

3 次元フィルタを用いた 2 次元特性可変型 FIR フィルタの一設計法

†新迫 和宏 †吉田 俊之 †高木 茂孝
†西原 明法 †藤井 信生

†東京工業大学工学部電子物理工学科
‡東京工業大学理工学国際交流センター

〒 152 東京都目黒区大岡山 2-12-1

あらまし 2 次元の特性可変型 FIR ディジタルフィルタの一構成法を提案する。本方法は、著者らが先に提案した 2 次元原型フィルタを用いた 1 次元特性可変型 FIR フィルタの構成法を 2 次元に拡張するものである。すなわち、 ω_3 軸に垂直な断面特性が所望の 2 次元可変フィルタの特性に一致する 3 次元原型フィルタを設計し、切り出す面の座標 ω_3 を変えることで可変特性を得る方法である。小文では、特にこの設計法を 2 次元の通過角可変型ファンフィルタに応用し、実際に 9×9 および 11×11 タップのフィルタの設計例を示している。得られた結果を既に提案されている McClellan 変換による特性可変フィルタと比較し、本方法の有効性を確認している。

A Design Method of 2-D Variable Characteristic FIR Filters using 3-D Prototype Filters

†Kazuhiko SHINSAKO †Toshiyuki YOSHIDA †Shigetaka TAKAGI
†Akinori NISHIHARA †Nobuo FUJII

Dept. of Physical Electronics, Faculty of Engineering, Tokyo Institute of Technology
International Cooperation Center for Science and Technology, Tokyo Institute of Technology

2-12-1, Ookayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

Abstract This paper proposes a new design method of 2-dimensional (2-D) variable characteristic FIR digital filters, which is an extension of the design method for 1-D variable characteristic FIR filters previously proposed by the authors. This method uses 3-D prototype filters whose cross-sections orthogonal to ω_3 axis have the desired characteristics of 2-D filters, from which variable 2-D filters are derived. As examples, 9×9 and 11×11 -tap variable fan filters are designed by the proposed method. A comparison of the designed filter with one by McClellan transform has shown the advantage of the proposed method.

1 まえがき

デジタルフィルタの種々のアプリケーションにおいては、時としてそのフィルタ特性のリアルタイム変化が要求される場合がある。今日までに、主として1次元の特性可変型フィルタに対し、多くの実現法が研究されている。これら的方法は、(1)極めて小数のフィルタパラメータのみを変化させて所望の特性を得る方法、および、(2)全てのフィルタ係数を希望する特性が得られるように更新する方法、の大きく2つに分類できる。

(1)の方法は、1次元IIRフィルタに対しては遅延要素を全域通過関数で置き替え、その係数を変化させる方法[1], [2]、1次元FIRフィルタに対しては直線位相を保った周波数変換による方法[3]等に代表される。(2)の方法は、主として直線位相性を有する可変型FIRフィルタの構成に用いられ、遮断周波数とフィルタ係数の近似的な関係式を用いた方法[4]や、2次元フィルタを用いた方法[5]等がある。

一方、2次元の特性可変型フィルタに関しては、McClellan変換を用いた構成法[4], [6], [7]やフィルタ係数の補間に基づく設計法[8]等が提案されている。McClellan変換を用いた方法は、1次元原型フィルタの係数もしくは原型フィルタの係数とMcClellan変換係数の両方を変化させることにより可変特性を得る方法で、フィルタの一部のパラメータを変化することで可変特性が得られるため上記(1)の方法に分類されると考えられる。この方法の利点としては、設計問題が1次元の特性可変型原型フィルタの設計と変換係数の設計に分解されるため前述の1次元特性可変型FIRフィルタの設計法が適用でき、設計手順が簡略化される点、および1次元特性可変型原型FIRフィルタとして文献[3]の手法を用いることにより完全にリップル幅一定な特性可変型フィルタが実現可能である点等が挙げられる。その反面、欠点としては、円対称等のフィルタに対しては低次で比較的良好な特性が得られるが、後の章で示すように特性の良いファンフィルタを得るには高い次数を必要とする点、および可変範囲全域において予め指定した遷移域幅と振幅偏差を同時に満たすフィルタを設計することは困難である点等がある。一方の文献[8]の方法は、フィルタ係数全てを多くの設計例から求めた補間多項式により求める方法であるため、上記(2)の方法に属する。この方法においてもMcClellan変換同様、遷移域幅および振幅偏差を予め一定値以内に制御することは不可能である。

著者らは、既に文献[5]において2次元フィルタを用いた1次元の特性可変型FIRフィルタの一構成法を提案した。この方法は(2)の方法に属するもので、2次元原型フィルタの断面特性が1次元フィルタとなっていることを用いている。この方法は、3次元の原型フィルタの断面特性を用いることにより2次元の特性可変型フィルタの構成に容易に拡張、応用が可能である。しかも、この方法を用いると文献[5]で述べた利点、

1. 原理的に広範囲な可変が可能
2. 特性を変化させた場合の遷移域幅、通過域および阻止域振幅最大偏差は、設計の段階で仕様として与えることが可能

等をそのまま受け継ぐことができる。また、適当な3次元原型を設計することにより、各種の通過域形状(円対称、ファンフィルタ等)のフィルタを種々のパラメータ(遮断周波数、ファンフィルタにおける通過角や通過方向等)に関し変化できる特性可変

型フィルタが実現可能である。

小文の目的は、上記の方法を用いた2次元特性可変型FIRフィルタの一般的構成法を示し、そのファンフィルタへの応用について述べることである。以下、2章では提案する方法の原理や特性を変えるために必要な計算量、3次元原型フィルタの設計法等を一般的に述べる。3章では、提案する方法の2次元通過角可変型ファンフィルタへの応用例について述べ、実際に2つの設計例を示すと共に他の方法との比較検討を行なう。最後に4章でまとめを述べる。

2 提案する特性可変型2次元FIRフィルタの構成法

2.1 本構成法の原理

本構成法は、1章で述べたように2次元原型フィルタを用いた特性可変型1次元FIRフィルタの構成法を2次元に拡張するものである。まず、特性可変型1次元フィルタの構成原理について簡単に説明する[5]。図1に示すような6角型の通過域を有する2次元軸対称FIRフィルタを考える。この原型フィルタを直線 $\omega_2 = 2\pi k$ に沿って切り出した断面は低域通過特性となっている。そこで、 k を $0 \leq k \leq 0.5$ の範囲で $k_1, k_2, k_3 \dots$ と変化させると断面特性も図1に示すように変化し、 k をパラメータとする特性可変型フィルタが構成できる。

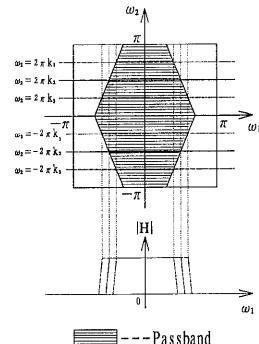


図1：1次元特性可変型フィルタの構成原理

この方法は、2次元の特性可変型FIRフィルタに容易に拡張できる。例として図2に示すような円錐型の通過域を有する3次元の軸対称原型フィルタを考える。

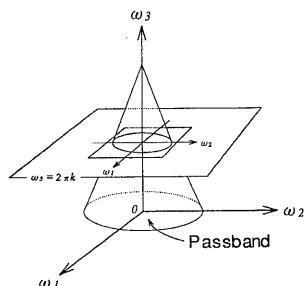


図2：2次元特性可変型FIRフィルタの構成原理

このフィルタを平面 $\omega_3 = 2\pi k$ に沿って切り出した断面特性は、2 次元円対称フィルタとなっており、1 次元の場合同様、切り出す面の高さ k を $0 \leq k \leq 0.5$ の範囲で $k_1, k_2, k_3 \dots$ と変化させると断面特性も図 2 のように変化し、 k をパラメータとする特性可変型フィルタが得られる。

いま、3 次元の原型フィルタを $(2N_1+1) \times (2N_2+1) \times (2N_3+1)$ タップの零位相軸対称フィルタとし、その伝達関数を

$$H(z_1, z_2, z_3) = \sum_{n_1=-N_1}^{N_1} \sum_{n_2=-N_2}^{N_2} \sum_{n_3=-N_3}^{N_3} h(n_1, n_2, n_3) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} z_3^{-n_3}$$

$$h(n_1, n_2, n_3) = h(\pm n_1, \pm n_2, \pm n_3) \quad (1)$$

$$(0 \leq n_1 \leq N_1, 0 \leq n_2 \leq N_2, 0 \leq n_3 \leq N_3)$$

とおく。ここに、 $h(n_1, n_2, n_3)$ はフィルタのインパルス応答で、式(1)の復号は任意である。式(1)は奇タップの伝達関数であるが、3 つのタップ数の内少なくとも一つ以上が偶数である場合にも以下の議論が容易に適用できるため、ここでは省略する。式(1)の周波数応答は、 $z_1 = e^{j\omega_1}, z_2 = e^{j\omega_2}, z_3 = e^{j\omega_3}$ をそれぞれ代入することにより、

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}, e^{j\omega_3}) = h(0, 0, 0) + 2 \sum_{n_1=1}^{N_1} h(n_1, 0, 0) \cos(n_1 \omega_1) + 2 \sum_{n_2=1}^{N_2} h(0, n_2, 0) \cos(n_2 \omega_2) + 2 \sum_{n_3=1}^{N_3} h(0, 0, n_3) \cos(n_3 \omega_3) + 4 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} h(n_1, n_2, 0) \cos(n_1 \omega_1) \cos(n_2 \omega_2) + 4 \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_3} h(0, n_2, n_3) \cos(n_2 \omega_2) \cos(n_3 \omega_3) + 4 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_3=1}^{N_3} h(n_1, 0, n_3) \cos(n_1 \omega_1) \cos(n_3 \omega_3) + 8 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} \sum_{n_3=1}^{N_3} h(n_1, n_2, n_3) \cos(n_1 \omega_1) \cos(n_2 \omega_2) \cos(n_3 \omega_3) \quad (2)$$

と計算される。ただし、 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ は規格化角周波数とする。この周波数応答を ω_3 軸に垂直な平面で切ったときの断面特性 $H(\omega_1, \omega_2)$ は、 $\omega_3 = 2\pi k$ を代入して整理することにより、

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = g(0, 0) + 2 \sum_{n_1=1}^{N_1} g(n_1, 0) \cos(n_1 \omega_1) + 2 \sum_{n_2=1}^{N_2} g(0, n_2) \cos(n_2 \omega_2) + 4 \sum_{n_1=1}^{N_1} \sum_{n_2=1}^{N_2} g(n_1, n_2) \cos(n_1 \omega_1) \cos(n_2 \omega_2) \quad (3)$$

となる。ただし、

$$g(i, j) = h(i, j, 0) + 2 \sum_{n_3=1}^{N_3} h(i, j, n_3) \cos(2\pi n_3 k) \quad (4)$$

である。式(3)は、式(4)の $g(i, j)$ をインパルス応答とする 2 次元軸対称零位相 FIR フィルタの周波数応答となっている。従って、与えられたパラメータ k ($0 \leq k \leq 0.5$) に対して式(4)から 2 次元フィルタの係数 $g(i, j)$ を計算することにより、式(3)のフィルタ特性を変化させることができる。

本方法は原型フィルタの設計後に係数の近似等を一切必要としないため、設計した 2 次元特性可変型フィルタの通過域、阻

止域振幅最大偏差および遷移域幅が 3 次元原型フィルタの対応する値を越えることはない。従って、これらを設計の際に仕様として与えるか、もしくは設計段階で最大値を予測することが可能となる。

2.2 フィルタ係数更新時に要する計算量

フィルタの係数更新時に式(4)を直接計算すると関数 \cos の値を求める必要が生じ、計算量が著しく増大するため好ましくない、そこで、

$$K = \cos(2\pi k) \quad (5)$$

とおき、第 1 種チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ を用いると式(4)は、

$$g(i, j) = h(i, j, 0) + \sum_{n_3=1}^{N_3} 2h(i, j, n_3) \times T_{n_3}(K) \quad (6)$$

と変形できる。フィルタ係数の軸対称性を考慮し、 $0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2$ の範囲の i, j に対して式(6)を計算すれば、全フィルタ係数を求めることができる。これにはまず、必要な $T_{n_3}(K)$ ($2 \leq n_3 \leq N_3$) の値を全て求めてストアした後、これを用いて式(6)を計算する手順をとる。 $T_{n_3}(K)$ は漸化式を用いて順次計算が可能で、 $1 \leq n_3 \leq N_3$ の範囲の値を全て計算するためには、最大 $2(N_3 - 1)$ 回の乗算と $(N_3 - 1)$ 回の加算を必要とする。一方、得られた $T_{n_3}(K)$ を用いて式(6)を計算するためには、乗算、加算それぞれ $(N_1 + 1)(N_2 + 1)N_3$ 回が必要である。従って、両者を合わせて 1 回の係数更新に必要となる計算量は、最大で、

$$N_{Mul} = (N_1 + 1)(N_2 + 1)N_3 + 2(N_3 - 1) \quad (7)$$

回の乗算と

$$N_{Add} = (N_1 + 1)(N_2 + 1)N_3 + (N_3 - 1) \quad (8)$$

回の加算であることが導かれる。ただし、ここでは式(5)に必要な計算量は考慮していないため、予め K を与えるかまたは適当な展開式を用いて k から K を計算しなければならない。

$(2N_1+1) \times (2N_2+1)$ タップの 2 次元軸対称 FIR フィルタを直接構成すると、1 サンプル点の処理には $(N_1+1)(N_2+1)$ 回の乗算と約 $(2N_1+1)(2N_2+1)$ 回の加算が必要となる。従って、提案する 2 次元特性可変型 FIR フィルタが 1 回の係数更新に要する計算量は、1 サンプル点の処理に要する計算量のほぼ N_3 倍程度となることが結論される。

2.3 3 次元原型フィルタの設計法

2 次元特性可変型フィルタの仕様として、タップ数およびパラメータ k ($0 \leq k \leq 0.5$) に対するフィルタの通過域形状 $PB^2(k)$ と阻止域形状 $SB^2(k)$ が与えられている場合を考える。3 次元原型フィルタの設計には、まず通過域 PB^3 よび阻止域 SB^3 を

$$PB^3 = \bigcup_k \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_3 = 2\pi k, (\omega_1, \omega_2) \in PB^2(k), 0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi \} \quad (9)$$

$$SB^3 = \bigcup_k \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \mid \omega_3 = 2\pi k, (\omega_1, \omega_2) \in SB^2(k), 0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi \} \quad (10)$$

により求め、 n_1 軸と n_2 軸に対するタップ数には与えられた 2 次元フィルタのタップ数を指定する。 n_3 軸に対するタップ数の決

定には任意性があるが、大きくとると式(6)の計算量が増大し、逆に小さくとると得られる2次元フィルタの特性が悪化するというトレードオフが存在するため、これらを十分考慮して指定する必要がある。

以上により原型フィルタの仕様が決定されたので、適当な多次元フィルタの設計手法を用い、これを満たすように設計することで3次元原型フィルタの設計は完了する。

3 通過角可変型2次元ファンフィルタへの応用

前章で述べた2次元特性可変型フィルタの構成法を、通過角可変型2次元ファンフィルタに応用し、実際に設計例を示す。設計するファンフィルタの通過域(P.B.)は ω_1 軸方向とし、通過角 θ 、遷移域幅 $\Delta\omega$ を図3に示すように定める。また、 ω_2 軸上の遮断域(S.B.)端を ω_c とおく。通過角の可変範囲は、 $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ($0 \leq \theta_0$)とし、通過角 θ を変化させても遷移域幅 $\Delta\omega$ が一定に保たれる可変ファンフィルタの設計を目標とする。

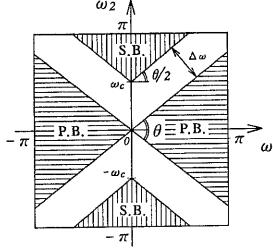


図3：設計する可変型ファンフィルタ

まず、パラメータ k ($0 \leq k \leq 0.5$) を変化させた場合に通過角 θ が変化するように、ファンフィルタの通過域 PB^2 を

$$PB^2(k) = \{(\omega_1, \omega_2) | \omega_2 \leq a(k)\omega_1, 0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi\} \quad (11)$$

とおく。 $a(k)$ は通過域の傾きを表す関数で、 $a(0) = \tan 45^\circ$, $a(0.5) = \tan(\theta_0/2)$ を満たさなければならない。 $a(k)$ の関数型としては、ここでは、

$$\begin{aligned} a(k) &= 1 - pk \\ p &= 2(1 - \tan(\theta_0/2)) \end{aligned} \quad (12)$$

を用いる。 $\theta_0 = 80^\circ$ の場合に、式(11), (12)と式(9)により3次元原型フィルタの通過域 PB^3 を求めて図示すると、図4(a)となる。同図(b)に $k = 0, 0.1, \dots, 0.5$ と変化させた場合の断面特性の等振幅線を示す。 k の変化に従って通過角 θ が変化していることが確認できる。

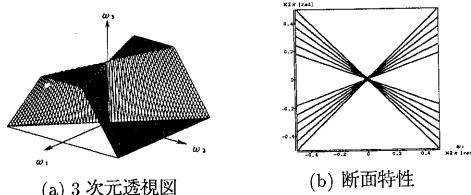


図4：3次元原型フィルタとその断面特性

通過角 $\theta(k)$ は k を用いて、

$$\theta(k) = 2 \tan^{-1}(1 - pk) \quad (13)$$

と表される。一方、可変ファンフィルタの阻止域 SB^2 は式(11)を修正し、

$$SB^2(k) = \{(\omega_1, \omega_2) | (\omega_2 - \omega_c) \leq a(k)\omega_1, 0 \leq \omega_1, \omega_2 \leq \pi\} \quad (14)$$

とすればよい。ただし、通過角 θ によらず遷移域幅 $\Delta\omega$ を一定に保つため、 ω_c を

$$\omega_c = \Delta\omega \sqrt{p^2 k^2 - 2pk + 2} \quad (15)$$

と変化させる必要がある。

次に、以上に述べた可変ファンフィルタの通過域 PB^2 と阻止域 SB^2 より、式(9), (10)を用いて3次元原型フィルタの仕様を定め、実際に設計を行なう。3次元フィルタフィルタの設計には、ここでは線形計画法による設計法[9]を用いる。この方法は、設計に要する計算量が大きいという欠点を有する一方、初期値を必要とせず、また周波数空間内の格子点をある程度大きくとることにより最適フィルタが設計できるといった利点を有している。

最後に、得られた原型フィルタの係数から式(6)に従って可変ファンフィルタの係数を求めれば設計は完了する。以上の手順に従い、次節で2つの設計例を示す。

3.1 実際の設計例

3.1.1 設計例1

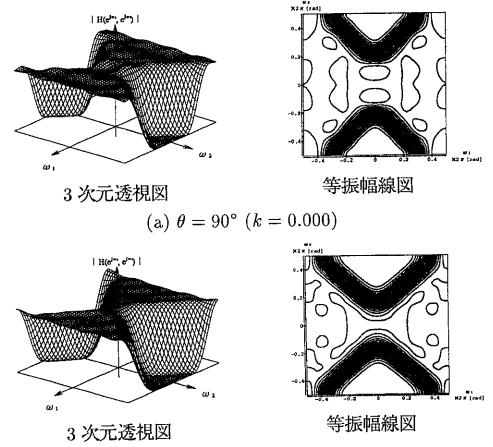
設計例1では、次の仕様を満たす可変ファンフィルタを設計する。

タップ数： 9×9 タップ ($N_1 = N_2 = 4$)

遷移域幅： $\Delta\omega = 2\pi \times 0.24$ (rad/s)

可変範囲： $60^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ($\theta_0 = 60^\circ$)

まず、3次元原型フィルタの設計を行なう。 n_3 軸方向のタップ数を9タップ($N_3 = 4$)とする。 $\theta_0 = 60^\circ$ より $p = 0.8453$ となる。これより原型フィルタの仕様が求められ、線形計画法による設計の結果、通過域振幅最大偏差が0.0185、阻止域振幅最大偏差が0.00904(減衰量40.9dB)の原型フィルタが得られる。設計した可変ファンフィルタの特性を図5に示す。各図において、左側は3次元透視図を、右側は振幅0.05から1.00まで0.05ステップの等振幅線を表している。(以下の図すべて同様とする。)



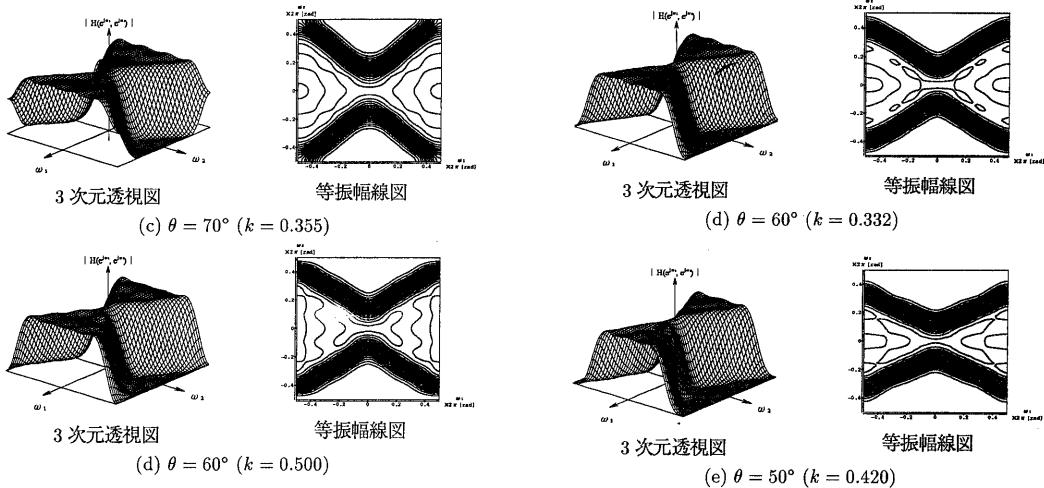


図5: 9×9 タップ可変ファンフィルタ (設計例1)

3.1.2 設計例2

設計例2 の可変ファンフィルタの仕様を

タップ数: 11×11 タップ ($N_1 = N_2 = 5$)

遷移域幅: $\Delta\omega = 2\pi \times 0.22$ (rad/s)

可変範囲: $40^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ($\theta_0 = 40^\circ$)

とし、原型フィルタの n_3 軸方向のタップ数を 11 タップ ($N_3 = 5$) とする。 $\theta_0 = 40^\circ$ より $p = 1.2721$ となり、設計の結果、通過域振幅最大偏差が 0.0208、阻止域振幅最大偏差が 0.00808 (減衰量 41.9dB) のフィルタが得られる。これより求めた可変ファンフィルタの特性を図6に示す。

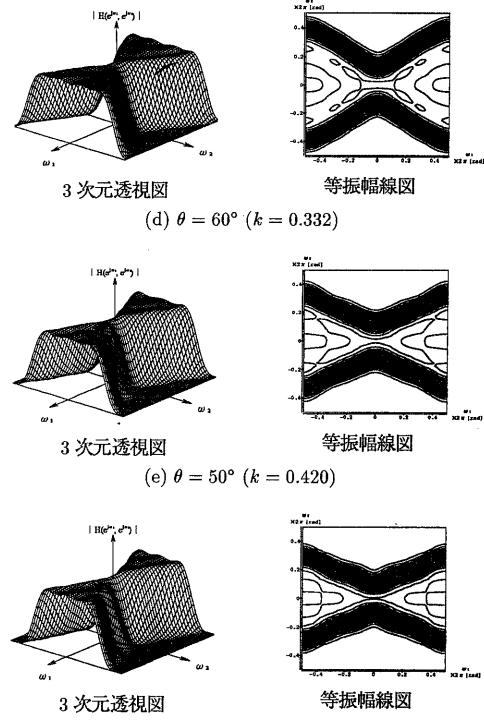
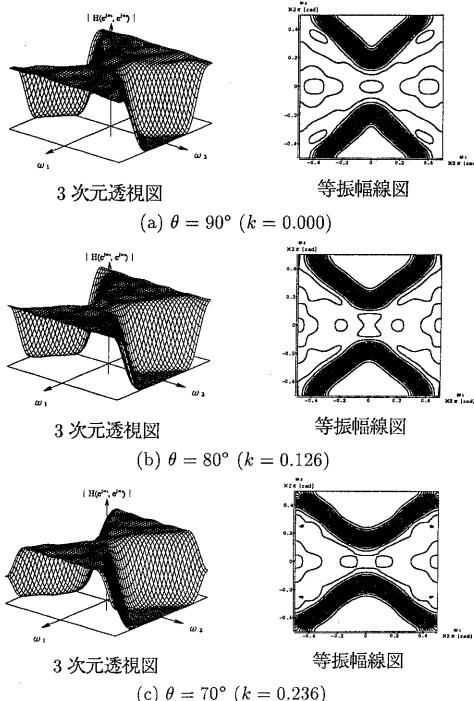


図6: 11×11 タップ可変ファンフィルタ (設計例2)

3.2 他の設計法との比較

前節で示した可変ファンフィルタの設計例は、低次ではあるが良好な振幅特性を有しており、実用上十分であることが確認できる。本節では、これらのフィルタを同一仕様に対する最適フィルタと比較した後、文献[7]の通過角可変型ファンフィルタとの比較検討を行なう。

3.2.1 最適フィルタとの比較

線形計画法を用いた多次元 FIR フィルタの設計法は、周波数空間の格子点を十分多くすることにより、ほぼ最適なフィルタを設計できる。ここでは、この方法により設計例1, 2 と同一の仕様、阻止域振幅最大偏差を持つファンフィルタを設計し、その通過域振幅最大偏差に着目して比較を行なう。結果を表1に示す。参考のため、2 タップ低いタップ数で設計した場合の通過域振幅最大偏差も示してある。

表1より、一般に通過角θの小さいフィルタの方がθ = 90°付近のフィルタと比較して、良好な特性が得られることがわかる。また、9×9 タップと 11×11 タップのファンフィルタを比較すると、9×9 タップのフィルタの方が最適フィルタに近い結果が得られている。この理由の一つに、“可変範囲の広いフィルタほど特性が劣化する”[5] という本方法固有の欠点が挙げられる。従って、設計時にはこのトレードオフを十分考慮する必要がある。

表1：同一仕様の最適フィルタとの比較

9×9 タップ ファンフィルタ 通過角θ	通過域振幅最大偏差		
	提案する方法(原型フィルタ)	9×9 タップ最適フィルタ	7×7 タップ最適フィルタ
θ = 90°(図5(a))	0.0184	0.0064	0.0517
θ = 60°(図5(d))	0.0184	0.0137	0.0610
11×11 タップ ファンフィルタ 通過角θ	通過域振幅最大偏差		
	提案する方法(原型フィルタ)	11×11 タップ最適フィルタ	9×9 タップ最適フィルタ
θ = 90°(図6(a))	0.0208	0.0036	0.0081
θ = 40°(図6(f))	0.0208	0.0074	0.0348

3.2.2 文献[7]の方法との比較

他の特性可変型フィルタの設計法との比較のため、文献[7]の方法により、通過角θ = 60°, 11×11 タップのファンフィルタを設計する。設計例2の図6(d)とほぼ同等の遷移域幅△ω = 2π × 0.22(rad/s)を持たせるため、文献[7]の図3(b)を参考し、1次元原型フィルタの通過域端を 0.28868π(rad/s), 阻止域端を 0.64π(rad/s)とする。ただし、ここでは1次元原型フィルタの設計にはRemez法を用いる。得られたファンフィルタの特性を図7に示す。

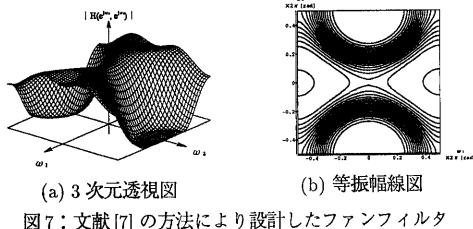


図7：文献[7]の方法により設計したファンフィルタ

図7より、文献[7]の方法に比べ本方法の方が優れた特性を実現できることは明らかである。しかも、文献[7]の設計法では、可変フィルタとして設計する場合には1次元原型フィルタの設計に文献[4]の方法を用いなければならず、さらにフィルタ特性が劣化する。以上より、本方法は、特性の点では有利であるが、フィルタ特性の更新の際には式(6)を計算しなければならず、計算量の点では文献[7]の方法に劣ることが結論される。

4まとめ

小文では、2次元原型フィルタを用いた1次元特性可変型フィルタの設計法を拡張することにより、2次元特性可変型フィルタの一設計法を提案した。また、これを2次元通過角可変型ファンフィルタに応用し、実際に2つの設計例を示した。設計されたフィルタは良好な特性を有しており、実用上十分であることが確認された。

本方法は、通過域と阻止域の振幅最大偏差および遷移域幅が設計の段階で予測可能である点、および対応する3次元原型フィルタを設計することにより、例えば通過方向可変型ファンフィルタなどの様々な特性可変型フィルタが設計可能である点等の利点を有する。その一方で欠点としては、本質的にフィルタ特性の更新に要する計算量が多い、可変範囲を広くとるとフィルタ特性が劣化する、さらに3次元原型フィルタの設計には膨大な

計算が必要である点などが挙げられる。これらの欠点の解決が今後の課題である。

参考文献

- [1] W. Schüessler and W. Winkelnkemper, "Variable digital filters", Arch. Electr. Übertr., vol. 24, pp. 524–525, 1970.
- [2] S. K. Mitra, Y. Neuvo and H. Roivainen, "Design of recursive digital filters with variable characteristics", Int. J. Cir. Theory and Appl., vol. 18, No. 2, pp. 107–119, Mar.–Apr. 1990.
- [3] A. V. Oppenheim, W. F. G. Mecklenbräuker and R. M. Mersereau, "Variable cutoff linear phase digital filters", IEEE Trans. Circuits Syst., vol. CAS-23, No. 4, pp. 199–203, Apr. 1976.
- [4] P. Jarske, Y. Neuvo and S. K. Mitra, "A simple approach to the design of linear phase FIR digital filters with variable characteristics", Signal Processing, vol. 14, No. 4, pp. 313–326, June 1988.
- [5] 吉田俊之, 西原明法, 藤井信生, “多次元フィルタを用いた特性可変型FIRフィルタの一設計法”, 第6回デジタル信号処理シンポジウム講演論文集, pp. 293–298, 平成3年12月。
- [6] S. S. Ahuja and S. C. Dutta Roy, "Variable-cutoff two-dimensional lowpass F.I.R. digital filters", Electron. lett., vol. 14, No. 14, pp. 422–423, July 1978.
- [7] 長谷川幹夫, 関口高志, 高橋進一, “スペクトル変換に基づく通過域可変2D FIRファンフィルタ”, 信学技報, CAS89-158, pp. 17–23, 平成2年3月
- [8] R. Zarour and M. M. Fahmy, "A design technique for variable two-dimensional recursive digital filters", Signal Processing, vol. 17, pp. 175–182, 1989.
- [9] 横口龍雄, 大木真, 川又政征 “3次元FIRデジタルフィルタの最適設計—線形計画法による設計法および対称性の利用による計算量の低減”, 信学論(A), vol. J70-A, No. 7, pp. 1042–1050, 昭和63年7月