 以降では, S.R.I. による評価結果について述べる.

3.4 S.R.I. による解析的検討

ここでは, 新しく提案した評価指標 S.R.I. により, オーダリングに関して知られている性質について考える.

辞書式順序付けは, 概ね最もよい収束性をもつことが経験的に知られている. Doi らは, 同順序付けが Incompatible node を持たないことにより本性質を説明している. ここでは, これを S.R.I. により考える. 辞書式順序付けでは, 境界を除いた全ての節点が表 1 中の Type 3 節点に分類される. ここで, ある節点に関するオーダリンググラフの一つを反転させたとする. このとき, 一つの Type 4 節点と一つの Type 2 節点が新たに生じる. この場合の S.R.I. の増分を考えると, Type 2 節点に対しては -2 となるものの Type 4 節点に対して +3 となるので, トータルで 1 増加する. また, 表 1 中より, このような S.R.I. の増分関係が全ての Type の節点に対して成り立つこと, 即ち, $\Delta S.R.I./node(\text{Type } m \rightarrow \text{Type } m+1) + \Delta S.R.I./node(\text{Type } m \rightarrow \text{Type } m-1) > 0$ が分かる. ここで, $\Delta S.R.I./node(\text{Type } m \rightarrow \text{Type } m+1)$ は Type m の節点が Type $m+1$ に変化した場合の S.R.I. の増分である. 一方, 節点の I/O 表現でみた場合, 全節点の O 数の合計は不変である. これらのことから, あるオーダリングについて, Type 0, 1, 2 の節点と Type 4, 5, 6 の節点を全て Type 3 に変換する操作を考えると, 前者のタイプの節点に対する S.R.I. の増加量よりも後者のタイプの節点に対する S.R.I. の減少量が多いことが分かる. 従って, 辞書式順序付けが最もよい収束性をも

表 2 テスト問題のパラメータ
Table 2 Parameters on sample problems

Case	κ_0	κ_1	v	解析格子
1	1	100	0	100 × 100 × 100
2	1	100	10	129 × 129 × 129

つことが S.R.I. から説明できる。

また、オーダリングの並列度は、代入計算の並列実行開始点で与えられるため、対象格子の角点と Type 6 節点の合計数となる。Type 6 の節点を増加させることは、辞書式順序付けからみた場合、S.R.I. を増加させることになるため、S.R.I. からオーダリングに関する並列性と収束性のトレードオフを説明することができる。

4. 数値実験結果

4.1 テスト問題と実行計算環境

本解析では、次式で与えられる三次元移流拡散方程式の境界値問題をテスト問題とする

$$\begin{aligned}
 &-\nabla \cdot (\kappa \nabla u) + v \cdot \nabla u = f & (21) \\
 &\text{in } \Omega(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \\
 &u(x, y, z) = 0 \text{ on } \delta\Omega \\
 &\text{if } \left(\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} \& \frac{1}{4} \leq y \leq \frac{3}{4}\right) \text{ then} \\
 &\quad \kappa = \kappa_1 \\
 &\text{else } \kappa = \kappa_0
 \end{aligned}$$

ここで f は、節点を辞書式順序付けで並べた場合の節点番号を p として、 $0.5 \sin(p+1)$ であり、 $v = (v, v, v)$ とする。本解析では表 2 に示す二種類の場合を扱う。Case 1 の場合は、移流項がないため問題は対称となるので、ICCG 法により解く。Case 2 の場合は、ILU-BiCGSTAB 法を用いる。収束判定基準として、右辺ベクトルと残差ベクトルの比が 10^{-7} 以下となる条件を用いる。解析は Fujitsu GP-7000F model 900 上で FORTRAN, Open MP を使用して行った。最適化オプションは -O2 を指定した。

4.2 数値実験結果 (S.R.I. と Incompatibility ratio の比較)

本解析では、S.R.I. および Incompatibility ratio と収束性の関係を見るために、Case 1 の場合について、200 個のランダムなオーダリングに対して反復回数を調べた。その結果を図 2, 3 に示す。ここで、図 2 中の Incompatibility ratio は全節点に対する Incompatible node の割合であり、以降の結果についても同様である。Incompatibility ratio による評価の場合、評価値 0.5 となる付近で、反復回数に大きなばらつきが見られる。一方、S.R.I. による評価では、反復回数と S.R.I. の間に相関関係が見られ、Incompatibility ratio に比べてよい評価ができています。

4.3 数値実験結果 (多色順序付け法とブロック化赤 - 黒順序付け法の比較)

本小節では、優れたオーダリングとして知られる多色順序付けと、著者らが提案し、二次元の対称問題で有用

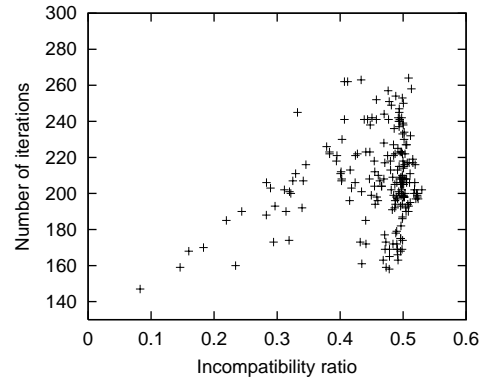


図 2 Incompatibility ratio と反復回数の関係
Fig.2 Relationship between incompatibility ratio and number of iterations

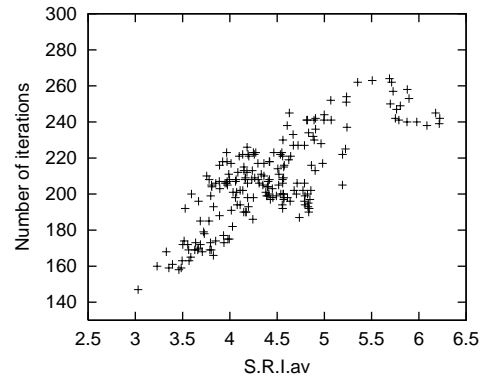


図 3 S.R.I. と反復回数の関係
Fig.3 Relationship between simple remainder index and number of iterations

性が確認されているブロック化赤 - 黒順序付け⁷⁾の比較を行う。多色順序付け法の結果では、実装において間接アドレッシングを用いた場合を示す。これは、文献 6) に示されたベクトル計算機向けの実装と比べ、実際の数値解析による計算速度結果が良好であったためである。

表 3 に Case 1, Case 2 における両手法の反復回数, Incompatibility ratio (R_{ic}), 一節点あたりの S.R.I. の平均値 ($S.R.I_{.av}$) の比較を示す。両者の比較において、ブロック化赤 - 黒順序付けは全体的に高い Incompatibility ratio 値をもつが、S.R.I. 値は低いかないし同程度で、実際の反復回数においても有利であることがわかる。例えば、Case 1 においてブロックサイズを $5 \times 5 \times 5$ とした場合、全体のほぼ 4 分の 1 が Incompatible node になるが、そのほとんどが Partially incompatible node であるために S.R.I. 値は低く、収束性は高い。これらの結果から、Partially incompatible node と Fully incompatible node を区別できる S.R.I. による評価法の有効性がわかる。また、紙面の都合により導出過程は省略するが、境界面の影響を無視した場合の両手法の R_{ic} , $S.R.I_{.av}$ を以下に示す。 m ($m > 1$) 色順序付け法では、

$$R_{ic} = 1/m \quad (22)$$

$$S.R.I_{.av} = 3 + 9/m \quad (23)$$

で与えられ、ブロック化赤 - 黒順序付け法 (ブロックサイ

表 3 多色順序付け法とブロック化赤 - 黒順序付け法の比較

Table 3 Comparison between multi-color ordering and block red-black ordering
Case 1

	辞書式 順序付け	多色順序付け (色数)				ブロック化赤 - 黒順序付け (ブロックサイズ)			
		3	11	33	99	5 × 5 × 5	10 × 10 × 10	25 × 25 × 25	50 × 50 × 50
反復回数	134	188	155	147	146	146	137	141	133
R_{ic}	0	0.33	0.09	0.03	0.01	0.24	0.14	0.06	0.03
$S.R.I._{av}$	3.00	6.00	3.82	3.32	3.13	3.42	3.18	3.06	3.03

Case 2

	辞書式 順序付け	多色順序付け (色数)				ブロック化赤 - 黒順序付け (ブロックサイズ)			
		2	8	32	128	2 × 2 × 2	8 × 8 × 8	32 × 32 × 32	64 × 64 × 64
反復回数	135	212	153	139	136	166	144	142	129
R_{ic}	0	0.50	0.13	0.03	0.01	0.44	0.16	0.05	0.02
$S.R.I._{av}$	3.00	7.50	4.13	3.28	3.07	4.50	3.23	3.05	3.02

表 4 計算結果 (Case 1)

Table 4 Computational results (Case 1)

(a) 辞書式順序付けによる計算結果

計算時間 (sec)
176

(b) 多色順序付け (計算時間 (sec))

色数	プロセッサ数				
	1	2	4	8	16
3	340	169	88	43	22
11	325	164	79	39	20
33	275	137	69	34	18
99	250	124	62	31	16

(c) ブロック化赤 - 黒順序付け (計算時間 (sec))

ブロック サイズ	プロセッサ数				
	1	2	4	8	16
5 × 5 × 5	251	154	80	38	18
10 × 10 × 10	211	106	52	25	11
25 × 25 × 25	197	97	47	23	11
50 × 50 × 50	179	86	41	-	-

表 5 計算結果 (Case 2)

Table 5 Computational results (Case 2)

(a) 辞書式順序付け

計算時間 (sec)
767

(b) 多色順序付け (計算時間 (sec))

色数	プロセッサ数				
	1	2	4	8	16
2	1547	780	403	202	101
8	1363	692	347	183	90
32	1330	690	345	190	96
128	1166	564	287	141	76

(c) ブロック化赤 - 黒順序付け (計算時間 (sec))

ブロック サイズ	プロセッサ数				
	1	2	4	8	16
2 × 2 × 2	1773	1310	743	424	205
8 × 8 × 8	1152	580	304	158	82
16 × 16 × 16	1032	490	267	125	68
64 × 64 × 64	833	419	217	-	-

ズ: $nb \times nb \times nb$) では

$$R_{ic} = 3/2nb - 3/2nb^2 + 1/2nb^3 \quad (24)$$

$$S.R.I._{av} = 3 + 3/2nb + 3/nb^2 \quad (25)$$

で与えられる。式(23)(25)より, S.R.I. による評価では, $m = nb > 1$ の場合, ブロック化赤 - 黒順序付けの方が高い収束性をもつ。また, 収束性がよいとされる 32 色順序付けと同等以上の収束性を得るには, ブロックサイズを $7 \times 7 \times 7$ 以上にすればよい。

次に, 表 4, 5 に Case 1, Case 2 の場合について, 計算時間の比較を示す。両手法とも, 色数およびブロックサイズを増加させた場合, 収束性が改善し, 計算時間が短縮されている。但し, Case 1, Case 2 とともに, 最良の結果は 16CPU におけるブロック化赤 - 黒順序付け法で得られている。これらの結果は, ブロック化赤 - 黒順序付け法のもつ利点である高い収束性, 少ない同期点, 高いキャッシュデータ利用性が三次元問題, 非対称問題についても有効であることを示すものである。

5. おわりに

ILU 分解前処理付き反復法における収束性に関するオーダリングの新しい評価法を提案した。3 次元差分問題を対象とした数値実験により本手法の有効性を確認した。ま

た, 著者らが提案中のブロック化赤 - 黒順序付け法について, 3 次元問題, 非対称問題における有効性を新しい評価法, 数値実験により示した。

参 考 文 献

- 1) J. J. Dongarra, I. S. Duff, D. C. Sorensen and H. A. van der Vorst, "Solving Linear Systems on Vector and Shared Memory Computers," SIAM, (1991).
- 2) I. S. Duff and G. A. Meurant, "The Effect of Ordering on Preconditioned Conjugate Gradients, BIT, 29, (1989), pp.635-657.
- 3) T. Iwashita and M. Shimasaki, "Algebraic multi-color ordering for parallelized ICCG solver in finite element analyses," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 38, (2002), pp. 429-432.
- 4) S. Doi and A. Lichnewsky, "A Graph-Theory Approach for Analyzing the Effects of Ordering on ILU Preconditioning," INRIA report 1452, (1991).
- 5) S. Doi and T. Washio, "Ordering Strategies and Related Techniques to Overcome the Trade-off Between Parallelism and Convergence in Incomplete Factorization", *Parallel Computing*, 25, (1999), pp. 1995-2014.
- 6) T. Washio and K. Hayami, "Overlapped Multicolor MILU Preconditioning," *SIAM Journal of Scientific Computing*, 16, (1995), pp. 636-650.
- 7) 岩下 武史, 島崎 真昭; 「同期点の少ない並列化 ICCG 法のためのブロック化赤 - 黒順序付け」, 情報処理学会論文誌, Vol.43 No. 4, (2002), pp. 893-904.