2008－HPC－118 (17)
2008／12／17

微分可能な精度保証された Taylor 級数

舘野 裕文, 平山 弘
神奈川工科大学工学研究科

精度保証された Taylor 級数の微分が可能になることで初期値問題などの精度保証解をより狭くすることができる。本稿では微分可能な精度保証された Taylor 級数を定義し、Taylor Model や柏木の剰余項形式を微分可能な剰余項形式に拡張する。また、剰余項を Taylor 級数とした形式を提案する。

Guaranteed Accuracy and Differentiable Taylor series

Hirofumi Tateno, Hiroshi Hirayama
Graduate School of Engineering, Kanagawa Institute of Technology

We can get narrow solution for problems of ODEs if guaranteed accuracy Taylor series can differentiate. In this paper, guaranteed accuracy and differentiable Taylor series is defined and Taylor model and Kashiwagi's form extend differentiable form. We propose remainder term that is Taylor series.

1. はじめに

区間演算[1]による解法では Wrapping Effect が発生し、解の区間が大きく広がることが知られている。精度保証された Taylor 級数はこれを抑えることができ、関数の最大最小値[4]や、常微分方程式の初期値問題、境界値問題の精度保証された解を求める有用な方法である。

精度保証された Taylor 級数の研究としては Taylor Model[2]や柏木の研究[3]などがある。これらは Lagrange の剰余項による方法に比べ狭い区間を得ることができる。しかし、これらの形式は Lagrange 形式で可能な微分演算を行うことができない。

精度保証された Taylor 級数の微分が可能になることで初期値問題などの精度保証解をより狭めることが可能となる。

本稿では精度保証された Taylor 級数を微分可能な形に拡張する。その実現手段として先の形式の他に剰余項を Taylor 級数とした形式を提案する。

2. 精度保証された Taylor 級数の形式

区関数を $[I]=[\underline{I},\overline{I}]$ と表現とする。Taylor 級数は定義域を制限することで精度保証を行うことができる。精度保証された Taylor 級数 $\tilde{y}(x)$ とは、定義域を $[I]$ とし、$a(\in[I])$ を中心とした Taylor 級数 $y(x)$ に対して、n 次までの係数が等しく、$n+1$ 次以降の剰余項 $R_n(x)$ を包含する区間関数 $\tilde{R}_n(x)$ によって、常に Taylor 級数 $y(x)$ を包含している Taylor 級数とする。

本稿では Taylor 級数の n 次より高い次数の項を剰余項に組み込む操作を『n 次に丸める』と呼ぶ。また、Taylor 級数の i 次から j 次までを以下のようにする。

$$y_{i,j}(x)=\sum_{k=i}^{j}\frac{y^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Taylor 級数 $y(x)$ は次のように表され、

$$y(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{y^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i=\sum_{i=0}^{\infty}y_i(x-a)^i$$
$$=y_{0,n}(x)+R_n(x)$$

Taylor 級数 $\tilde{y}(x)$ は次のように表される。

$$\tilde{y}(x)=y_{0,n}(x)+\tilde{R}_n(x) \qquad x\in[I]$$
$$y(x)\subseteq\tilde{y}(x)$$
$$R_n(x)\subseteq\tilde{R}_n(x),\quad a\in[I]$$

m 回微分した $y(x)$ を $n-m$ 次で表すと

$$\frac{d^m}{dx^m}y(x)=\left(\sum_{i=0}^{n-m}\frac{y^{(i+m)}(a)}{i!}(x-a)^i\right)+\frac{d^m}{dx^m}R_n(x)$$

となる。精度保証した際に m 回までの微分を可能にするためには各回数微分された剰余項を与える必要がある。剰余項の各微分をベクトル化したものを次のように与える。

$$\mathbf{R}(x)=\begin{pmatrix}r_0(x) & r_1(x) & \cdots & r_m(x)\end{pmatrix}$$
$$r_i(x)=\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}R_n(x) \quad (i=0,\cdots,m)$$

$\mathbf{R}(x)$ を用いて Taylor 級数 $y(x)$ を次のように表現する。

$$y(x)=\left\langle y_{0,n}(x),\mathbf{R}(x)\right\rangle$$

Taylor 級数 $\tilde{y}(x)$ が以下を満たせば、微分可能な精度保証された Taylor 級数となる。

$$\tilde{y}(x)=\left\langle y_{0,n}(x),\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle$$
$$\tilde{\mathbf{R}}(x)=\begin{pmatrix}\tilde{r}_0(x) & \tilde{r}_1(x) & \tilde{r}_2(x) & \cdots & \tilde{r}_m(x)\end{pmatrix} \quad (1)$$
$$r_i(x)\subseteq\tilde{r}_i(x) \quad (i=0,\cdots,m)$$

計算機では、$y_{0,n}(x)$ には数値表現による誤差のみが含まれ、区関演算を用いることで真の係数値を包含する係数を求めることができる。しかし、$\tilde{\mathbf{R}}(x)$ には数値表現による誤差以外に打切り誤差が含まれる。よって、剰余項を表す区間関数ベクトル $\tilde{\mathbf{R}}(x)$ をどのような形式で表現するかが問題となる。

多変数での Taylor 級数の場合、係数は各次数でのテンソルになり、演算については基本的に一変数の場合と同様の定義ができる。

3. 剰余項の形式

3. 1. Lagrange 形式

Lagrange の剰余項は ξ が a から x までの間において

$$R_n(x)=\frac{y^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

である。よって Lagrange の剰余項によって精度保証された Taylor 級数 $\tilde{y}(x)$ は

$$y(x)\subset\tilde{y}(x)=y_{0,n}(x)+\tilde{R}_n(x)$$
$$R_n(x)\subseteq\tilde{R}_n(x)=\frac{y^{(n+1)}([I])}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

となる。微分した Taylor 級数 $y(x)$ を $n-1$ 次で精度保証した Taylor 級数は

$$\frac{d}{dx}y(x)\subset\tilde{y}^{(1)}(x)$$
$$\tilde{y}^{(1)}(x)=\frac{d}{dx}y_{0,n-1}(x)+\frac{y^{(n+1)}([I])}{n!}(x-a)^n$$

であるから、

$$\tilde{y}^{(1)}(x)=\frac{d}{dx}\tilde{y}(x)$$

となる。よって、Lagrange 形式は剰余項付きで微分可能である。この形式では $n+1$ 次以降を剰余項は $n+1$ 次の係数として振舞う。本稿では計算次数を合わせるため、Lagrange 形式のみ $n+1$ 次以降を剰余項とした場合を $n+1$ 次での精度保証とする。

3. 2. 微分不可能な剰余項形式

Taylor model での剰余項 ${}_T\tilde{R}_n(x)$ は剰余項の値域を包含する区間数を求め、

$${}_T\tilde{R}_n(x)=y_{n+1,\infty}([I])$$

としている。柏木の方法では剰余項${}_K\tilde{R}_n(x)$を計算次数の最高次に剰余項を合わせ、n次での区間数係数としている。

$$ {}_K\tilde{R}_n(x) = {}_K y([I])(x-a)^n, \quad {}_K y(x) = \frac{y_{n+1,\infty}(x)}{(x-a)^n} $$

これらの形式はLagrange形式とは違い、剰余項付きで精度保証された微分をできない。しかし、Lagrange形式よりも狭い区間を求めることができる。微分を考えず剰余項がn次のTaylor級数の場合は、級数部と剰余項部を一つにすることができる。

3. 3. 微分可能な剰余項形式への拡張

式(1)で示した微分可能な剰余項形式に拡張する。Taylor Modelを拡張した${}_T\tilde{\mathbf{R}}(x)$は、${}_T\tilde{r}_i(x)$が各回数微分された剰余項を包含する区間数となる。柏木の方法を拡張した${}_K\tilde{\mathbf{R}}(x)$での${}_K\tilde{r}_i(x)$は$n-i$次のみのTaylor級数となる。

本稿ではさらにl次のTaylor級数によって剰余項を表す形式${}_{p,l}\tilde{\mathbf{R}}(x)$を考える。これは$l$次より高い次数項は値域を求め、$l$次までのTaylor級数に加えることで剰余項を精度保証したTaylor級数である。ただし、${}_{p,l}\tilde{r}_i(x)$においてlは$n-i$以下が望ましい。求めたl次より高い次数項の値域を、区間を新たな変数して計算することでより狭い区間を得られる可能性がある。他にもAffine arithmetic[6]による方法が考えられる。

Taylor Model、柏木の方法、Taylor級数による形式は共にn次より大きい項について区間多項式の値域を求める必要が、求め方によって区間幅は大きく変わる。区間多項式の値域の求め方としてHorner法やKnuth-Eveの方法[7]、微分値を使う方法などがある。本稿では [8]で提案されている二乗で括ったHorner法を用いて計算をする。この方法で最もよく区間が狭まるのは$[I]$の範囲が$[-r,r]$の場合である。本稿では精度保証されたTaylor級数の初期段階で、定義域を$[-1,1]$に変換してから演算を行う。

4. 演算の定義

aを中心とした中心位置が同じ微分可能な精度保証されたTaylor級数を

$$ \tilde{f}(x) = \left\langle f_{0,n_f}(x), \tilde{\mathbf{R}}(x) \right\rangle \quad x \in \left[I_f\right] $$
$$ \tilde{g}(x) = \left\langle g_{0,n_g}(x), \tilde{\mathbf{S}}(x) \right\rangle \quad x \in \left[I_g\right] $$

とする。$\tilde{f}(x)$、$\tilde{g}(x)$の微分可能回数はそれぞれm_f、m_gとする。

微積分を除く単項演算νは

$$ \nu(f(x)) = h(x) $$
$$ \tilde{h}(x) = \left\langle h_{0,n_h}(x), \tilde{\mathbf{T}}(x) \right\rangle \quad x \in \left[I_h\right] $$
$$ \tilde{\mathbf{T}}(x) = \left(\tilde{t}_0(x) \quad \tilde{t}_1(x) \quad \tilde{t}_2(x) \quad \cdots \quad \tilde{t}_{m_h}(x) \right) $$
$$ h(x) \subseteq \tilde{h}(x) $$
$$ \left[I_h\right] = \left[I_f\right], \quad n_h = n_f, \quad m_h = m_f $$

二項演算μは次のように定義する。

$$ \mu(f(x), g(x)) = h(x) $$
$$ \tilde{h}(x) = \left\langle h_{0,n_h}(x), \tilde{\mathbf{T}}(x) \right\rangle \quad x \in \left[I_h\right] $$
$$ \tilde{\mathbf{T}}(x) = \left(\tilde{t}_0(x) \quad \tilde{t}_1(x) \quad \tilde{t}_2(x) \quad \cdots \quad \tilde{t}_{m_h}(x) \right) $$
$$ h(x) \subseteq \tilde{h}(x), $$
$$ \left[I_h\right] = \left[I_f\right] \cap \left[I_g\right], $$
$$ n_h = \min(n_f, n_g), \quad m_h = \min(m_f, m_g) $$

4. 1. 加減算

加減算$f(x) \pm g(x) = h(x)$は、まず次数を合わせるためにTaylor級数$\tilde{f}(x)$、$\tilde{g}(x)$の次数を低い方の次数に丸める。定義域はTaylor級数$\tilde{f}(x)$、$\tilde{g}(x)$の共通領域$[I_h]$となる。微分可能回数も少ない方に合わせるため、剰余項を少ない方にそろえる。このTaylor級数を${}_a\tilde{f}(x)$、${}_a\tilde{g}(x)$をする。

$${}_a\tilde{f}(x)=\left\langle {}_a f_{0,n_h}(x),\,{}_a\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle \quad x\in[I_h]$$

$${}_a\tilde{g}(x)=\left\langle {}_a g_{0,n_h}(x),\,{}_a\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle \quad x\in[I_h]$$

$${}_a\tilde{\mathbf{R}}(x)=\left({}_a\tilde{r}_0(x)\quad {}_a\tilde{r}_1(x)\quad {}_a\tilde{r}_2(x)\quad \cdots\quad {}_a\tilde{r}_{m_h}(x)\right)$$

$${}_a\tilde{\mathbf{S}}_a(x)=\left({}_a\tilde{s}_0(x)\quad {}_a\tilde{s}_1(x)\quad {}_a\tilde{s}_2(x)\quad \cdots\quad {}_a\tilde{s}_{m_h}(x)\right)$$

例えば、$\tilde{f}(x)$ が次数、微分可能回数ともに高かった場合、以下のようにする。

$${}_a f_i = f_i \quad (i=0,\cdots,n_h)$$

$${}_a\tilde{r}_i(x)=\tilde{r}_i(x)+\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}f_{n_h+1,n_f}(x) \quad (i=0,\cdots,m_h)$$

このTaylor級数の級数部と剰余項部の加減算を行うことで微分可能な精度保証されたTaylor級数の加減算となる。

$$h_{0,n_h}(x)={}_a f_{0,n_h}(x)\pm {}_a g_{0,n_h}(x)$$

$$h_i=f_i\pm g_i \qquad (i=0,\cdots,n_h)$$

$$\tilde{\mathbf{T}}(x)={}_a\tilde{\mathbf{R}}(x)\pm {}_a\tilde{\mathbf{S}}(x)$$

$$\tilde{t}_i={}_a\tilde{r}_i\pm {}_a\tilde{s}_i \quad (i=0,\cdots,m_h)$$

4. 2. 乗算

乗算 $h(x)=f(x)g(x)$ は

$$\begin{aligned}\tilde{h}(x)=&\left\langle f_{0,n_f}(x),0\right\rangle\left\langle g_{0,n_g}(x),0\right\rangle\\&+\left\langle f_{0,n_f}(x),0\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle+\left\langle g_{0,n_g}(x),0\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle\\&+\left\langle 0,\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle\end{aligned}$$

となり、これを個々に計算する。級数部の積を $v(x)$ とすると n_f+n_g 次で厳密に表現できる。$v(x)$ を m_h 次に丸め $\tilde{v}(x)$ とする。

$$v(x)=\left\langle f_{0,n_f}(x),0\right\rangle\left\langle g_{0,n_g}(x),0\right\rangle$$

$$v_i=\sum_{j=0}^{i}f_j g_i \quad (i=0,\cdots,n_f+n_g)$$

$$\tilde{v}(x)=\left\langle v_{0,n_h}(x),\tilde{\mathbf{W}}(x)\right\rangle$$

$$\tilde{\mathbf{W}}(x)=\left(\tilde{w}_0(x)\quad \tilde{w}_1(x)\quad \cdots\quad \tilde{w}_{m_h}(x)\right)$$

$$\tilde{w}_i(x)=\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}v_{n_h+1,n_f+n_g}(x) \quad (i=0,\cdots,m_h)$$

級数部と剰余項の積は、級数部を剰余項の形式に変え、剰余項形式同士の積にする。

$f_{0,n_f}(x)$ の剰余項形式 $\tilde{\mathbf{F}}(x)$ は以下となる。

$$\left\langle f_{0,n_f}(x),0\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle=\left\langle 0,\tilde{\mathbf{F}}(x)\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle$$

$$\tilde{\mathbf{F}}(x)=\left(\tilde{f}_0(x)\quad \tilde{f}_1(x)\quad \cdots\quad \tilde{f}_{m_h}(x)\right)$$

$$\tilde{f}_i(x)=\frac{1}{i!}\frac{d^i}{dx^i}f_{0,n_f}(x) \qquad (i=0,\cdots,m_h)$$

同様に $g_{0,n_g}(x)$ を剰余項形式 $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ に変形する。剰余項形式の積はTaylor級数の積から

$$\left\langle 0,\tilde{\mathbf{U}}(x)\right\rangle=\left\langle 0,\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle\left\langle 0,\tilde{\mathbf{S}}(x)\right\rangle$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(x)=\tilde{\mathbf{R}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)$$

$$\tilde{\mathbf{U}}(x)=\left(\tilde{u}_0(x)\quad \tilde{u}_1(x)\quad \cdots\quad \tilde{u}_{m_h}(x)\right)$$

$$\tilde{u}_i=\sum_{j=0}^{i}\tilde{r}_i(x)\tilde{s}_j(x) \quad (i=0,\cdots,m_h)$$

によって求まる。剰余項形式にした級数部と剰余項の積も同様に計算する。剰余項の各成分の積は微分を考えない精度保証された同形式で行う。

級数部と各剰余項形式の和から乗算を行うことができる。

$$h_{0,n_h}(x)=v_{0,n_h}(x)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}}(x)=&\tilde{\mathbf{W}}(x)+\tilde{\mathbf{F}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)\\&+\tilde{\mathbf{G}}(x)\tilde{\mathbf{R}}(x)+\tilde{\mathbf{R}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)\end{aligned}$$

4. 3. 除算

除算は、4.5.で示す方法で除数の逆数を計算し、被除数との積によって計算する。

4. 4. 微積分

微積分は単項演算だが演算結果は n_f 次ではなく、微分は n_f+1 次、積分は n_f-1 次で精度保証されたTaylor級数となる。微分可能回数も同様に微分は m_f+1 回、積分は m_f-1 回になる。係数関係式は精度保証なしでの演算とほぼ同じとなる。微分は

$$\frac{d}{dx}f(x)=h(x)$$
$$h_i=(i+1)f_{i+1}\quad (i=0,\cdots,n_h)$$
$$\tilde{t}_j(x)=(j+1)\tilde{r}_{j+1}(x)\quad (j=0,\cdots,m_h)$$
$$h(x)\subseteq\tilde{h}(x)$$
$$\left[I_h\right]=\left[I_f\right],\quad n_h=n_f-1,\quad m_h=m_f-1$$

となり、積分は以下のようになる。

$$\int_a^x f(x)dx=h(x)$$
$$h_0=0,\quad h_i=\frac{1}{i}f_{i-1}\quad (i=0,\cdots,n_h)$$
$$\tilde{t}_0(x)=\int_a^x\tilde{r}_0(x)dx,\quad \tilde{t}_j(x)=\frac{1}{j}\tilde{r}_{j-1}(x)\quad (j=0,\cdots,m_h)$$
$$h(x)\subseteq\tilde{h}(x)$$
$$\left[I_h\right]=\left[I_f\right],\quad n_h=n_f+1,\quad m_h=m_f+1$$

4.5. 逆数及び初等関数

逆数及び初等関数の有限次数Taylor級数解は打切り誤差を含む。精度保証されたTaylor 級数演算ではこの誤差を保証する必要がある。この保証方法として Lagrange の剰余項による方法を用いる。Lagrange の剰余項$T_i(x)$は精度保証された Taylor 級数の微分値$\hat{f}_i$を使い求められる。

$$\hat{f}_i=f^{(i)}(\left[I_f\right])\quad (i=0,\cdots,n_f)$$
$$\hat{f}(x)=\hat{f}_0+\hat{f}_1x+\hat{f}_2x^2+\cdots+\hat{f}_{n_f}x^{n_f}$$
$$v(\hat{f}(x))=\hat{h}(x)$$
$$T_i(x)\subseteq\tilde{T}_i(x)=\hat{h}_i(x-a)^i\quad (i=0,\cdots,n_h)$$

$\hat{h}$を求めるときには各演算に合わせたTaylor 級数の係数関係式を当てはめる。例えば、逆数は次のようになる。

$$\hat{h}_0=\frac{1}{\hat{f}_0},\quad \hat{h}_i=-\frac{1}{\hat{f}_0}\sum_{j=0}^{i-1}\hat{h}_j\hat{f}_{i-j}\quad (i=1,\cdots,n)$$

単純に Lagrange の剰余項を当てはめた場合、Lagrange 形式にように区間は大きくなり、多変数の場合に取り扱いにくくもなる。これは Taylor Model で行われている変数変換による方法で抑えられる。$p(x)$による変数変換から以下のようになる。

$$p(x)=\left\langle f_{1,n_f}(x),\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle$$
$$f(x)=\hat{f}(p(x))=f_0+p(x)$$
$$h(x)=\hat{h}(p(x))=v(\hat{f}(p(x)))$$
$$\hat{h}(p(x))=\hat{h}_{0,i-1}(p(x))+\tilde{U}_i(p(x))$$
$$\tilde{U}_i(p(x))=\hat{\hat{h}}_i(p(x))^i\qquad (n_h\le i)$$

$\hat{h}(p(x))$の級数部$\hat{h}_{0,i-1}(p(x))$は各 Taylor 級数演算の係数関係式から、Lagrange 形式の剰余項$\tilde{U}_i(p(x))$は先の方法から求められる。$p(x)$は 1 次で厳密な級数なので$\hat{h}(p(x))$における Lagrange 形式の剰余項の次数はいくらでも高次化可能だが、本稿ではn_h次で止める。$\hat{h}(p(x))$は変数変換なので合成関数を求められる。合成関数の計算では微分可能な精度保証されたTaylor級数演算で行う。

5. 計算例

次のような Taylor 級数を考える。

$$f(x)=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8$$
$$g(x)=2+x+2x^2+x^3+2x^4+x^5+2x^6+x^7+2x^8$$

これを 4 次、2 回微分可能、定義域を[-1,1]、${}_{P,1}\tilde{\mathbf{R}}(x)$による 1 次の Taylor 級数での剰余項による微分可能な精度保証されたTaylor級数で計算する。$f(x)$を度保証された微分可能な Taylor 級数$\tilde{f}(x)$に変形する。

$$\tilde{f}(x)=\left\langle f_{0,4}(x),\tilde{\mathbf{R}}(x)\right\rangle$$
$$f_{0,4}(x)=1+x+x^2+x^3+x^4$$
$$\tilde{\mathbf{R}}(x)=\left(\tilde{r}_0(x)\quad \tilde{r}_1(x)\quad \tilde{r}_2(x)\right)$$
$$\tilde{r}_0(x)=\frac{1}{0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(x^5+x^6+x^7+x^8\right)$$
$$=x^2\left(x^2\left(x+x^2\left(1+x+x^2\right)\right)\right)\Big|_{x=[-1,1]}=\left[-1,4\right]$$
$$\tilde{r}_1(x)=\left[-2,26\right],\quad \tilde{r}_2(x)=\left[-16,74\right]$$

$g(x)$ も同様に微分可能な精度保証された Taylor 級数 $\tilde{g}(x)$ に変形する。

Taylor 級数の積 $\tilde{h}(x)=\tilde{f}(x)\tilde{g}(x)$ を行う。まず、級数部同士の積 $v(x)$ の計算をする。

$$v(x)=f_{0,4}(x)g_{0,4}(x)$$

$$v(x)=2+3x+5x^2+6x^3+8x^4 \\ +6x^5+5x^6+3x^7+2x^8$$

$v(x)$ を微分可能な精度保証された Taylor 級数の形式 $\tilde{v}(x)$ に変形する。

$$\tilde{v}(x)=\left\langle v_{0,4},\tilde{\mathbf{W}}(x)\right\rangle$$

次に、$\tilde{g}(x)$ の級数部を剰余項形式 $\tilde{\mathbf{G}}(x)$ に変形をする。

$$\tilde{\mathbf{G}}(x)=\left(\tilde{g}_0(x)\quad \tilde{g}_1(x)\quad \tilde{g}_2(x)\right)$$

$$\tilde{g}_0(x)=\frac{1}{0!}\frac{d^0}{dx^0}\left(2+x+2x^2+x^3+2x^4\right)$$

$$=2+x+\left\{x^2\left(2+x+2x^2\right)\right\}\Big|_{x=[-1,1]}=\left[-1,6\right]+x$$

$$\tilde{g}_1(x)=\left[-16,40\right]+4x,\quad \tilde{g}_2(x)=\left[-10,117\right]+3x$$

$\tilde{f}(x)$ の級数部も同様にして、$\tilde{\mathbf{F}}(x)$ に変形する。剰余項形式の積 $\tilde{\mathbf{G}}(x)\tilde{\mathbf{R}}(x)$ は

$$\tilde{\mathbf{G}}(x)\tilde{\mathbf{R}}(x)=\tilde{\mathbf{M}}(x)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}(x)=\left(\tilde{m}_0(x)\quad \tilde{m}_1(x)\quad \tilde{m}_2(x)\right)$$

$$\tilde{m}_0(x)=\tilde{g}_0(x)\tilde{r}_0(x)=\left[-7,28\right]+\left[-1,4\right]x$$

$$\tilde{m}_1(x)=\tilde{g}_0(x)\tilde{r}_1(x)+\tilde{g}_1(x)\tilde{r}_0(x) \\ =\left[-30,230\right]+\left[-6,42\right]x$$

$$\tilde{m}_2(x)=\tilde{g}_0(x)\tilde{r}_2(x)+\tilde{g}_1(x)\tilde{r}_1(x)+\tilde{g}_2(x)\tilde{r}_0(x) \\ =\left[-230,886\right]+\left[-27,190\right]x$$

となる。$\tilde{\mathbf{F}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)$、$\tilde{\mathbf{R}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)$ も同様に行い、これらの加算を行うことで

$$\tilde{\mathbf{T}}(x)=\left(\tilde{t}_0(x)\quad \tilde{t}_1(x)\quad \tilde{t}_2(x)\right)$$

$$=\tilde{\mathbf{W}}(x)+\tilde{\mathbf{F}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x) \\ +\tilde{\mathbf{G}}(x)\tilde{\mathbf{R}}(x)\tilde{\mathbf{R}}(x)\tilde{\mathbf{S}}(x)$$

$$\tilde{t}_0(x)=\left[-23,92\right]+\left[-2,10\right]x$$

$$\tilde{t}_1(x)=\left[-192,851\right]+\left[-24,94\right]x$$

$$\tilde{t}_2(x)=\left[-1094,3922\right]+\left[-72,405\right]x$$

となる。よって Taylor 級数の積は

$$\tilde{h}(x)=h_{0,4}+\tilde{\mathbf{T}}(x)$$

$$h_{0,4}=v_{0,4}=2+3x+5x^2+6x^3+8x^4$$

になる。

参考文献

[1] R. E. Moore, Methods and Applications of Interval Analysis, Siam, 1981.

[2] K.Makino, M.Berz, “Remainder Differential Algebras and Their Applications”, Martin Berz, Christian Bischof, George Corliss and Andreas Griewank (eds.) Computational Differentiation: Techniques, Applications, and Tools SIAM, 1996

[3] 柏木 雅英, “Taylor 級数演算とその精度保証付き計算への応用”, 電子情報通信学会技術研究報告, Vol.95, No.296, 1995, pp.1-8.

[4] 市田 浩三, “区間解析による最適化”, 経済経営論叢, Vol.18, No.3, 1983, pp. 1-21

[5] Rall,L. B. , Automatic Differentiation Technique and Applications, Lecture Notes in Computer Science, Vol.120, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1981

[6] Marcus Vincius A. Andrade, Joao L.D. Comba, and Jorge Stolgi, "Affine Arithmetic", INTERVAL’94, St.Ptersburg, 1994

[7] 杉浦正顯、室田 一雄, “数値計算法の数理”, 2 章, 岩波書店, 1994

[8] 宮島 信也、柏木 雅英, “多項式の値域の区間評価について”, 電子情報通信学会技術研究報告 , Vol.102, No.625, 2003, pp. 13-18.