設計自動化 62－12
(1992. 5.27)

非線形自己回帰移動平均モデルの多次元z変換による解析

市川　哲
京都大学工学部
京都市左京区吉田本町

あらまし　非線形の差分方程式で表わされる非線形自己回帰移動平均モデル（NARMAモデル）は巾広いクラスの非線形システムに対する統一的な表現として用いられており，Billings等によって解析が行なわれている．その方法の要点は非線形周波数応答関数の導入にあり，ボルテラ級数理論によって弱非線形システムの正弦波入力に対する定常応答を求める方法と同じである．線形差分方程式系の解法としてはz変換を用いる方法が存在する．非線形差分方程式系については，連続系のボルテラ級数法と類似の多次元z変換による解析法が存在する．本論文ではこの多次元z変換による解法と離散フーリエ変換を用いる解法について述べる．

An Analysis of Nonlinear Autoregressive Moving Average Model by Multi-dimensional z Transform

Faculty of Engineering, Kyoto University
Yoshida-honmachi Sakyou-ku Kyoto-shi, 606 Japan

Abstract　Nonlinear autoregressive moving average model (NARMA model) is used to represent input-output relationship for a wide class of nonlinear discrete-time systems. For many real nonlinear discrete-time systems, such as sampled data industrial systems, many can be modelled by polynomial NARMA models. The widespread use of z transform analysis plays an importa-nt role both in development of sampled data control theory and large variety of signal processing applications. Most nonlinear discrete-time representations have been based on the discrete Volterra model by multi-dimendional z transform. In this study, an analytical relationship between NARMA model and multidimensional z transform is derived. Also analysis by discrete Fourier transform method is presented.

1．まえがき

非線形時不変離散時間システムについて考える．このようなシステムに対して入出力関係がどのように表わされているかを知ることは，システムの解析や同定問題において重要なことである．

非線形の差分方程式で表わされる非線形自己回帰移動平均モデル（Nonlinear AutoRegressive Moving Average model 以下NARMAモデルと呼ぶ）は巾広いクラスの非線形システムに対する統一的な表現として用いられており，これに関してはBillings等によって多くの文献が発表されている[(1)~(4)]．その方法の要点は，非線形差分方程式系に対する非線形周波数応答関数の導入にあり，これによって種々の考察を行なっている．この考え方はボルテラ級数理論によって弱非線形システムの正弦波入力に対する定常応答を求める方法と結果的には同じである．

線形差分方程式系の解法の一つとしてｚ変換を用いる方法が主に制御工学やディジタル信号処理の分野において発展してきている．非線形差分方程式系に対しても，連続系の場合に対するボルテラ級数法と同じような考え方に基づいた多次元ｚ変換による解析法の有効性が示されている[(5),(6)]．そこで，本論文ではNARMAモデルに対する多次元ｚ変換の適用についての検討を行なう．さらに，離散フーリエ変換による解析法との関連についても検討する．

2．NARMAモデルの表現

次式で表わされる非線形時不変離散時間システムを考える．

$$y(k)=F[y(k-1),\cdots,y(k-n_y),u(k-1),\cdots,u(k-n_u)] \qquad (1)$$

ここで，F[·]は非線形関数である．このモデルは線形予測法において用いられる

$$y(k)=\sum_{i=1}^{ny} a_i y(k-i)+\sum_{i=1}^{nu} b_i u(k-i) \qquad (2)$$

なる自己回帰移動平均モデル（ARMAモデル）との類似性によりNARMAモデルと呼ばれる．

(1)式で表わされるNARMAモデルは巾広いクラスの非線形離散時間システムに適用できる．しかし，実際のシステムの同定問題等においては非線形関数F[·]の構造が未知である場合にその関数形を特定することは非常に困難である．

F[·]の形が既知であれば，同定問題はいくつかの未知パラメータを決定する問題に帰着できる．実際問題として工業プラントの同定等においては，多くのシステムが多項式NARMAシステムによって十分な精度でモデリングできることが示されている[(1)]．

以下では次式の多項式NARMAモデルを考える．

$$y(k)=\sum_{m=1}^{M} y_m(t) \qquad (3)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} y_m(k)=&\sum_{p=0}^{m}\ \sum_{n1=1}^{K}\cdots\cdots\sum_{np+q}^{K} c_{p,q}(n_1,\cdots,n_{p+q}) \\ &\prod_{i=1}^{p} y(k-n_i)\prod_{i=p+1}^{p+q} u(k-n_i) \\ &p+q=m \quad n_i=1,\cdots,K \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

であり，$c_{p,q}(n_1,\cdots,n_{p+q})$は$n_1,\cdots,n_{p+q}$により定まる定数である．

3．多次元ｚ変換による解析

3.1 多次元順ｚ変換

(4)式は差分方程式であるのでｚ変換により解析を行なう．そのために(3),(4)式を次のように展開して考える．

$$\begin{aligned} &y(k)-\sum_{n1=1}^{K} c_{1,0}(n_1)y(k-n_1) \\ &=\sum_{n1=1}^{K} c_{0,1}(n_1)u(k-n_1) \\ &+\sum_{n1=1}^{K}\sum_{n2=1}^{K} c_{2,0}(n_1,n_2)y(k-n_1)y(k-n_2) \\ &+\sum_{n1=1}^{K}\sum_{n2=1}^{K} c_{1,1}(n_1,n_2)y(k-n_1)u(k-n_2) \end{aligned}$$

$$+\sum_{n1=1}^{K}\sum_{n2=1}^{K} c_{0,2}(n_1,n_2)u(k-n_1)u(k-n_2)$$

$$+\cdots\cdots\cdots \qquad (5)$$

出力$y(k)$を入力に関して次式で表わす．

$$y(k)=y_1[u](k)+y_2[u^2](k)+y_3[u^3](k)+\cdots\cdot \qquad (6)$$

ここで$y_i[u^i](k)$, $i=2,3,\cdots$ は(5)式の非線形部分から生じる項で入力の値がA倍になればA^i倍になる項である．

この$y_1[u^i](k)$に対して次の多次元の関数$y*(k_1,k_2,\cdots.k_i)$を定義する．ここで

$$y_i(k)=y*(k_1,k_2,\cdots,k_i)\,|_{k1=k2=\ldots ki=k} \qquad (7)$$

となる．ただし，$[u^i]$は省略している．

(6)式のz変換を

$$Y(z)=Y_1(z)+Y_2(z)+Y_3(z)+\cdots \qquad (8)$$

とすると

$$\left.\begin{array}{l} Y_1(z)=H_1(z)U(z) \\ Y_2(z)=R^1[Y_2*(z_1,z_2)]=R^1[H_2(z_1,z_2) \\ \qquad U(z_1)U(z_2)] \\ Y_3(z)=R^2[Y_3*(z_1,z_2,z_3)]=R^2[H_3(z_1,z_2, \\ \qquad z_3)U(z_1)U(z_2)U(z_3)] \end{array}\right\} \qquad (9)$$

となる．$U(z)$は入力のz変換であり，$Y_i*(z_1, z_2,\cdots,z_i)$は$y_i*(k_1,k_2,\cdots,k_i)$の多次元z変換である．$R^i$はi回の縮約操作と呼ばれこれについては後ほど述べる．

$H_i(z_1,z_2,\cdots,z_i)$は与えられたシステムから機械的に求められる．この求め方を(5)の一般式に対して記すと複雑になるので，次の具体的な式によって説明する．

$$y(k)-0.7y(k-1)=0.3u(k-1)-0.02u(k-1)^2$$
$$-0.04u(k-2)u(k-1)-0.06y(k-1)u(k-3)$$
$$-0.08y(k-2)y(k-3) \qquad (10)$$

入力がA倍になったときに出力がA倍になる項は

$$y_1(k)-0.7y_1(k)=0.3u(k-1) \qquad (11)$$

となるから，このz変換は

$$Y_1(z)-0.7z^{-1}Y_1(z)=0.3z^{-1}U(z) \qquad (12)$$

となり，これより直ちに

$$\left.\begin{array}{l} Y_1(z)=H_1(z)U(z) \\ H_1(z)=0.3z^{-1}/(1-0.7z^{-1}) \end{array}\right\} \qquad (13)$$

が得られる．

出力がA^2倍になる項は

$$y_2*(k_1,k_2)-0.7y_2*(k_1-1,k_2-1)$$
$$=-0.02u(k_1-1)u(k_2-1)-0.04u(k_1-2)$$
$$u(k_2-1)-0.06y_1(k_1-1)u(k_2-3)$$
$$-0.08y_1(k_1-2)y_1(k_2-3) \qquad (14)$$

によって定まるから

$$Y_2*(z_1,z_2)-0.7z_1^{-1}z_2^{-1}Y_2*(z_1,z_2)$$
$$=-0.02z_1^{-1}z_2^{-1}U(z_1)U(z_2)-0.04z_1^{-2}$$
$$z_2^{-1}U(z_1)U(z_2)-0.06z_1^{-1}z_2^{-3}Y_1(z_1)$$
$$U(z_1)-0.08z_1^{-2}z_2^{-3}Y_1(z_1)Y_1(z_2) \qquad (15)$$

となり，前に求まっている$Y_1(z)$, $H_1(z)$を用いることによって次式のように表わすことができる．

$$\left.\begin{array}{l} Y_2*(z_1,z_2)=H_2(z_1,z_2)U(z_1)U(z_2) \\ H_2(z_1,z_2)=[-0.02z_1^{-1}z_2^{-1}-0.04z_1^{-2}z_2^{-1} \\ \quad -0.06z_1^{-1}z_2^{-3}H_1(z_1)-0.08z_1^{-2}z_2^{-3} \\ \quad H_1(z_1)H_1(z_2)]/(1-0.7z_1^{-1}z_2^{-1}) \end{array}\right\} \qquad (16)$$

A^3倍になる出力は

$$y_3*(k_1,k_2,k_3)-0.7y_3*(k_1-1,k_2-1,k_3-1)$$
$$=-0.06y_2*(k_1-1,k_2-1)u(k_3-3)$$
$$-0.08y_1(k_1-2)y_2*(k_2-3,k_3-3)$$
$$-0.08y_2*(k_1-2,k_2-2)y_1(k_3-3) \qquad (17)$$

によって定まる．これより

$$Y_3*(z_1,z_2,z_3)-0.7z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-1}Y_3*(z_1,$$
$$z_2,z_3)=-0.06z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-3}Y_2*(z_1,z_2)$$
$$U(z_3)-0.08z_1^{-2}z_2^{-3}z_3^{-3}Y_1(z_1)Y_2*(z_2,$$
$$z_3)-0.08z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-3}\ Y_2*(z_1,z_2)$$
$$Y_1(z_3) \qquad (18)$$

となり

$$\left.\begin{array}{l} Y_3*(z_1,z_2,z_3)=H_3(z_1,z_2,z_3)U(z_1) \\ \qquad U(z_2)U(z_3) \\ H_3(z_1,z_2,z_3)=[-0.06z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-3} \\ \quad H_2(z_1,z_2)-0.08z_1^{-2}z_2^{-3}z_3^{-3} \\ \quad H_1(z_1)H_2(z_2,z_3)-0.08z_1^{-2}z_2^{-2}z_3^{-3} \\ \quad H_2(z_1,z_2)H_1(z_3)]/(1-0.7z_1^{-1}z_2^{-1}z_3^{-1}) \end{array}\right\} \qquad (19)$$

先に求まっているH_1, H_2を用いてH_3が求められる．

4次以上の項についても同様の方法で求められる．

このようにNARMAモデルにおいては出力に表れる項の次数は無限にあるが(10)式にみられるように，本方法の適用の対象となるシステムの大部分では，出力に含まれる高次の項の発生する原因となる非線形項に掛かる係数は小さい，即ちシステムの非線形性が弱いので出力に含まれる高次の項の影響は少ない．そこで有限の次数で解析を打ち切ることが可能となる．

3.2 多次元z変換の縮約と逆z変換

前節で求まった各次元の出力のz変換形に対して(9)式の操作を行ない1次元のz変換形を導く方法について説明する．

n次の多次元z変換形$Y_n^*(z_1,z_2,\cdots,z_n)$が与えられたとき，その多次元逆z変換は次のように表わされる．

$$y_n^*(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},k_n) =(2\pi i)^{-n}\oint\cdots\oint Y_n^*(z_1,z_2,\cdots z_{n-1}, z_n)z_1^{k1-1},z_2^{k2-1},\cdots,z_{n-1}^{kn-1-1}, z_n^{kn-1}dz_1dz_2\cdots dz_{n-1}dz_n \quad (20)$$

ここで$\oint$は複素平面の単位円に沿っての積分であり，留数計算に帰着される．

上式の計算を実行し，(7)式に従って$k_1=k_2=\cdots=k_n=k$とすれば出力が計算できる訳であるがここでは以下のように考える．

(20)式において$k_n=k_{n-1}, z_{kn-1}z_{kn}=z'_{kn-1}$として$z'_{kn-1}$をあらためて$z_{kn-1}$と置き直すと

$$y_n^*(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1},k_{n-1}) =(2\pi i)^{-n}\oint\cdots\oint Y_n^*[z_1,z_2,\cdots, (z_{n-1}/z_n),z_n]z_1^{k1-1}z_2^{k2-1}\cdots z_{n-1}^{kn-1}dz_1dz_2\cdots(dz_{n-1}/z_n)dz_n \quad (21)$$

となる．

上式の左辺はn-1次元の関数であるのでこれを$y_{n-1}^*(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1})$として対応するz変換形を$Y_{n-1}^*(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1})$とすれば両者の関係は

$$y_{n-1}^*(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}) =(2\pi i)^{-n}\oint\cdots\oint Y_{n-1}^*(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}) z_1^{k1-1}z_2^{k2-1}\cdots z_{n-1}^{kn-1}dz_1dz_2\cdots dz_{n-1} \quad (22)$$

となっている．(21)，(22)式の左辺は同じものであるから，右辺においては

$$Y_{n-1}^*(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}) =(2\pi i)^{-1}\oint\{Y_n^*[z_1,z_2,\cdots,(z_{n-1}/z_n), z_n]/z_n\}dz_n \quad (23)$$

となっている．この操作を縮約と呼び

$$R^1[Y_n^*(z_1,z_2,\cdots,z_{n-1},z_n)] \quad (24)$$

と表わす．この操作をn-1回繰り返すことによって次のように1次元z変換形$Y_n(z)$が求められる．

$$Y_n(z)=(2\pi i)^{-n+1}\oint\cdots\oint Y_n^*[(z_1/z_2), (z_2/z_3),\cdots,(z_{n-1}/z_n),z_n](dz_2/z_2) \cdots(dz_n/z_n)\,|_{z1=z} \quad (25)$$

このように$n\geqq 2$次の出力においては1次の場合のようにHとUが分離された形では求められない．

このようにして1次元のz変換形が求まったら逆z変換は

$$y_n(k)=(2\pi i)^{-1}\oint Y_n(z)z^{k-1}dz \quad (26)$$

から求めることができる．これを考慮する次数の全てに対して行なえば出力が得られる．

4．離散フーリエ変換による解析

4.1 離散フーリエ変換による信号処理 (7)

N個の等間隔点でサンプリングされた信号値の系列

$$u(0),u(1),\cdots,u(N-1) \quad (27)$$

を考える．これに対して関数

$$u^*(t)=\sum_{n=0}^{N-1}u(n)\delta(t-n) \quad (28)$$

を導入し，そのフーリエ変換を求めると

$$U(\omega)=\int u^*(t)\exp(-i\omega t)dt = \sum_{n=0}^{N-1}u(n)\exp(-in\omega) \quad (29)$$

となる．

観測信号の長さはNであるので，$\omega_0=2\pi/N$として$\omega=k\omega_0$ $k=0,1,\cdots,N-1$における$U(\omega)$を

$$U(k)=\sum_{n=0}^{N-1}u(n)\exp(-i2\pi nk/N) \quad (30)$$

とする．これを(27)式の信号値系列の離散フーリエ変換という．

これに対しては

$$\sum_{k=0}^{N-1}U(k)\exp(i2\pi nk/N)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n'=0}^{N-1} u(n')\exp(-i2\pi n'k/N)\right]$$

$$\exp(i2\pi nk/N)=Nu(n) \quad n=n' \qquad (31)$$

となり

$$u(n)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} U(k)\exp(i2\pi nk/N) \qquad (32)$$

を離散フーリエ逆変換という．

(23)式をmステップだけ遅らせた関数

$$u^*_{-m}(t-m)=\sum_{n=0}^{N-1} u(n)\delta(t-n-m) \qquad (33)$$

に対するフーリエ変換は

$$U_{-m}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1} u(n)\exp[-i(n+m)\omega] \qquad (34)$$

となるから，この信号値系列と元の信号値系列の離散フーリエ変換の間には

$$U_{-m}(k)=\exp(-i2\pi mk/N)U(k) \qquad (35)$$

なる関係がある．

NARMAモデルにおいては前章で述べた非線形項の処理が問題となる．

今，二組の離散フーリエ変換対

$$\left.\begin{aligned} X(k)&=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)\exp(-i2\pi nk/N) \\ x(n)&=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\exp(i2\pi nk/N) \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} W(k)&=\sum_{n=0}^{N-1} w(n)\exp(-i2\pi nk/N) \\ w(n)&=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} W(k)\exp(i2\pi nk/N) \end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

を考える．

x(n)w(n)の離散フーリエ変換G(k)は

$$G(k)=\sum_{n=0}^{N-1} x(n)w(n)\exp(-i2\pi nk/N)$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1}(1/N)\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')\exp(i2\pi nk'/N)$$

$$w(n)\exp(-i2\pi nk/N)$$

$$=(1/N)\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')\sum_{n=0}^{N-1} w(n)$$

$$\exp[-i2\pi n(k-k')/N]$$

$$=(1/N)\sum_{k'=0}^{N-1} X(k')W(k-k') \qquad (38)$$

となる．W(k-k')はk-k'＜0のとき，W(N+k-k')の値とする．(38)式はまた

$$G(k)=(1/N)\sum_{k'=0}^{N-1} X(k-k')W(k') \qquad (39)$$

とも表わされる．

以上の関係によって非線形項の処理が可能となる．

4.2 NARMAモデルへの適用

今，NARMAモデル(14)式において1次の出力を考えると(15)式が得られるが，これを連続系

$$y_1(t)-0.7y_1(t-1)=0.3u(t-1) \qquad (40)$$

と考えてフーリエ変換を行なうと

$$Y_1(\omega)-0.7\exp(-i\omega)Y_1(\omega)$$
$$=0.3\exp(-i\omega)U(\omega) \qquad (41)$$

となり

$$\left.\begin{aligned} Y_1(\omega)&=H(\omega)[0.3\exp(-i\omega)U(\omega)] \\ H(\omega)&=1/[1-\exp(-i\omega)] \end{aligned}\right\} \qquad (42)$$

を得る.

(42)式の逆変換は

$$y_1(t)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} Y_1(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$
$$=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)[0.3\exp(-i\omega)]$$
$$U(\omega)\exp(i\omega t)d\omega \qquad (43)$$

となるが

$$U(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\exp(-i\omega t)dt$$

$$=2\pi(1/N)\sum_{k=0}^{N/2-1}[U(k)\delta(\omega-\omega_k)$$

$$+\overline{U(k)}\delta(\omega+\omega_k)] \qquad (44)$$

より

$$y_1(t)=(1/N)\sum_{k=0}^{N/2-1}[0.3H(k)\exp(-ik)U(k)$$

$$\exp(i\omega_k t)+0.3\overline{H(k)}\exp(ik)\overline{U(k)}\exp(-i\omega_k t)] \qquad (45)$$

となり，t=0,1,・・・,N-1の値を求めると

$$y_1(n)=0.3(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} H(k)U_{-1}(k)\exp(i2\pi nk/N) \quad (46)$$

となっている．

2次の出力については

$$y_2(t)-0.7y_2(t-1)=-0.02u(t-1)u(t-1)-0.04u(t-2)u(t-1)-0.06y_1(t-1)u(t-3)-0.08y_1(t-1)y_1(t-3) \quad (47)$$

となる．右辺の関数を$f_2[u,y_1]$とおいてフーリエ変換すると

$$Y_2(\omega)=H(\omega)F_2(\omega) \quad (48)$$

となる．ただし，$F_2(\omega)$は$f_2[u,y_1]$のフーリエ変換である．

これより

$$y_2(n)=(1/N)\sum_{k=1}^{N-1} H(k)F_2(k)\exp(i2\pi nk/N) \quad (49)$$

となる．u,y_1の離散フーリエ変換は既に求まっているので，$F_2(k)$は(35),(38)式の関係を適用することによって求められる．

3次の出力についても

$$y_3(t)-0.7y_3(t-1)=-0.06y_2(t-1)u(t-3)-0.16y_1(t-2)y_2(t-3) \quad (50)$$

となるから，右辺の離散フーリエ変換を$F_3(k)$として

$$y_3(n)=(1/N)\sum_{k=0}^{N-1} H(k)F_3(k)\exp(i2\pi nk/N) \quad (51)$$

となる．

5．むすび

非線形差分方程式で表わされるNARMAモデルに対する解析方法として，多次元z変換による解法と離散フーリエ変換を用いる解法についてその原理を説明した．ここでは式の誘導についてのみ行なっており，実際のモデルについての数値計算は行なっていない．

今後はモデルについての数値計算を行ない，多次元z変換法と離散フーリエ変換法との優劣について比較検討を行ないたい．

文献

(1) S. Chen and S. A. Billings:"Representation of non-linear systems:the NARMAX model",INT. J. CONTROL, **49** , No. 3, pp. 1013-1032(1989)

(2) J. C. Peyton Jones and S. A. Billings: "Recursive algorithm for computing the frequency response of a class of non-linear difference equation models",INT. J. CONTROL, **50** ,No. 5, pp. 1925-1940(1989)

(3) J. C. Peyton Jones and S. A. Billings: "Interpretation of non-linear frequency response functions",INT. J. CONTROL, **52** ,No. 2, pp. 319-346(1990)

(4) S. A. Billings and J. C. Peyton Jones: "Mapping non-linear integro-differential equations into the frequency domain",INT. J. CONTROL, **52** No. 4, pp. 863-879(1990)

(5) H. A. Barker:"Nonlinear sampled data system analysis by multidimensional z transform".P. IEE, **119** ,No. 9, pp. 1407-1413(1972)

(6) 市川 哲,竹村 稔,所 節夫:"多次元z変換とその縮約による非線形サンプル値システムの解析",信学論(A), **J65-A** ,No. 5, pp. 470-477(1982)

(7) 森下 巌 小畑秀文:"信号処理",計測自動制御学会(1982)