

時間領域差分法を用いた流速場における超音波過渡伝搬解析

高橋 慎矢, 村松 和弘, 木本 晃
佐賀大学大学院工学系研究科

非接触で測定可能であるなどの特長を有する超音波流量計の数値解析法を確立するため、時間領域差分法を用いた流速場における超音波過渡伝搬解析について検討した。まず、一次元モデルを用いて、所望の解析精度を得るために必要な空間・時間分解能について検討した。次に、流れが無い矩形管路中の超音波の三次元過渡伝搬解析と実験を比較することにより、超音波素子のモデリング方法について検討した。最後に、流速場の考慮にセミ・ラグランジュ座標系を適用し、超音波流量計を模擬したモデルの解析と実験の比較を行ない、伝搬時間については解析と実験で一致したが、振幅については一致せず、さらに詳細な検討が必要であることがわかった。

3D Transient Analysis of Ultrasonic Propagation in Flow Field Using Finite Difference Time Domain Method

Shinya Takahashi, Kazuhiro Muramatsu, and Akira Kimoto
Department of Electrical and Electronic Engineering, Saga University

A 3D transient analysis of ultrasonic propagation in flow fields using the finite difference time domain method is investigated. First, the effect of the resolution of the discretization of space and time on the accuracy is examined using a simple 1D model. Next, the method of modelling of transducer is investigated in 3D transient analysis of the ultrasonic propagation in the air without flow surrounded by the rectangular pipe. Finally, the 3D transient analysis of a model of an ultrasonic flow meter is carried out taking account of flow field by the semi-Lagrange coordinate system. In this model, although both calculated and measured propagation times are good agreement with each other, the amplitude of output waveform obtained from calculation cannot represent measured one.

1. はじめに

超音波は、およそ 20kHz 以上の音波であり、距離、温度、および流量などの計測を、非接触で行うことができ、指向性が高く、高解像度で、また測定レンジも他の測定法に比べ広いため、現在、様々な計測に利用されている^[1]。これら超音波を用いた計測システムを開発・設計する際、これまで、測定対象の物理量によって変化する伝搬時間を用いた解析式を利用する方法^[1]や、数値解析法を用いる場合には、音を粒子と仮定しその軌跡を追跡するレイ・トレーシング法^[2]などが用いられてきた。しかしながら、これらの方法では超音波の波としての性質を考慮しておらず、詳細な設計手段として用いるには限界があると思われる。波の物理現象を考慮できる数値解析法としては、有限要素法(FEM)、境界要素法(BEM)、時間領域差分法(FDTD 法)^[3-5]などがある。超音波計測の解析では、超音

波の波長が短いと高い空間分解能が要求され、また、測定対象の物理量や定数などの空間的变化を考慮しなければならない場合がある。このような観点から、超音波計測の解析には、上記手法の中でも陽解法で空間を分割する FDTD 法が有効な手法であると考えられる。また、FDTD 法は並列計算を行なう場合のスケーラビリティが高いため、さらに高速化が可能である。

今回は、超音波を用いた計測法の中で超音波流量計に着目し、FDTD 法を用いた流速場における三次元超音波過渡伝搬解析法の検討を行なった。まず、空間および時間分解能が解析精度に及ぼす影響を検討した^[6]。次に、流れが無い矩形管路中の超音波の三次元過渡伝搬解析と実験を行うことにより、超音波素子のモデリング方法について検討した^[6]。最後に、流れ場の考慮にセミ・ラグランジュ座標系を適

用し^[1]、超音波流量計を模擬した三次元検証用モデルの解析と実験を行い、開発した手法の妥当性を検討した。

2. 解析方法

<2・1>支配方程式

音場の解析では、次式で示されるオイラーの式と連続の式が支配方程式となる。

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -k \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{v} 、 p 、 ρ 、 k は、それぞれ粒子速度、音圧、密度、体積弾性率である。

<2・2>離散化法

FDTD 法は、(1)、(2)式を時間および空間で差分化し、 \mathbf{v} 、 p を交互に時間発展的に求めていく方法である^[3]。なお、時間微分項には中央差分近似法を適用し、空間領域はスタガード格子で離散化した^[3]。

流れ場の考慮には、各物理量はオイラー座標系で定義し、時間微分項をラグランジュ座標系で考慮するセミ・ラグランジュ法を用いた^[3]。このとき、(1)、(2)式の時間微分項は、座標系が流れ場と同じ速度で移動するため、例えば、時刻 t の p 点における(1)式の時間微分項 $\partial v_p^t / \partial t$ は中央差分近似法を用いて次式で表される。

$$\frac{\partial v_p^t}{\partial t} = \frac{\partial v_{p'}^{t+0.5\Delta t} - \partial v_{p''}^{t-0.5\Delta t}}{\Delta t} \quad (3)$$

ここで、 Δt は時間刻み幅、 p' および p'' 点はそれぞれ p 点が時刻 $0.5\Delta t$ 後および前に存在する、およびしていた点を示す。

3. 空間および時間分解能が解析精度に及ぼす影響

ここでは、所望の解析精度を得るために必要な空間と時間分解能を一次元モデルを用いて検討する。

<3・1>検討用モデル

図1に、分割幅 Δx および時間刻み幅 Δt が解析精度に及ぼす影響を検討するための一次元モデルを示す。点 o ($x=0$) に次式で表される音圧 p を一周期のみ与えた場合の過渡伝搬解析を行った。

$$p(t) = (0.5 - 0.5 \cos \omega t) \sin \omega t \quad (4)$$

ここで ωt は角周波数であり、周波数 f は 400kHz

とした。右辺の () 内は音圧が零の一定値から立ち上がる時刻 $t=0$ と音圧が零の一定値になる一周期後で p の時間的な微係数を連続にするために乗じた窓関数である。媒質は空気 ($\rho = 1.205 \text{ kg/m}^3$ 、 $k = 142,297 \text{ Pa}$) とし、このとき音速 C は 343.64 m/s となる。評価点として、 o 点から一波長 $\lambda (= 0.859 \text{ mm})$ 離れた s 点を設定し、この点の音圧の時間的な最大値とその伝搬時間で評価を行った。

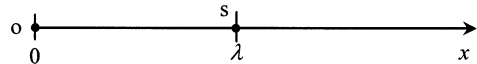


図1 一次元解析モデル

<3・2>結果および考察

図2に、 Δt を 0.1ns と十分小さくし、一波長当りの分割数を 10、20、30 と変化させた場合の $t=4.2\mu\text{s}$ における音圧分布を示す。本モデルでは、(4)式の音圧分布が音速 C で伝搬した波形が真値となる。図より、分割数を細かくすると真値に近づくことがわかる。

図3に、一波長当りの分割数が解析誤差に及ぼす影響として、図2の s 点における音圧 p の最大値の誤差 $\varepsilon_{\text{pmax}}$ 、最大値の伝搬時間 T の誤差 $\varepsilon_{\text{Tmax}}$ を示す。ただし、誤差 ε は次式で定義した。

$$\varepsilon = \frac{|V_{\text{cal}}| - |V_{\text{real}}|}{|V_{\text{real}}|} \times 100(\%) \quad (5)$$

ここで、 V は音圧 p もしくは伝搬時間 T を表し、下付添字 real 、 cal はそれぞれ真値、計算値を示す。図より離散化誤差を 3% 以内に抑えるためには一波長当たりの分割数を約 30 以上にしなければならないことがわかる。

図4に、一波長当たり 30 分割した場合の時間刻み幅 Δt が離散化誤差に及ぼす影響を示す。図より、 Δt を 80ns より大きく選ぶと誤差が極端に増加するが、80ns 以下では、ほぼ 1.5% 以内になる。一次元解析の安定条件は次式で表され、本解析では $\Delta x/C=83.3\text{ns}$ となるため、時間刻み幅 Δt は、安定条件を満足するように選ばなければならないことがわかる。

$$\Delta t \leq \Delta x / C \quad (6)$$

以上より、超音波の伝搬解析を行う場合、離散化誤差を 3% 以内にするためには、分割幅 Δx を一波長のほぼ $1/30$ 以下にし、時間刻み幅 Δt はその分割幅での安定条件を満足するように選ばなければならないことがわかった。

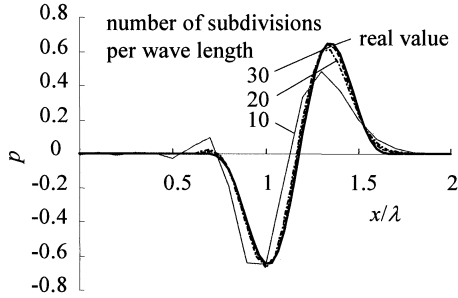


図2 分割数が音圧分布に及ぼす影響 ($t=4.2\mu\text{s}$)

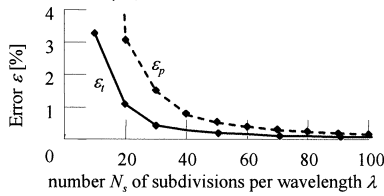


図3 分割数が解析精度に及ぼす影響

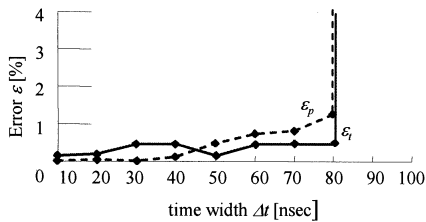


図4 時間刻み幅が解析精度に及ぼす影響

4. 流れが無い管路内の三次元伝搬解析

ここでは、流れが無い管路内の超音波の伝搬について、三次元解析と実測を行い、解析法の妥当性と超音波センサのモデリング方法の検討を行う。

<4.1>検討用モデル

図5に、矩形管路の両端に超音波センサを対向して配置した三次元モデルを示す。超音波センサは、送波器、受波器とも $\phi 10\text{mm}$ の円形断面とし、管路は断面が $15\text{mm} \times 15\text{mm}$ の正方形で管路長 l を10と50mmに変化させた。また、管路内部は空気である。

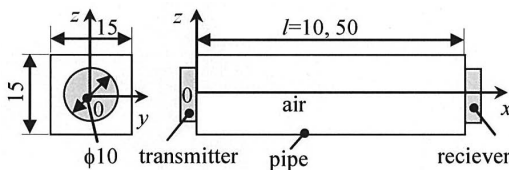


図5 管路の三次元解析モデル

<4.2>実験モデルおよび実験方法

図6に、実験モデルを示す。超音波センサは、送波器、受波器とも、共振周波数が 400kHz で表面に整合層を有する空中用のセンサを用いた。また、管路はアクリル樹脂で製作し、管路内を超音波センサが移動できるようにした。

測定は、温度を 25°C 一定とした恒温槽で行い、送波器に、任意波形発生器(NF回路設計ブロック社製 WF1943B, 14bit, 120MS/s)により図7に示す 400kHz の矩形波電圧を3.5周期分与え、右側の受波器の電圧を波形記憶装置(岩崎通信社製 DS9121, 10bit, 20MS/s)を用いて直接測定した。

また、本報告では、3.5周期の矩形波電圧を印加した場合の送波器表面の変位の垂直成分の時間的変化をレーザー干渉計(Technar社製 TWM-5000)により 0.5mm 間隔で格子状に測定した結果(他機関による測定)も用いた。図8に、測定結果の一例として、表面の任意の点 (y, z) における変位の時間的変化を示す。ただし、変位の値は正規化して示している。変位の振幅は中心部で最も大きくなり、また、各点で位相が異なっていることがわかる。

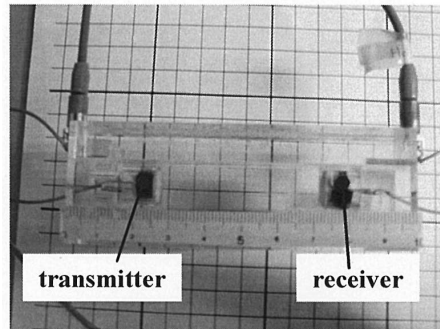


図6 管路の実験モデル

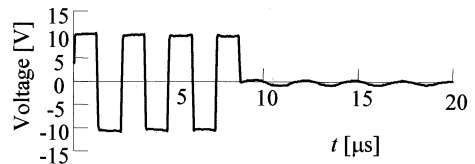


図7 送波器の電圧波形

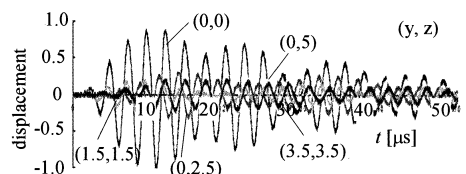


図8 送波器表面の変位の時間的変化

<4・3>解析条件

解析モデルは、対称性を考慮して1/4領域のみとし、管路の内壁面および受波器の表面は固定壁の完全反射境界として解析した。空間および時間の分割幅は、2章の結果より、それぞれ、 $\Delta x=30\mu\text{m}$ ($\lambda/\Delta x=29$)、 $\Delta t=50\text{ns}$ とした。

送波器表面には、図8の変位 d の実測値から求めた粒子速度の x 成分 $u(=\partial d/\partial t)$ を、空間で線形補間することにより分割図の各格子点に与えた。この際、変位の実測値は移動平均によりノイズ成分を除去して使用した。

<4・4>結果および検討

(1)実験結果

図9に、受波器の電圧波形を示す。管路長 l が10mmのときには、図8の送波器中心の波形形状とほぼ同様となるが、 $l=50\text{mm}$ では、波形が異なっている。また、管路長が長くなると伝搬時間が長くなり振幅が減衰していることがわかる。

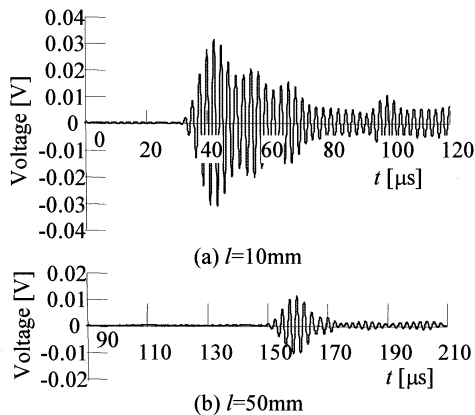


図9 受波器の電圧波形(実測値)

(2)解析結果

図10に、管路長 l が50mmの場合の音圧分布の時間的変化を示す。(a)図が音圧を送波器表面に空間的には一様で時間的には3.5周期の正弦波に窓関数を乗じた波形を与えた場合、(b)図が実験で得られた変位を粒子速度に変換して与えた場合の結果である。それぞれの図は $l=50\mu\text{s}$ での最大値で正規化してある。図からわかるように、音圧を送波器表面に一様に与えた場合には音波の振幅および形状はほとんど変わらないが、送波器の中心で大きくなる実際の

粒子速度を与えた場合には、最初は中心付近の音圧が大きい、その後は拡散により音圧が広がることがわかる。

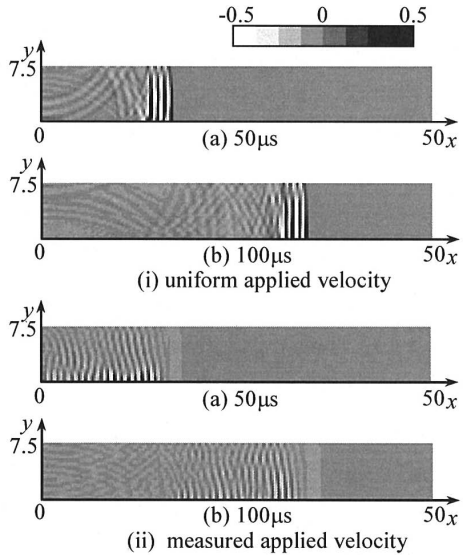


図10 音圧分布の時間的変化(解析値)

図11に、送波器表面に実測から求めた粒子速度を与え、管路長 l を10, 50mmに変化させた場合の受波器表面の音圧の時間的変化を示す。(a)図は受波器表面の音圧をそのまま均等に積分した場合、(b)図は、実測による送波器表面での変位は中心部が大きかったため、積分範囲を半径 $r=3\text{mm}$ 以内に限定し、かつ次式に示すように中心付近の重み w を大きくして積分した場合を示す。

$$w = \cos^2\left(\frac{r}{6}\pi\right) \quad (7)$$

ここで π は円周率である。それぞれの図は $l=10\text{mm}$ での最大値で正規化してある。図より、音圧を受波器表面で単純に積分した場合には、音圧にセンサ間の距離による減衰が見られず、実測において電圧が減衰した現象が再現できていない。一方、重みを付けて積分した場合には、センサ間の距離が大きくなると、実測された電圧と同程度の減衰が見られ、かつ6波目以降の音圧がそれ以前の音圧に比べて小さくなる現象も確認できる。従って、受波器表面の音圧波形と電圧波形に線形的な相関があると仮定すれば、本結果は妥当であると言える。

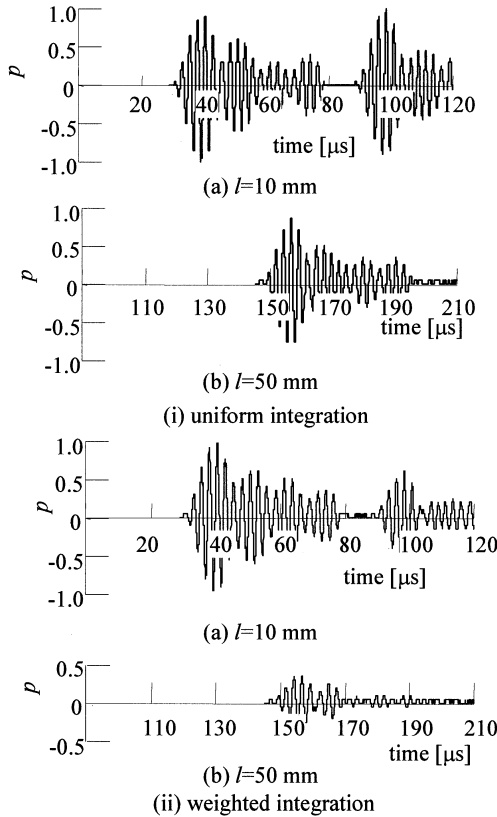


図 11 受波器表面での音圧波形(解析値)

5. 流速場における管路内の伝搬解析

ここでは、4章の超音波素子のモデリング手法を用いて、流速場における超音波の伝搬について解析と実験を行った。

<5・1>検討用モデル

図 12 に、超音波流量計を模擬した検証用モデルを示す。矩形管路内に空気を x 方向に流量 0, 50, 100, 150, 200 L/min で流した状態で、送波器に周波数 400kHz で 3.5 波の方形波電圧を印加したときの受波器で得られる電圧波形を解析と実験で求めた。なお、本モデルのレイノルズ数 Re は流量 50 L/min の場合でも 4500 程度となり乱流領域である。

<5・2>実験モデルおよび実験方法

図 13 に、実験モデルを示す。超音波素子などの実験条件は4章と同一である。矢印の向きに流量を与えた場合の測定を行った。

<5・3>解析条件

境界条件や時間・空間分解能などの解析条件は4章と同一である。解析では流速分布とし

て、乱流状態を想定した一様な流速分布と、参考のため、非圧縮流体の層流の理論解によって得られた流速分布の二通りとした。

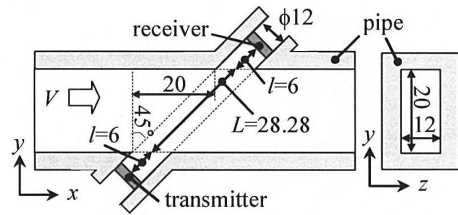


図 12 超音波流量計を模擬したモデル

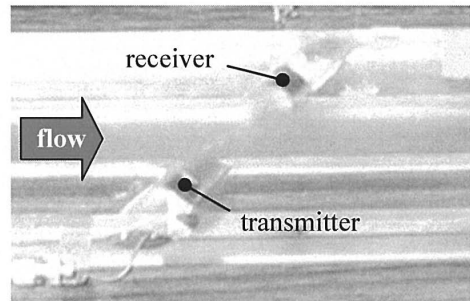


図 13 流速場の実験モデル

<5・4>結果および検討

図 14 に、各流量での受波器の電圧波形を示す。ただし、解析結果のそれぞれについて、0 L/min の最大値が実測値の最大電圧と一致するように正規化している。流れによって伝搬時間が短くなっているが、これは素子間の見かけの距離が短くなるからである。またそのため、流れがある場合の実測では電圧の振幅が大きくなる。しかしながら、解析では流れによって振幅が逆に小さくなってしまったため、今後、前述した受波器のモデリングについて再度検討する必要がある。

図 15 に、5 波目の最大値に着目し、0 L/min の伝搬時間 T_0 と流れがある場合の伝搬時間 T の差 ΔT を示す。また、参考のため次式の解析式で求めた ΔT も示す。

$$T = 2l/C + L/(C + V \cos 45^\circ) \quad (8)$$

ここで、 C は音速、 V は平均流速、 L, l は図 12 に示す寸法である。図より、流れ場を乱流とした解析によって得られた伝搬時間は実測値や解析式とよく一致していることがわかる。一方、層流とした解析では、伝搬時間の差 ΔT が大きくなっているが、これは層流では超音波が主に伝搬する管路中央部での流れが平均流速より

も速くなるからであり、今後、層流領域での実測により妥当性を確認する予定である。

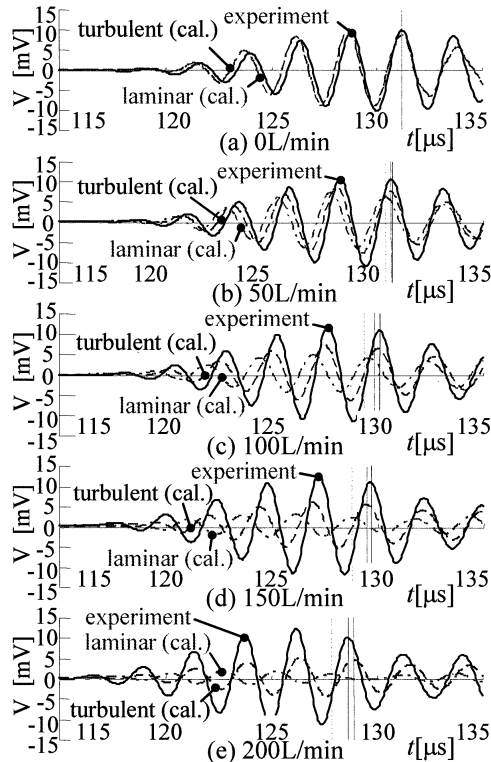


図 14 受波器での電圧(音圧)の時間的变化

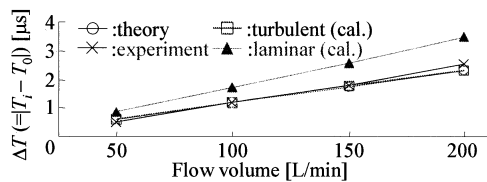


図 15 流量による伝搬時間差の変化

6. むすび

時間領域差分法を用いた超音波の過渡伝搬解析のソフトウェアを開発し、空間および時間分解能が解析精度に及ぼす影響を検討するとともに、矩形管路内の伝搬について三次元解析と実験を行うことにより、開発した解析手法の妥当性と超音波センサのモデリング方法について検討を行った。さらに、流速場における超音波過渡伝搬解析と実験を行い、妥当性を検証した。本報告で得られた知見を要約すると以下のようなになる。

- (1) 振幅および伝搬時間の離散化誤差を 3% 以内にするためには、空間分解能として 1 波長を 30 分割する必要がある。また、時間刻み幅は安定条件を満足するように設定すればよい。
- (2) 送波器表面に与える条件により、音波の伝搬の様子が大幅に異なり、実験で得られた最大値の距離減衰を再現するためには、送波器表面に実測値など適切な条件を与える必要があることがわかった。
- (3) 流速場における解析において、流量による超音波の伝搬時間の差の変化は実測値とよく一致したが、振幅の再現はできなかった。

今後は、流速場における受波器での振幅の誤差の原因について検討するとともに、受波器の音圧波形を電圧波形に変換する方法について検討する予定である。

謝辞

本研究の計算には、九州大学情報基盤センターの高性能演算サーバ IBM eServer p5 モデル 595 およびスーパーコンピュータシステム FUJITSU PRIMEQUEST 580 を使用させて頂いた。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- [1] 石川・高本・清水・文字・松井：計測自動制御学会論文集, vol. 36, no. 5, pp.381-387 (2000)
- [2] 鹿子嶋著：「電子情報通信レクチャーシリーズ 光・電磁波工学」, コロナ社 (平 15)
- [3] 橋本・阿部 共著：「FDTD 時間領域差分法入門」, 森北出版, (平 8)
- [4] 宇野著：「FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析」, コロナ社, (平 16)
- [5] 佐藤：「FDTD 法による弾性振動・波動の解析入門」, 森北出版, (平 15)
- [6] S. Takahashi, K. Muramatsu, and A. Kimoto, Proc. of the 2007 IEEE Int. Ultrasonics Symposium, pp. 2295-2298.
- [7] 盛・村松：平 18 電気学会全国大会, No.1-111