

有限要素法による弾性板を有する室内音場解析に対する BiCG法とCGS法の収束性

奥園健*¹ 大鶴徹*² 藤野清次*³ 富来礼次*² 岡本則子*⁴ Andora Suwisto*¹

*¹大分大学大学院工学研究科

*²大分大学工学部

*³九州大学情報基盤研究開発センター

*⁴大分大学VBL

概要 : 有限要素法による音響振動連成解析に生じる連立一次方程式 $Ax=b$ を対象に、近年、鬼束等により提案された新しい初期シャドウ残差ベクトル r_0^* の設定方法 ($r_0^* = A^T r_0$ あるいは $r_0^* = A^T ran$) を伴う BiCG 法および CGS 法の収束性を示す。ここに、 r_0 は初期残差ベクトル、 ran は乱数である。数値実験を通じた従来の r_0^* の設定方法 ($r_0^* = r_0$ あるいは $r_0^* = ran$) を伴う BiCG 法および CGS 法の収束性との比較により、その有効性を報告する。

Convergence Characteristics of BiCG and CGS Methods for Finite Element Sound Field Analysis of Rooms with an Elastic Plate

*¹Takeshi Okuzono *²Toru OTSURU *³Seiji FUJINO *²Reiji TOMIKU

*⁴Noriko OKAMOTO *¹Andora Suwisto

*¹Graduate School of Engineering, Oita University,

*²Faculty of Engineering, Oita University,

*³Research Institute for Information Technology, Kyushu University,

*⁴Venture Business Laboratory, Oita University,

Abstract : Performance of BiCG and CGS methods with a new setting of initial shadow residual ($r_0^* (r_0^* = A^T r_0$ and $r_0^* = A^T ran)$) proposed by Onituka et al. are presented for vibro-acoustic analysis by FEM. Here, r_0 and ran respectively denote initial residual and random number. Through several numerical experiments, the effectiveness of BiCG and CGS with the new setting of r_0^* is shown by comparing with the results of BiCG and CGS with conventional settings of r_0^* , i.e., $r_0^* = r_0$ and $r_0^* = ran$.

1. はじめに

複雑な形状を有する建築音場の精密な予測には、FEMやBEMのような波動音響学に基づく数値解析が有効である。それら手法の中でもFEMは媒質空気の温度分布や複雑な吸音の処理等が可能な適用範囲の広い手法である。

既報^{1),2),3)}において、筆者等は時間および周波数の両領域においてFEMによる大規模音場解析手法を提示してきた。但し、その適用範囲は室内音場のみを対象としている。

一方、実際の室境界は、例えば壁体が軽量の弾性板で構成される場合、音波の入射により振動を生じる。従って、このような場合、室内音場の精密な予測のためには、室内音場と弾性板の振動場

の音響振動連成問題として取り扱う必要がある。しかしながら、音響振動連成解析は室内音場のみを対象とした解析に比べ、計算コストが増加するため、実用的な建築空間の音場予測は難しい。

同解析は最終的に連立一次方程式 $Ax=b$ の求解に帰着するため、必要記憶容量の低減には反復法の適用が有効である。但し、音響振動連成解析に現れる $Ax=b$ の係数行列 A は複素非対称、かつ、非エルミートな行列となるため、同方程式の効率的な求解には適切な反復法の選定が重要である。

非エルミート行列用の反復法にはBiCG法⁴⁾やCGS法⁵⁾といった解法が提案されている。近年、鬼束等⁶⁾は、BiCG法とCGS法のための新しい初期シャドウ残差ベクトル r_0^* の設定方法を提案した。

これは、 r_0^* にAの転置行列 A^T と初期残差ベクトル r_0 の積($r_0^*=A^T r_0$)、あるいは、 A^T と乱数 ran の積($r_0^*=A^T ran$)を与える方法である。この設定法によれば、従来法($r_0^*=r_0$ あるいは $r_0^*=ran$ とする設定)に比べ収束性の向上が図られると共に、残差ノルムの振動低減に効果的であることが、構造解析、熱交換器の熱解析、流体力学、回路解析から生じた行列を対象に示されている。

本稿では、有限要素法による音響振動連成解析に生じる $Ax=b$ を対象に、この新しい r_0^* の設定方法を伴うBiCG法とCGS法の性能を、数値実験を通して従来法との比較により明らかにする。なお、音響振動連成解析で最も典型的な問題と言える音場-弾性体結合問題を対象とする。

2. FEMによる室内音場解析手法

FEMの一般的な定式化に従い、背後空気層を持つ弾性板が室の一面に設置された系の各系の運動方程式はそれぞれ次式で表される。

$$([K_a]_1 + i\omega[C_a]_1 - \omega^2[M_a]_1)\{p\} - \omega^2[\theta_1^T]\{w\} = \{F\} \quad (1)$$

$$([K_p] + i\omega[C_p] - \omega^2[M_p])\{w\}$$

$$-[\theta_1]\{p\} - [\theta_2]\{p\} = \{0\} \quad (2)$$

$$([K_a]_2 + i\omega[C_a]_2 - \omega^2[M_a]_2)\{p\} - \omega^2[\theta_2^T]\{w\} = \{0\} \quad (3)$$

ここで、 $[M_a]$ 、 $[C_a]$ 、 $[K_a]$ はそれぞれ音場に関する質量、減衰、剛性行列、 $[M_p]$ 、 $[C_p]$ 、 $[K_p]$ はそれぞれ振動場に関する質量、減衰、剛性行列を表す。また、 $\{p\}$ は音圧振幅ベクトル、 $\{w\}$ は板の振動変位、 ω は角周波数、 $\{F\}$ は外力ベクトル、 $[\theta_1]$ 、 $[\theta_2]$ は音場と弾性板の結合行列である。

音場の減衰行列 $[C_a]$ は局所作用の仮定に従い以下のように構成している。

$$[C_a] = \frac{1}{c} \int_{s_n} \frac{1}{z_n} \{N\} \{N\}^T dS \quad (4)$$

ここで c は音速、 z_n は材表面のノーマルインピーダンス比、 $\{N\}$ は内挿関数である。

一方、弾性板の減衰行列 $[C_p]$ は構造減衰を仮定し構成した。

$$[C_p] = \frac{\eta}{\omega} [K_p] \quad (5)$$

ここで、 η は損失係数である。

さらに(1)~(3)式をまとめると以下の式を得る。

$$\left(\begin{bmatrix} [K_a]_1 & 0 & 0 \\ -[\theta_1] & [K_p] & -[\theta_2] \\ 0 & 0 & [K_a]_2 \end{bmatrix} + i\omega \begin{bmatrix} [C_a]_1 & 0 & 0 \\ 0 & [C_p] & 0 \\ 0 & 0 & [C_a]_2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} p \\ w \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

$$-\omega^2 \begin{bmatrix} [M_a]_1 & [\theta_1]^T & 0 \\ 0 & [M_p] & 0 \\ 0 & [\theta_2]^T & [M_a]_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ w \\ p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上記の $Ax=b$ を解くことで、2つの音場の音圧 $\{p\}$ および板の振動変位 $\{w\}$ が求められる。

ここで、(6)式の $Ax=b$ の係数行列 A は複素非対称、かつ、非エルミートな疎行列となる。本稿では、係数行列の数値的特徴を考慮し、(6)式の解法にBiCG法とCGS法を適用する。また、前処理には対角スケールリングを施す。なお、同解析に生じる $Ax=b$ の A は複素行列となるため、 r_0^* の設定では A^T の代わりに A^H を使用する。

3. 数値実験

3.1 FE解析の対象と設定

Fig. 1に示す背後空気層を有する弾性板が壁面の一部に設置された試験室(容積:約50m³)を対象とする。

検討対象とする周波数を88~221Hzの1Hz刻みとし、Fig. 1の室隅に位置する点音源Sにおいて体積加速度 $l\omega_0=1.0 \text{ m}^3/\text{s}^2$ を与えた。

壁面の吸音条件として室内全壁面にコンクリート壁に相当する音響インピーダンスを与えた。また、背後空気層は完全剛とした。さらに弾性板は12mm厚のアルミニウム板とし、境界条件は四辺単純支持である。

音響要素、板要素にはそれぞれ8節点6面体要素、ACM要素を使用する。なお、Table 1に示すように解析周波数に応じて空間分解能の異なる2 Typeのメッシュを使用する。即ち、88~141Hzの解析ではType Aでのメッシュを、142~221Hzの解析ではType Bのメッシュをそれぞれ使用する。Table 2にアルミニウム板の材料定数を示す。

3.2 反復法の収束判定基準

BiCG法とCGS法の反復演算を停止するため、以下の相対残差ノルム δ_n を定義する。

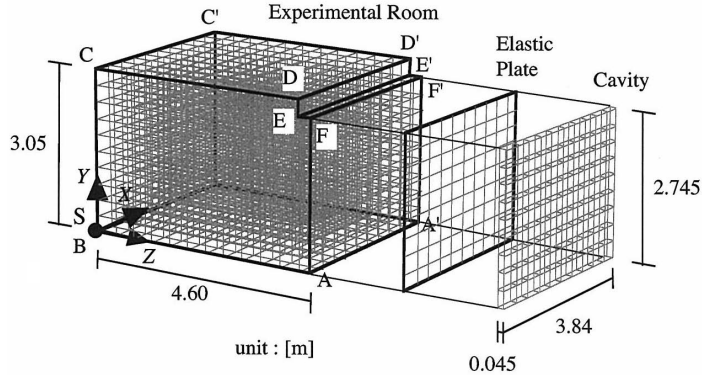


Fig. 1 Schematic drawing of the room with an elastic plate backed by a cavity.

Table 1 Setting of FE-analysis

Type of FE-mesh	System	Degrees of freedom	Max. length of elements [m]
A (88~141 Hz)	Room	18,603	0.1525
	Elastic plate	1,359	0.1525
	Cavity	1,026	0.1525
B (142~221 Hz)	Room	81,713	0.096
	Elastic plate	1,517	0.096
	Cavity	3,034	0.096

Table 2 Material constants of an elastic plate

Elastic plate	Density[kg/m ³]	Young's modulus[N/m ²]	Poisson's ratio	Loss factor
Aluminum	2.7x10 ³	7.0x10 ¹⁰	0.345	1.0x10 ⁻⁵

$$\delta_n = \frac{\| \{r_n\} \|_2}{\| \{b\} \|_2} = \frac{\| [A] \{x_n\} - \{b\} \|_2}{\| \{b\} \|_2} \quad (7)$$

ここで、 $\{r_n\}$ 、 $\{x_n\}$ はそれぞれ反復 n 回目の残差、近似解である。さらに δ_n を用いて以下の収束判定基準により反復演算を停止する。

$$\delta_n \leq stop_tol \quad (8)$$

あるいは、

$$nth\ iterations = maxit \quad (9)$$

ここで、 $stop_tol$ 、 $maxit$ はそれぞれ収束判定値、最大反復回数である。ここでは $stop_tol$ 、 $maxit$ をそれぞれ 10^{-9} 、総自由度数と設定した。

3.3 結果と考察

Fig. 2にBiCG($r_0^* = A^H r_0$)とBiCG($r_0^* = r_0$)の反復回数を比較して示す。両解法ともに全ての周波数に

おいて収束した。また、全周波数でBiCG($r_0^* = A^H r_0$)の反復回数は、BiCG($r_0^* = r_0$)より少なく、 $r_0^* = A^H r_0$ とする設定は従来法より有効である。なお、BiCG($r_0^* = A^H r_0$)及びBiCG($r_0^* = r_0$)は全周波数で最大反復回数までに収束しなかった。

CGS($r_0^* = A^H r_0$)とCGS($r_0^* = r_0$)の反復回数の比較をFig. 3に示す。BiCG法同様、両解法共に全周波数において収束した。また、CGS($r_0^* = A^H r_0$)はほとんどの周波数において従来法より速く収束している。 $r_0^* = A^H r_0$ とする設定は従来法より効果的と言える。なお、CGS($r_0^* = A^H r_0$)とCGS($r_0^* = r_0$)は全周波数で発散した。

BiCG法とCGS法を比較すると、BiCG法はCGS法より全周波数において速く収束し、BiCG($r_0^* = A^H r_0$)が最速であった。

ここで、 $r_0^* = A^H r_0$ および $r_0^* = A^H r_0$ を使用した場

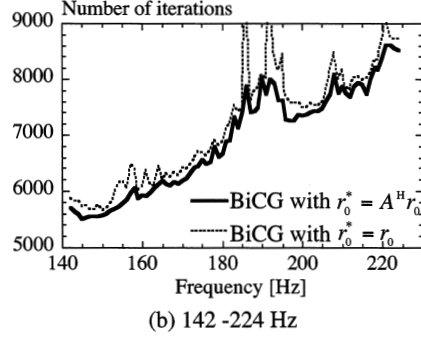
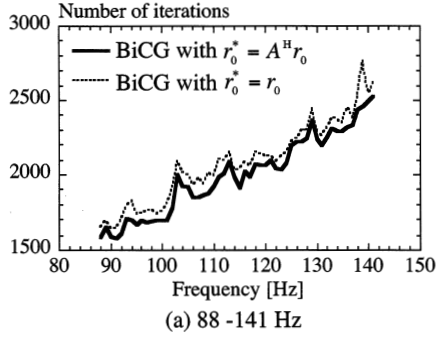


Fig. 2 Comparisons of number of iterations between BiCG with $r_0^* = A^H r_0$ and BiCG with $r_0^* = r_0$.

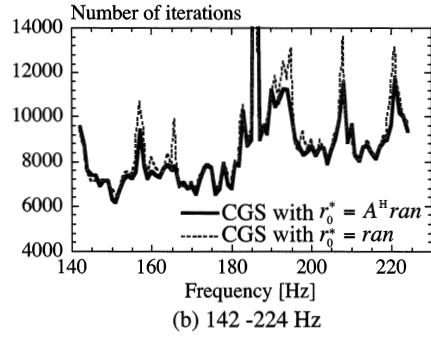
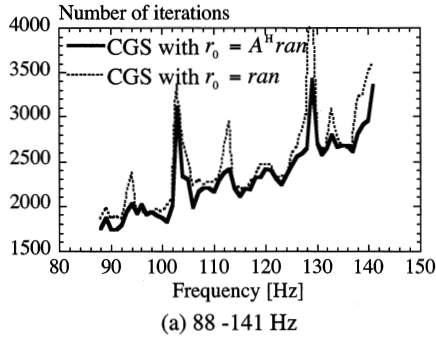


Fig. 3 Comparisons of number of iterations between CGS with $r_0^* = A^H ran$ and CGS with $r_0^* = ran$.

合の反復回数の低減効果を以下の式により定量的に評価する。

$$\text{R.O.N.} = \frac{(N_{\text{conv.}} - N_{\text{new}})}{N_{\text{conv.}}} \quad (10)$$

ここで、 $N_{\text{conv.}}$ は従来法 (BiCG($r_0^* = r_0$), CGS($r_0^* = ran$)) の反復回数、 N_{new} はBiCG($r_0^* = A^H r_0$), CGS($r_0^* = A^H ran$)の反復回数である。

Fig. 4にBiCG法とCGS法に対するR.O.N.の値を示す。BiCG法では、0.2~16.0%の低減効果が得られている。特に、139, 186, 192 Hzでは10%以上の低減効果を得た。一方、CGS法ではR.O.N.の値は-16.0~24.2%の範囲に存在している。186Hzでは16%程度反復回数が増加しているが、特に、129, 166, 195 Hzでは20%以上の低減効果が得られている。

最後に、残差ノルムの振動低減効果を確認する。Fig. 5に特に反復回数を低減した周波数を含む126, 139, 186 HzでのBiCG($r_0^* = r_0$)とBiCG($r_0^* = A^H r_0$)の収束履歴を比較して示す。周波数によらずBiCG($r_0^* = A^H r_0$)の収束履歴は、

BiCG($r_0^* = r_0$)の収束履歴に比べ、相対残差ノルムの振動が小さく、残差ノルムの振動低減効果が確認できる。また、初期の反復に着目すると、BiCG($r_0^* = A^H r_0$)の相対残差ノルムの値は、BiCG($r_0^* = r_0$)の値より小さい。

CGS($r_0^* = ran$)とCGS($r_0^* = A^H ran$)の129, 186, 195 Hzでの収束履歴をFig. 6に示す。CGS($r_0^* = A^H ran$)の収束履歴はCGS($r_0^* = ran$)より、相対残差ノルムの振動が低減されており、初期の反復での相対残差ノルムの値もより小さい。

4. おわりに

FEMによる音響振動連成解析に生じる連立一次方程式を対象に、 $r_0^* = A^H r_0$ あるいは $r_0^* = A^H ran$ を伴うBiCG法とCGS法の性能を示した。従来法との比較から、 $r_0^* = A^H r_0$ を伴うBiCG法と $r_0^* = A^H ran$ を伴うCGS法は従来法より効果的に連立一次方程式を求解できることが示された。

本研究の一部は科学研究費補助金 (基盤研究 (A)(1)19206062, 代表者大鶴徹) によった。本研

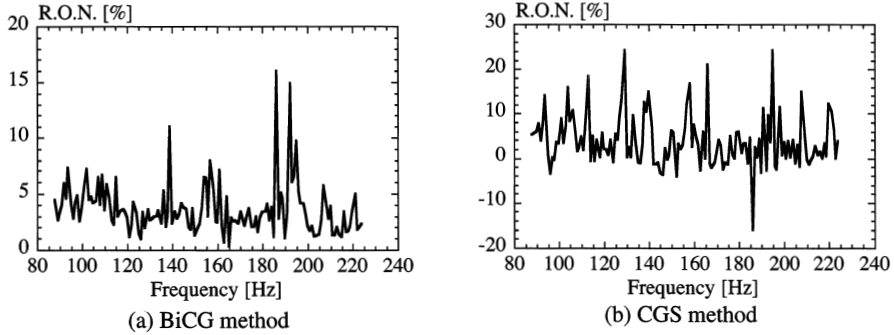


Fig. 4 Improvement effects by using new settings of r_0^* .

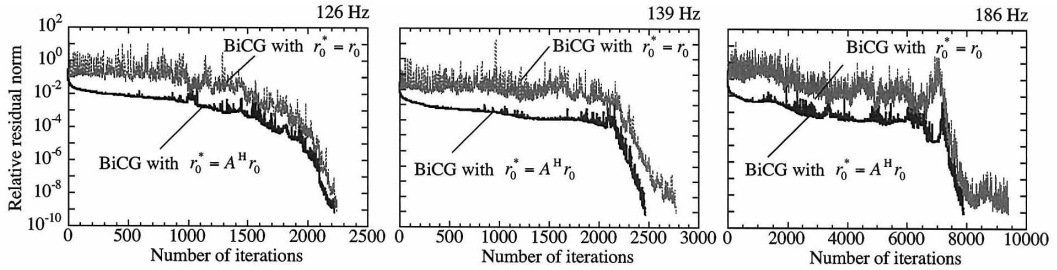


Fig. 5 Convergence histories of relative residual 2-norm of BiCG with $r_0^* = A^H r_0$ and BiCG with $r_0^* = r_0$.

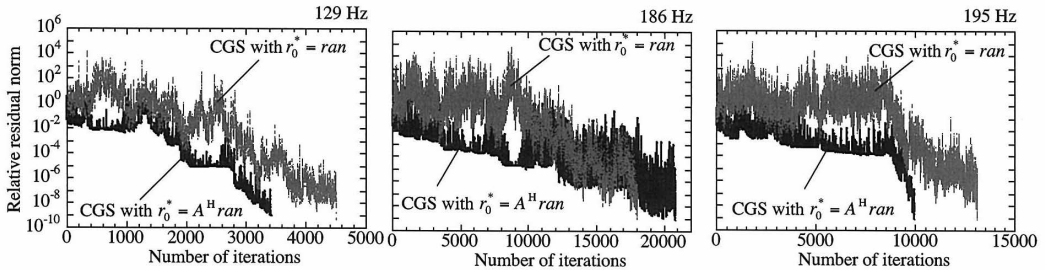


Fig. 6 Convergence histories of relative residual 2-norm of CGS with $r_0^* = A^H r_0$ and CGS with $r_0^* = r_0$.

究は主に、九州大学情報基盤研究開発センターの研究用計算機を利用した。

参考文献

- 1) T. Otsuru, Y. Uchinoura, R. Tomiku, N. Okamoto and Y. Takahashi, Basic concept, accuracy and application of large-scale finite element sound field analysis of rooms, *Proceedings of ICA*, I 479-482, 2004.
- 2) N. Okamoto, R. Tomiku, T. Otsuru and Y. Yasuda, Numerical analysis of large-scale sound fields using iterative methods part II : application of krylov subspace methods to finite element analysis, *Journal of Computational Acoustics*, **15**(4), 473-493, 2007.
- 3) T. Okuzono, T. Otsuru, N. Okamoto, R. Tomiku and T. Sueyoshi, Time domain finite element sound field analysis of rooms using iterative methods and parallelization, *Proceedings of Inter-noise 2006*, Published by CD-ROM, 2006.

- 4) Fletcher, R., *Conjugate Gradient Methods for Indefinite Systems*, Lecture Notes in Mathematics No.506, (1976), 73-89.
- 5) Sonneveld, P., A Fast Lanczos-type solver for Nonsymmetric Linear Systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **10**, (1989), 36-52.
- 6) T. Onituka, Moethuthu, K. Abe, Y. Onoue and S. Fujino, Convergence enhancement of BiCG and CGS methods utilizing initial shadow residual r_0^* give as power of A^T , *JSIAM*, 2008.