

IDR-AGS法の収束性と有効性の評価

尾上勇介 パーター ソネヴェルト* 藤野清次†
九州大学大学院システム情報科学府 * デルフト工科大学 †九州大学情報基盤研究開発センター

拡張IDR(s)定理に基づくIDR(s)法の出現以来、IDR-AGS(Accelerated Gauss-Seidel)法そしてMR_IDR(s)法、Bi_IDR(s)法と次々と同一著者らにより提案がなされてきた。第1番目のIDR-AGS法とは、反復定常法であるGauss-Seidel法への拡張IDR(s)定理の応用と言える。また、IDRファミリーの中で唯一パラメータフリーの反復法でもある。そこで、本稿では、拡張IDR(s)定理と反復列の構成について記し、IDR-AGS法の算法を導出する。そして、数値実験を通して、IDR-AGS法の有効性を検証する。

Estimation of convergence properties of IDR-AGS method and consideration on its effectiveness

Yusuke Onoue Peter Sonneveld* Seiji Fujino†
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
*Delft University of Technology †Research Institute for Information Technology, Kyushu University

After an appearance of IDR(s) method based on extended IDR(s) Theorem by P. Sonneveld and M. van Gijzen, some variants of IDR-AGS, MR_IDR(s) and Bi_IDR(s) methods have been proposed. The IDR-Accelerated GS method was generated from application of the IDR(s) Theorem to the conventional Gauss-Seidel method. In this article, we introduce an algorithm of IDR-Accelerated GS method, and verify efficient performance and usefulness of this variant through numerical experiments for several realistic sparse matrices.

1 はじめに

P. SonneveldとM. van Gijzenにより、旧版のIDR定理[10]をさらに発展させた拡張IDR(s)定理に基づく反復法IDR(s)法が発表された[5]。ここで、IDRとは、Induced Dimension Reduction(数学的帰納法による次元縮小法)の略である。その後、拡張IDR(s)定理に基づく反復法が、IDR-AGS(Accelerated Gauss-Seidel)法[6][7]、Minimum Residual IDR(s) (最小残差IDR(s), 以下MR_IDR(s)と略す)法[9]とBi-orthogonalized IDR(s) (双直交IDR(s), 以下Bi_IDR(s)と略す)法[4]が次々と発表された。これらのIDRファミリーの中で、唯一パラメータの指定をせずに済むのがIDR-AGS法であり、反復定常法であるGauss-Seidel法への拡張IDR(s)定理の応用の一つである。

そこで、本稿では、IDR-AGS法の概要を述べ、数値実験を通して、IDR-AGS法の有効性を調べる。本稿の構成は次のとおりである。第2節では、拡張IDR(s)定理とある反復列の構成方法について記述する。第3節で、IDR-加速つきGauss-Seidel

法の算法の導出、第4節で数値実験を通してIDR-AGS法の有効性を検証する。最後に、第6節でまとめを行う。

2 拡張IDR(s)定理と反復列

2.1 拡張IDR(s)定理

拡張IDR(s)定理

$A \in R^{N \times N}$ とし、行列 P を一次独立なベクトル群 $\mathbf{p}_i (i = 1, 2, \dots, s)$ を列ベクトルに持つ行列 $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_s)$ 、空間 \mathcal{G}_0 を完全Krylov空間 $K_N(A, \mathbf{r}_0)$ とする。さらに、一連の空間 $\mathcal{G}_j (j = 1, 2, \dots)$ を、

$$\mathcal{G}_j := (I - \omega_j A)(\mathcal{G}_{j-1} \cap \text{Null}(P^T)) \quad (1)$$

と定義する。ここで、パラメータ ω_j は非零のスカラー値、 $\text{Null}(P^T)$ は行列 P の転置 P^T の零空間とする。このとき、次の定理が成り立つ。

- (i) $\mathcal{G}_j \subseteq \mathcal{G}_{j-1}$ for all $j > 0$
- (ii) $\mathcal{G}_j = \{\mathbf{0}\}$ for some $j \leq N$

2.2 拡張 IDR(s) 定理に基づく反復列

天下りの¹ [7] であるが, ある正方形行列 B とベクトル f_n が,

$$\begin{aligned} f_{n+1} &= \rho_n B(f_n + \gamma_n(f_n - f_{n-1})) \text{ with } \gamma_n \\ &\text{such as } f_n + \gamma_n(f_n - f_{n-1}) \perp p \end{aligned} \quad (3)$$

の関係を満たす反復列 $\{f_{n+1}\}$ とする. ここで, ベクトル p は固定して考え, 縮小率 ρ_n と係数 γ_n はスカラー値とする. f_0 と f_1 は別にして, すべてのベクトル f_n は p^\perp という B の像の中に含まれる. f_2 と f_3 もその部分空間に含まれる. しかし, p に垂直なベクトルから特別の組合せも作ることができる. 例えば, f_4 を B^2 における p^\perp の像とし, $n > 4$ に対してそのような f_n を次々と作ることができる. このプロセスを繰り返すと, $2k$ 回の反復のあと, すべての $n \geq 2k$ において, $f_n \in B^k(p^\perp)$ が得られる. そのとき,

$$f_{2k} \in \bigcap_{j=1}^k B^j(p^\perp) \quad (4)$$

である. しかも, 右辺の部分集合の共通部分は, ほとんどの場合「収縮している」(その証明は IDR 定理そのものの証明になるのでここでは割愛する [5]). 次に, IDR(s) 定理の具体的な実装について考察する. 実装について (3) 式が大きな役割を果たすことになる.

3 IDR 加速つき Gauss-Seidel 法の導出

連立一次方程式 $Ax = b$ を解くことを考える. A は $N \times N$ の大きさの実数非対称行列, x, b は N 次元の解ベクトルと右辺項を各々表すものとする. このとき, 次の反復列 $\{x_{n+1}\}$ を考える. B は反復行列と呼ばれる.

$$x_{n+1} = Bx_n + b. \quad (5)$$

¹脚注: 考案者の Sonneveld によれば, IDR 法の着想の源は古典的なセカント (割線) 法: $x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n x_{n-1}}{a_n + b_n}$ にある. ただし, a_n と b_n は $a_n f(x_n) + b_n f(x_{n-1}) = 0$ を満たすとする. このとき, セカント法は 2 つの初期値 x_0 と x_1 から出発する 1 次元の Newton 法

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (2)$$

の一種に帰着される. この 1 次元の漸化式の N 次元への拡張から IDR 法が誕生した.

x_0 を近似解の反復の初期値とする. このとき, 反復行列 B のスペクトル半径: $\rho(B) < 1$ ならば, 反復列は収束することが知られている. さらに, 残差 r_n を次の式で定義する.

$$r_n \equiv Bx_n + b - x_n. \quad (6)$$

このとき,

$$\begin{aligned} r_n &= Bx_n + b - x_n = x_{n+1} - x_n \\ &= Bx_n + b - (Bx_{n-1} - b) \\ &= B(x_n - x_{n-1}) = Br_{n-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

が導ける. したがって, 次の反復手順:

1. x_0 is an initial guess $r_0 = Bx_0 + b - x_0$
2. For $n = 0, 1, 2, \dots$ do:

$$x_{n+1} = x_n + r_n, \quad r_{n+1} = Br_n$$
3. End do.

で近似解 x_{n+1} が求まる. 同様に, 残差 r_{n+1} について

$$r_{n+1} = B[r_n + \gamma_n(r_n - r_{n-1})]. \quad (8)$$

が成り立つならば, $r_{n+1} - r_n = (B - I)(x_{n+1} - x_n)$ と $r_n - r_{n-1} = (B - I)(x_n - x_{n-1})$ から,

$$\begin{aligned} &(B - I)(x_{n+1} - x_n) \\ &= r_{n+1} - r_n \\ &= B[r_n + \gamma_n(r_n - r_{n-1})] - r_n \\ &= (B - I)[r_n + \gamma_n B(x_n - x_{n-1})] \end{aligned} \quad (9)$$

が導ける. 行列 B と行列 $(B - I)$ は交換則が成り立つ. 最終的に, 解ベクトル x_{n+1} の漸化式が

$$x_{n+1} - x_n = r_n + \gamma_n B(x_n - x_{n-1}) \quad (10)$$

が得られる. ただし,

$$B(x_n - x_{n-1}) = x_n - x_{n-1} + r_n - r_{n-1} \quad (11)$$

も得られる. これは, 連立一次方程式 $Ax = b$ を解くための, 定常反復法の「加速」とみなすことができる. そこで, 行列 A を次のように行列分離する.

$$A = M - N, \quad Ax = b \iff Mx = Nx + b. \quad (12)$$

ただし, スペクトル半径: $\rho(M^{-1}N) < 1$ とする. $B = M^{-1}N$ とおき, $\tilde{b} = M^{-1}b$ とすると, 連立一次方程式は

$$x = Bx + \tilde{b} \quad (13)$$

と書ける.

上記の IDR 定理に基づく考え方を定常反復法の一つである Gauss-Seidel 法に適用する. 行列 A を $A = L + D + U$ と分離する. ただし, L は狭義下三角行列, U は狭義上三角行列, D は対角行列とする. このとき, 対応する反復列 $\{\mathbf{x}_{n+1}\}$ は,

$$(L + D)\mathbf{x}_{n+1} = -U\mathbf{x}_n + \mathbf{b} \quad (14)$$

となり, 行列 $L + D$ の三角行列の特徴から容易に解ベクトル \mathbf{x}_{n+1} が求まる. 形式上 \mathbf{x}_{n+1} は

$$\mathbf{x}_{n+1} = [-(L + D)^{-1}U]\mathbf{x}_n + (L + D)^{-1}\mathbf{b} \quad (15)$$

と表せる. 反復行列は $B = -(L + D)^{-1}U$ である. 以下に, IDR 定理に基づく素朴な IDR-AGS 法の算法を示す.

IDR 定理に基づく素朴な IDR-AGS 法の算法:

1. Let \mathbf{x}_0 be an initial solution, and let \mathbf{p} be random vector
Solve \mathbf{r}_0 from $(L + D)\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - (L + D + U)\mathbf{x}_0$
 $d\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_0$, solve $d\mathbf{r}_1$ from
 $(L + D)\mathbf{r}_1 = -(L + D + U)\mathbf{r}_0$
 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + d\mathbf{r}_1$, $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x}_1$
2. For $n = 1, 2, \dots$ do:
 $\gamma_n = -\frac{\mathbf{p}^T \mathbf{r}_n}{\mathbf{p}^T d\mathbf{r}_n}$, $\mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n + \gamma_n(\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_{n-1})$
 $d\mathbf{x}_{n+1} = \gamma_n d\mathbf{x}_n + \mathbf{s}_n$
 $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_{n+1}$
Solve \mathbf{r}_{n+1} from $(L + D)\mathbf{r}_{n+1} = -U\mathbf{s}_n$
 $d\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_{n+1} - \mathbf{r}_n$
3. End do.

ただし, この算法では初期値設定の部分が多くを占めているので, 次に実装版 IDR-AGS 法の算法を示す. 以下では, この算法を IDR-AGS 法と略記する.

実装版 IDR-AGS 法の算法:

1. Let \mathbf{x}_0 be random vector and,
put $\mathbf{r}_0 = (D + L)^{-1}(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0)$
2. Let \mathbf{p} be a random vector
3. Set $\beta = 0$,
4. for $n = 0, 1, \dots$, do
5. $\mathbf{s}_n = \mathbf{r}_n - \beta d\mathbf{r}_{n-1}$
6. $d\mathbf{x}_n = \mathbf{s}_n - \beta d\mathbf{x}_{n-1}$

7. $d\mathbf{r}_n = -(D + L)^{-1}U\mathbf{s}_n - \mathbf{r}_n$
8. $\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{r}_n + d\mathbf{r}_n$
9. $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + d\mathbf{x}_n$
10. if $\|\mathbf{r}_{n+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq \epsilon$ then stop
11. $\beta = (\mathbf{p}, \mathbf{r}_{n+1}) / (\mathbf{p}, d\mathbf{r}_n)$
12. end do

4 数値実験

計算機環境と計算条件を示す. 計算機は HITACHI SR11000 (CPU: POWER5, クロック周波数: 1.9 GHz, メモリ: 128 GB, OS: AIX 5.3) を用いた. プログラミング言語は Fortran90 を使い, コンパイラの最適化オプションは -Oss -64 -noparallel を使用した. 計算はすべて倍精度浮動小数点演算で行った. 時間の計測には Fortran の時間計測用の関数 xclock を用いた. 収束判定値は相対残差の 2 ノルム: $\|\mathbf{r}_{n+1}\|_2 / \|\mathbf{r}_0\|_2 \leq 10^{-6}$ とした. 初期近似解 \mathbf{x}_0 はすべて $\mathbf{0}$, 最大反復回数は 10000 とした. 行列には対角項 a_{ii} をすべて 1 に揃える対角スケーリングの処理を行った.

4.1 テスト 1

4.1.1 テスト行列

数値実験には, Florida 疎行列データベース [1] から選出した 7 種類の実数非対称行列をテスト行列として用いた. 表 1 にその主な特徴を示す. “nnz” は総非零要素数, “ave. nnz” は 1 行当りの平均非零要素数を表す.

表 1: テスト行列の主な特徴.

行列	解析分野	次元数	nnz	ave. nnz
Epb1	構造解析	14,734	95,053	6.45
Poisson3da		13,514	352,762	26.10
Raefsky2	流体力学	3,242	293,551	90.55
Add20	電気回路	2,395	17,319	7.23
Memplus		17,758	126,150	7.10
Wang4		26,068	177,196	
Watt1	石油輸送	1,856	11,360	6.12

4.1.2 実験結果

表 2 に GS(Gauss-Seidel) 法, SOR(Successive Over-Relaxation) 法, IDR-AGS 法の収束性を示

す。さらに、表3に、アルゴリズム中の補助ベクトル p の与え方を変えたときの IDR-GS 法の収束性を示す。すなわち、乗算合同法による疑似一様乱数、一定数 (=1.0)、初期残差: $r_0 (= b - Ax_0)$ およびそれらに行列 A またはその転置行列 A^T を掛けたものとした。時間の単位はすべて秒とする。表 1-2 では、計算時間が最少の場合を太字で表記した。また、表中の「TRR」は、近似解 x_{n+1} に対する真の相対残差 (True Relative Residual): $\|b - Ax_{n+1}\|_2 / \|b - Ax_0\|_2$ の常用対数 (\log_{10}) の値を表す。 ω は SOR 法における加速パラメータの値、そして ω の値を区間 [1.0, 2.0] の範囲を 0.01 刻みで調べ、そのときの最適値 ω_{opt} を表に示した。

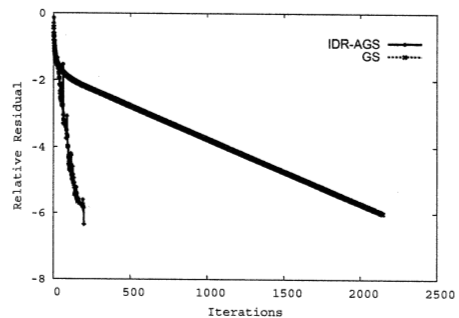
表 2: GS 法, SOR 法, IDR-AGS 法の収束性.

matrix	method	ω_{opt}	itr.	time	TRR
Epb1	GS		7614	11.17	-6.00
	SOR	1.60	2055	3.02	-6.00
	IDR-AGS		1489	1.58	-6.28
Poisson3da	GS		2148	8.15	-6.00
	SOR	1.88	110	0.44	-6.01
	IDR-AGS		199	0.44	-6.53
Raefsky2	GS		max	-	-
	SOR	0.99	3928	8.03	-6.00
	IDR-AGS		302	0.31	-5.73
Add20	GS		7088	2.09	-6.00
	SOR	1.95	271	0.09	-6.01
	IDR-AGS		1647	0.35	-6.32
Memplus	GS		max	-	-
	SOR	1.97	511	1.05	-6.00
	IDR-AGS		5614	7.15	-5.39
Wang4	GS		2473	6.19	-6.00
	SOR	1.86	182	0.51	-6.03
	IDR-AGS		393	0.78	-6.28
Watt1	GS		286	0.07	-6.00
	SOR	1.84	85	0.02	-6.01
	IDR-AGS		50	0.01	-6.23

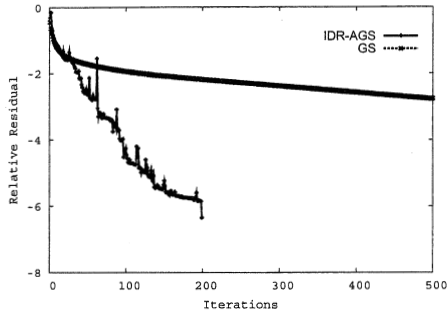
表 3: 補助ベクトル p の与え方を 9 通り変えたときの IDR-AGS 法の収束性.

matrix	ベクトル p	itr.	time [sec.]	TRR
Epb1	r_0	1462	1.55	-6.28
	乱数	1489	1.58	-6.28
	一定数	1754	1.85	-6.36
	Ar_0	1903	2.01	-6.27
	A^* (乱数)	2447	2.59	-6.44
	A^* (一定数)	6546	6.90	-5.56
	$A^T r_0$	3089	3.26	-6.49
	$A^T *$ (乱数)	2165	2.29	-6.46
	$A^T *$ (一定数)	1535	1.63	-6.28

Poisson3da	r_0	213	0.47	-6.29
	乱数	199	0.45	-6.53
	一定数	202	0.45	-6.23
	Ar_0	230	0.51	-6.20
	A^* (乱数)	228	0.51	-6.27
	A^* (一定数)	222	0.50	-6.37
	$A^T r_0$	235	0.52	-6.19
	$A^T *$ (乱数)	213	0.48	-6.28
	$A^T *$ (一定数)	216	0.48	-6.20
Raefsky2	r_0	311	0.32	-5.73
	乱数	302	0.31	-5.73
	一定数	321	0.33	-5.83
	Ar_0	306	0.31	-5.70
	A^* (乱数)	317	0.33	-5.86
	A^* (一定数)	309	0.32	-5.73
	$A^T r_0$	351	0.36	-5.77
	$A^T *$ (乱数)	338	0.35	-5.86
	$A^T *$ (一定数)	379	0.39	-6.40
Add20	r_0	2678	0.56	-6.70
	乱数	1647	0.34	-6.32
	一定数	2555	0.53	-5.40
	Ar_0	2653	0.55	-6.59
	A^* (乱数)	1762	0.37	-6.04
	A^* (一定数)	2044	0.42	-6.30
	$A^T r_0$	4303	0.89	-6.25
	$A^T *$ (乱数)	2305	0.48	-6.24
	$A^T *$ (一定数)	3144	0.65	-6.51
Memplus	r_0	max	-	-
	乱数	5614	7.16	-5.39
	一定数	4847	6.16	-6.16
	Ar_0	max	-	-
	A^* (乱数)	max	-	-
	A^* (一定数)	max	-	-
	$A^T r_0$	7579	9.63	-6.85
	$A^T *$ (乱数)	6119	7.81	-5.85
	$A^T *$ (一定数)	9819	12.55	-5.75
Wang4	r_0	393	0.78	-6.50
	乱数	393	0.78	-6.28
	一定数	502	1.00	-6.46
	Ar_0	392	0.77	-6.40
	A^* (乱数)	545	1.07	-6.33
	A^* (一定数)	387	0.77	-6.35
	$A^T r_0$	425	0.85	-6.51
	$A^T *$ (乱数)	730	1.43	-6.43
	$A^T *$ (一定数)	475	0.93	-6.50



(a) 反復回数 2500 回までの履歴



(b) 反復回数 500 回までの履歴 (拡大図)

図 1: GS 法と IDR-AGS 法の相対残差履歴 (行列 Poisson3da のとき).

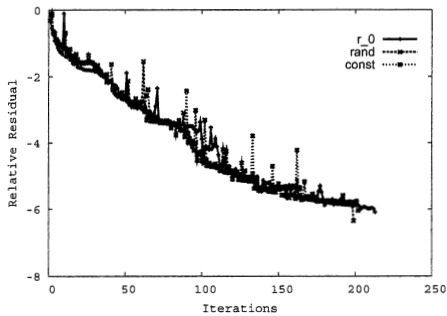


図 2: 3 種類のベクトル p に対する IDR-AGS 法の相対残差の履歴 (行列 Poisson3da のとき).

4.2 テスト 2

ここでは、電磁界分野で有限要素、境界要素併用法による行列 Fem-Bem をテスト行列として取り上げる [8]。調べた反復解法は全部で 7 種類である。調べた反復法は、IDR(s)法 [5]、Sim_IDR(s)法 [9]、MR_IDR(s)法 [9]、Bi_IDR(s)法 [4]、BiCGStab(ℓ)法 [3]、GMRES(k)法 [2]、IDR-AGS 法 [6][7] の 7 種類である。IDR(s)、SIM_IDR(s)、MR_IDR(s)、Bi_IDR(s)法では、パラメータ s を、1 から 10 まで 10 通り変化させた。BiCGStab(ℓ)法では、パラメータ ℓ を、1 から 10 まで 1 刻みで 10 通り変化させた。GMRES(k)法では、パラメータ k を、10, 20, 50, 100, 200, 400, 600, 800, 1000 の 9 通り変化させた。

4.2.1 テスト行列

有限要素、境界要素併用法による行列 Fem-Bem の主な特徴を示す。図 4 に行列 Fem-Bem の非零要素分布と未知変数の模式図を示す。係数行列 A は、左上方は FEM 特有のスパース行列、右上方は非零要素がランダムに配置され、左下方では非零要素が縦のストライプ模様の配置、右下方は BEM 特有の密行列の構造を持つ。

行列	次元数	nnz	ave. nnz
Fem-Bem	19,060	24,377,548	1,279

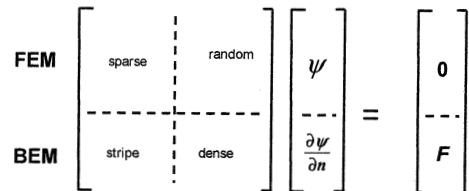


図 4: 行列 Fem-Bem の非零要素分布と未知変数の模式図.

4.2.2 実験結果

ここでは、各解法の収束判定を相対残差の 2 ノルムが $\|r_{n+1}\|_2 / \|r_0\|_2 \leq 10^{-12}$ を満たしたときと厳しくして計算を行なった。その他の計算条件はテスト 1 のときとすべて同じである。表 4 に行列 Fem-Bem に対するリスタートつき GMRES(k)法 [2] の収束性を示す。リスタート周期 k の値が小さいとき GMRES(k)法がなかなか収束しないことがわかる。また、リスタート周期 k を大きくするに従ってメモリ量も増大することがわかる。

表 5 に行列 Fem-Bem に対する 7 種類の反復法の収束性を示す。各パラメータで下付き添字に opt. が付いたものは最短時間のものを表す。表中の計算時間の欄で太字の表記は最も計算時間が短かったものを表す。この表から IDR-AGS 法が最も速く収束したことがわかる。また、IDR(s)法については、内積の補正措置は施していないので、 $s = 10$ のとき真の相対残差 TRR の値がよくないことがわかる。

表 4: 行列 Fem-Bem に対するリスタートつき GMRES(k) 法の収束性.

解法	k	itr.	time [sec.]	TRR	mem. [MB]
GMRES(k)	10	max	-	-	281.7
	20	max	-	-	283.1
	50	max	-	-	287.5
	100	max	-	-	294.8
	200	6700	604.63	-12.00	309.6
	400	1810	174.39	-12.00	339.6
	600	1076	106.67	-12.01	370.2
	800	758	83.99	-12.00	401.5
	1000	758	79.74	-12.00	433.3

表 5: 行列 Fem-Bem に対する反復法の収束性.

解法	itr.	time [sec.]	TRR	mem. [MB]
IDR($s = 1$)	5540	439.57	-12.02	280.3
IDR($s_{opt.} = 6$)	2279	180.86	-12.16	282.5
IDR($s = 10$)	2207	187.29	-9.89	284.2
Sim_IDR($s = 1$)	5063	395.04	-12.36	279.6
Sim_IDR($s_{opt.} = 2$)	3469	295.12	-10.55	280.3
Sim_IDR($s = 10$)	max	-	-	286.1
MR_IDR($s = 1$)	5978	486.55	-12.12	279.6
MR_IDR($s_{opt.} = 10$)	1671	142.35	-12.01	286.1
Bi_IDR($s = 1$)	5282	436.88	-12.05	279.9
Bi_IDR($s_{opt.} = 8$)	1879	147.59	-12.03	282.9
Bi_IDR($s = 10$)	1852	154.70	-12.10	283.8
BiCGStab($\ell = 1$)	3274	512.32	-12.37	280.2
BiCGStab($\ell_{opt.} = 10$)	1230	199.97	-10.51	282.8
GMRES($k = 10$)	max	-	-	281.6
GMRES($k_{opt.} = 10^3$)	758	79.74	-12.00	433.2
IDR-AGS	473	38.83	-12.53	280.2

図 5 に行列 Fem-Bem に対する 6 種類の反復法 (MR_IDR 法の結果は除く) の相対残差の 2 ノルムの履歴を示す。縦軸は相対残差の 2 ノルムの常用対数 (\log_{10}) の値, 横軸は行列ベクトル積の回数を各々とした。各解法のパラメータの値は最短時間のときを選んだ。

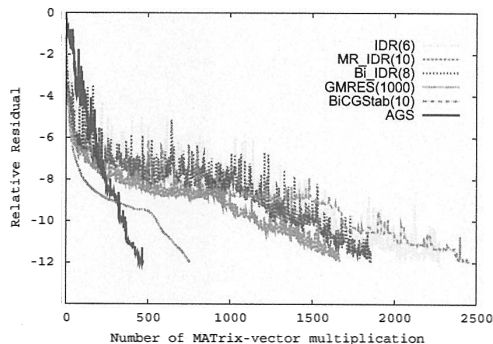


図 5: 行列 Fem-Bem に対する 6 種類の反復法の相対残差の 2 ノルムの履歴.

5 まとめ

本論文では, 拡張 IDR(s) 定理とある反復列の構成方法について記し, IDR-加速つき Gauss-Seidel 法の算法を導出した. そして数値実験を通して IDR-AGS 法の有効性を確認した.

謝辞

有限境界要素併用法に関する研究協力を快諾頂いた早稲田大学 若尾真治教授に感謝の意を表す.

参考文献

- [1] Florida sparse matrix collection: <http://www.cise.ufl.edu/research/sparse/matrices/index.html>.
- [2] Saad, Y., Schultz, M.H. : GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, SIAM J. Sci. Stat. Comput., Vol.7, No.3, pp.856-869, 1986.
- [3] Sleijpen, G.L.G., Fokkema, D.R. : BiCGStab(ℓ) for linear equations involving unsymmetric matrices with complex spectrum, ENTA, Vol.1, pp.11-32, 1993.
- [4] Sonneveld, P., van Gijzen, M.B. : An elegant IDR(s) variant that efficiently exploits bi-orthogonality properties, TR 08-21, Math. Anal., Delft Univ. of Tech., 2008.
- [5] Sonneveld, P., van Gijzen, M.B. : IDR(s): a family of simple and fast algorithms for solving large nonsymmetric linear systems, TR 07-07, Math. Anal., Delft Univ. of Tech., 2007.
- [6] Sonneveld P., The IDR theorem - A story of serendipity -, 9th IMACS Int. Symposium on Iterative Methods in Scientific Computing, Lille, March, 2008.
- [7] Sonneveld P., AGS - IDR - CGS - BiCGSTAB - IDR(s) : the circle closed - A case of serendipity -, The Proc. of Int. Kyoto-Forum on Krylov Subspace method, pp.1-14, Kyoto, Sept., 2008.
- [8] Takahashi, Y., Wakao, S.: Large-scale analysis of eddy-current problems by the hybrid Finite Element-Boundary Element method combined with the fast multipole method, IEEE Trans. on Magnetics, Vol.42, pp.671-674, 2006.
- [9] van Gijzen, M.B., Sonneveld, P.: An IDR(s) variant with minimal intermediate residual norms, Int. Kyoto-Forum on Krylov Subspace method, pp.85-92, Kyoto, Sept., 2008.
- [10] Wesseling, P., Sonneveld, P.: Numerical Experiments with a Multiple Grid- and a Preconditioned Lanczos Type Methods, Lecture Notes in Math., Springer, No.771, pp.543-562, 1980.