設 計 自 動 化 67−11
(1993. 6. 25)

多層多端子ネットの位相配線における ビア数最小化問題について

藤吉 邦洋* 梶谷 洋司*†

*北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科
†東京工業大学 電気電子工学科

多層基板で線幅, 線間の制限を考えずにビア数を最小とする配線経路と層割当を求める問題はネットを2端子ネットに限ったとしてもNP困難である. 本論文では, 多層多端子に拡張されたこの問題の最適解において, t 端子ネット当たりビア数の上限は $t-1$ であることを証明し, この上限数のビアを要する問題のクラスについて論ずる.

Multi-Layer Multi-Terminal Topological Via Minimization Problem

Kunihiro FUJIYOSHI*, and Yoji KAJITANI*†

*School of Information Science,
Japan Advanced Institute of Science and Technology, Hokuriku

†Department of Electrical and Electronic Engineering,
Tokyo Institute of Technology

To find a topological routing with the minimum number of vias on a multi-layer is NP-hard in general. This paper proves a theorem that a t-terminal net has at most $t-1$ vias in any optimum solution. Furthermore, a series of examples is shown in which any optimum solution forces a net to have such number of vias.

1. まえがき

VLSIやPCB(Printed Circuit Board)の配線は回路の複雑さに対応するために多層基板が採用されるが，異なる層の配線の間を結ぶビアは製造コスト，特性あるいは信頼性を悪化させる．従って，できるだけビアの数を減らすことが求められている．

配線設計におけるビア数最小化問題は，配線経路決定を問題に含めるかどうかによって二つに分類される．前もって経路が決められた配線に対して 適当な層を割り当てることによりビア数を最小化する問題は，CVM (Constrained Via Minimization) 問題と呼ばれている．これは，基本的な場合には 多項式時間で解けることが示されている [1][2][3]．一方，配線経路が決まっていない場合のビア数最小化問題は，様々に定式化される．その一つが本論文の対象で，Hsu[4] により提案されたTVM (Topological Via Minimization) 問題と呼ばれているものである．これは全ての端子が配線領域の外周上に並んでいるとし，線幅と線間の制限は考えずに，ビア数最小となる配線経路と層割当を求める問題である．これについては，全ネットが2端子ネットであっても一般に NP 困難であり [5][6]，いくつかの発見的手法が提案されている [4][7][8][9]．

2端子ネット TVM 問題における鍵となっている定理は，Sadowska[7] により示された「2端子ネット TVM 問題の最適解において一つの2端子ネットは高々1個のビアしか持たない」という定理であろう．

しかし，実際上，ビア数最小化問題は2端子ネットだけということは少なく，多端子ネットを扱わねばならない．これについては，分割統治法を用いて近似解を求める多項式時間オーダーの手法 [9] が提案されている．また，問題から得られるサークルグラフに対する 'partial coloring' が多層配線問題に対応することが示されている [10]．

k層多端子ネット TVM 問題は，図1に示すような配線領域を囲む外周上の端子列で与えられる．配線領域の周囲にはセル等が存在して，その端子を配線領域に出している．ネットのラベルを自然数$1, 2, \cdots, n$とし，ネットiの端子数をt_iとし，ネットiのt_i個の端子を区別するために$i^1, i^2, \cdots, i^{t_i}$と表すものとする．内部が$k$層の配線領域であり，一つのネットは任意の層から入り 他の層へ1個のビアで移ることができる．同一層で二つのネットが交差しないことが唯一のデザインルールである．

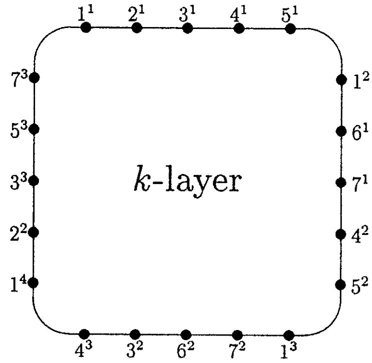

図1 多端子ネット TVM 問題の例
結線要求：端子 $i^1, i^2, \cdots, i^{t_i}$

本論文はこの多層多端子ネット TVM 問題を対象とし，Sadowska の定理が多端子ネット問題について一般化できることを示す．そして，その上限数のビアを要する問題のクラスについて論ずる．

2. ネット当たりのビア数の上限

多端子ネット TVM 問題は，端子とビアの性質をどのように定義するかにより細分される．本論文で対象とする端子とビアの性質は，以下のように定義されるものに限定する．端子の種類は，

SLP (single-layer pins)： 任意の一つの層だけと接続することができる端子 (図2(a) 参照)．

THP (through-hole pins)： 任意の複数の層と接続することができる端子 (図2(b) 参照)．

であり，ビアの種類は，

ALV (adjacent-layer vias)： 隣接する2つの層の間だけを接続することができるビア (図3(a) 参照)．

THV (through-hole vias)： 任意の複数の層の間を接続することができるビア (図3(b) 参照)．

である．

もし，配線層数kを2に限定して2層配線問題とすると，明らかに2種類のビア (ALV,THV) は縮退してし

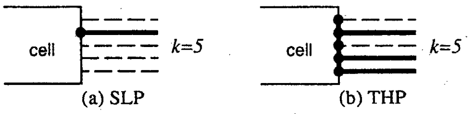

図2　端子の種類：横から見た図

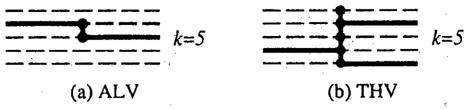

図3　ビアの種類：横から見た図

まい，区別の必要がなくなる．また，ネット当たりの端子数を 2 に限定して 2 端子ネット問題とすると，2 種類のビア (ALV,THV) と共に 2 種類の端子 (SLP,THP) も縮退してしまい，全く同様に扱うことができる．

以降，ビアの種類が限定される場合は 'ALV','THV' と明記するが，本論文で触れる範囲では SLP と THP は統一的に扱うことができるので，端子は SLP と THP のどちらでも (混合していても) よい．

今，TVM 問題の許容解の一つを求めるために，ネット毎に逐次的に結線していくことを考える．各々のネットの結線は，まず配線領域内の適当な位置にビアを置き，次にビアとビア，ビアと端子，端子と端子の間を結んでいくものとする．もし，この結線に失敗したとしたら，どれかの 2 点間を結ぶのに失敗したことになる．ここで，2 点の間を第 l 層配線を使って結ぶことができない場合について，以下の補題が得られる．

【補題 1】　k 層配線された配線領域において，二つの端子の間を結ぶビア無し第 l 層配線がなければ，配線領域内の任意の二つの位置に設けた点 a と点 b の間を第 l 層配線と交差せずに結ぶ経路が存在する．

(証明)　もし，この 2 点の間を第 l 層配線と交差せずに結ぶ経路が存在しないならば，第 l 層配線領域を点 a を含む領域と点 b を含む領域に分断する第 l 層配線が存在している．そして，第 l 層配線領域を分断する配線は必ず複数の端子の間を結んでいる．■

この補題により，配線領域を分断する配線がなければ，結線に失敗することはないことがわかる．すると，ネット毎のビア数の上限が次の二つの定理により与えられる．

【定理 1】　ビアが ALV に限定された多端子ネット k 層 TVM 問題の最適解 (ALV 数最小解) において，t 端子ネットは高々$(t-1)$ 個のビアしか持たない．

(証明)　$i^1, i^2, \cdots, i^t$ の端子からなる t 端子ネット i に対して，$v_i^1, v_i^2, \cdots, v_i^{t-1}$ は第 1 層と第 2 層を結ぶ ALV とし，$1 \le a \le t-1$ である v_i^a と i^a を第 1 層配線で結び，$1 \le a \le t-1$ である v_i^a と i^t を第 2 層配線で結ぶ．すると，ネット i は第 1 層と第 2 層の二つの層を用いて結線され，ネット i のどの 2 端子の間もビア無し配線により結ばれてはいない．従って，補題 1 から，ネット i の結線を先に行なった後他のネットを結線すれば，ネット i の配線が原因となって他のネットの結線に失敗することはない．■

【定理 2】　ビアが THV に限定された多端子ネット k 層 TVM 問題の最適解 (THV 数最小解) において，t 端子ネットは高々$\left\lceil\frac{t-1}{k-1}\right\rceil$個のビアしか持たない．

(証明)　$i^1, i^2, \cdots, i^t$ の端子からなる t 端子ネット i に対して，$v_i^1, v_i^2, \cdots, v_i^{\lceil\frac{t-1}{k-1}\rceil}$ は THV とし，$1 \le a \le \left\lceil\frac{t-1}{k-1}\right\rceil, 1 \le j < k$ である v_i^a と $i^{(a-1)(k-1)+j}$ を第 j 層配線で結び，$1 \le a \le \left\lceil\frac{t-1}{k-1}\right\rceil$ である v_i^a と i^t を第 k 層配線で結ぶ．すると，ネット i は第 1 層から第 k 層の k 層を用いて結線され，ネット i のどの 2 端子の間もビア無し配線により結ばれてはいない．従って，補題 1 から，ネット i の結線を先に行なった後他のネットを結線すれば，ネット i の配線が原因となって他のネットの結線に失敗することはない．■

3.　ネットあたりのビア数が上限値と等しくなる問題

本章では，ネット当たりのビア数が前章で求めた上限値と等しくなる問題のクラスを与える．ここでは説明を簡単にするために配線層数が 2 の場合について詳述し，最後に多層問題への拡張方法について触れる．なお，先にも述べたように，配線層数が 2 の場合は ALV と THV の二つの種類のビアが縮退しているので，2 種類のビアは統一的に扱われる．

特定の TVM 問題を表すのに端子列を用いるものとする．これは任意の端子を基準とし，そこから時計回りに配線領域外周上の全ての端子を読むことにより求めら

れたものとする．

h_yは２端子ネット yを表すものとする．h_y^1, h_y^2は h_y の二つの端子を表すものとする．$A^1(x), A^2(x)$ は各々，$h_{4x-2}, h_{4x-1}, h_{4x}, h_{4x+1}$の４個の２端子ネットの端子を一つずつ含んだ端子列を表し，

$$
\begin{aligned}
A^1(x) &= [h^1_{4x-2}, h^1_{4x-1}, h^1_{4x}, h^1_{4x+1}] \\
A^2(x) &= [h^2_{4x-1}, h^2_{4x-2}, h^2_{4x+1}, h^2_{4x}]
\end{aligned}
$$

と定義され，super 端子と呼ぶものとする．また，二つの super 端子により表される４個のネットの集合を super ネットと呼ぶものとする．super ネットは一つの２端子ネットと同様に扱うことができるが，２層配線するときに以下のような性質がある．

- ビア無し単層配線と交差しないときは，４個全てのネットをビア無し単層にて配線することができる．
- １本のビア無し単層配線と交差するとき，２個のネットをビア有り配線とする必要がある．

これらの性質は，一つの super ネット $A(x)$ に含まれる４個のネットは，２組のネット対 h_{4x-2}, h_{4x-1} と h_{4x}, h_{4x+1} 以外の全てのネット対が交差していることに起因する．

今，次に示す端子列により表される多端子ネット２層 TVM 問題$\Psi(t)$ を考える．

$$\left[A^1(1), 1^1, A^2(1), A^1(2), 1^2, A^2(2), \cdots, A^1(t), 1^t, A^2(t)\right]$$

$\Psi(t)$ ではネット１だけが t 端子ネットで，その他のネット $2, 3, \cdots, 4t, 4t+1$ の $4t$ 個のネットは t 個の super ネットに含まれた２端子ネットである．$\Psi(t)$ のビア数最小解でのビア数を $V(\Psi(t))$ と表すものとする．

$\Psi(t)$ においては，次の定理に示すように t 端子ネットが $(t-1)$ 個のビアを持つ解が唯一の最適解となる．$\Psi(4)$ の例を図４に示す．

【定理３】 多端子ネット２層 TVM 問題$\Psi(t)$ の唯一の最適解は，t 端子ネットであるネット１が $(t-1)$ 個のビアを持ち，他の全てのネットはビアを持たない解である．

(証明) $\Psi(2)$ について考えてみる．$\Psi(2)$ は２端子ネットだけからなるので，各々のネットの持つビア数の最大値は１である．$\Psi(2)$ のビア数最小解を求めるために，ネット１の持つビアの数により$\Psi(2)$ を分類して考える．

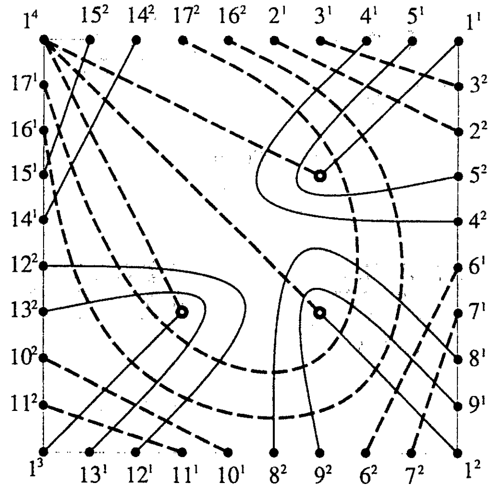

図４ $\Psi(4)$ の最適解の例

［ネット１のビア数は０］ super ネット $A(1), A(2)$ 共に２個のネットがビア有り配線となるので，ビア総数は４となる．

［ネット１のビア数は１］ super ネット $A(1), A(2)$ 共に全てのネットがビア無し単層で配線することができるので，ビア総数は１となる．

つまり，$\Psi(2)$ のビア数最小解は，ネット１だけがビア数１個で他の全てのネットはビア無し単層で配線された解に限定され，$V(\Psi(2)) = 1$ である．

$\Psi(i)$ のビア数最小解は，ネット１だけがビア数 $(i-1)$ 個で他の全てのネットはビア無し単層で配線された解に限定され，$V(\Psi(i)) = i-1$ と仮定する．

ここで$\Psi(i+1)$ について考えてみる．ネット１をビア数 i 個で配線し，他の全てのネットをビア無し単層で配線することが可能なので，

$$V(\Psi(i+1)) \le i$$

である．もし，この解が唯一のビア数最小解ではないと仮定すると，ネット１のビア数が $(i-1)$ 個以下の解が存在することになる．そこで，$d \ge 1$ な d を用いて，ネット１のビア数を $(i-d)$ 個とすると，ビア数が $(i-d)$ 個の $(i+1)$ 端子ネットにおいては，間の配線上にビアが存在しない端子対が少なくとも d 組ある．この端子対を結ぶ配線と交差している super ネットは少なくとも２個

のビアを必要とする．これにより，この解のビア総数は $(i-d)+2d=(i+d)$ 個以上となり矛盾する．従って，$\Psi(i+1)$ のビア数最小解はネット1だけがビア数 i 個で他の全てのネットはビア無し単層で配線された解に限定され，$V(\Psi(i+1))=i$ である．

これらにより，$\Psi(t)$ の唯一の最適解は，t 端子ネットであるネット1が $(t-1)$ 個のビアを持ち，他の全てのネットはビアを持たない解であることが帰納的に証明された． ■

定理3は2層配線の場合に限定していたが，これは容易に多層配線に拡張できる．配線層数を k とする場合，2層多端子ネットTVM問題 $\Phi(t)$ の定義で用いられているsuperネット $A(x)$ とsuper端子 $A^1(x), A^2(x)$ が変更され，superネット $A(x)$ は $h_{2k(x-1)+2}, h_{2k(x-1)+3}, \cdots, h_{2kx+1}$ の $2k$ 個の2端子ネットから成り，$A^1(x), A^2(x)$ は各々，

$$\begin{aligned} A^1(x) &= h^1_{2k(x-1)+2}, h^1_{2k(x-1)+3}, h^1_{2k(x-1)+4}, h^1_{2k(x-1)+5}, \\ &\quad \cdots, h^1_{2kx}, h^1_{2kx+1} \\ A^2(x) &= h^2_{2k(x-1)+3}, h^2_{2k(x-1)+2}, h^2_{2k(x-1)+5}, h^2_{2k(x-1)+4}, \\ &\quad \cdots, h^2_{2kx+1}, h^2_{2kx} \end{aligned}$$

と変更される．これにより，$\Phi(t)$ はALVとTHVの場合に共通に k 層多端子ネットTVM問題の上限数のビアを要する問題となる．

4. まとめ

2端子ネットTVM問題においてよく知られた，「2端子ネットTVM問題の最適解において一つの2端子ネットは高々1個のビアしか持たない」を拡張して，「ビアがALVに限定された多端子ネット k 層TVM問題の最適解において一つの t 端子ネットは高々 $(t-1)$ 個のALVしか持たない」と，「ビアがTHVに限定された多端子ネット k 層TVM問題の最適解において一つの t 端子ネットは高々 $\left\lceil \frac{t-1}{k-1} \right\rceil$ 個のTHVしか持たない」ことを証明した．更に，任意の t について，t 端子ネットが必ず上限と等しい数のビアを必要とするTVM問題を示すことにより，ネット当たりのビア数とその上限との関係は等号関係も成り立つものであることを示した．

参考文献

[1] Kajitani Y.: "On Via Hole Minimization of Routings on a 2-Layer Board", Proc. ICCC, pp. 295–298 (1980).

[2] Pinter R. Y.: "Optimal Layer Assignment for Interconnect", Proc. ICCC, pp. 398–401 (1982).

[3] 宮野浩, 梶谷洋司: "平面グラフの最大カットを求める効率的なアルゴリズム", 1990 信学秋季全大, A-47.

[4] Hsu C.-P.: "Minimum-Via Topological Routing", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-2**, 4, pp. 235–246 (1983).

[5] Sarrafzadeh M. and Lee D. T.: "A New Approach to Topological Via Minimization", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-8**, 8, pp. 890–900 (1989).

[6] Cong J. and Liu C. L.: "On the K-Layer Planar Subset and Topological Via Minimization Problems", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-10**, 8, pp. 972–981 (1991).

[7] Marek-Sadowska M.: "An Unconstrained Topological Via Minimization Problem for Two-Layer Routing", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-3**, 3, pp. 184–190 (1984).

[8] Chang K. C. and Du D. H.-C.: "Efficient Algorithms for Layer Assignment Problem", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-6**, 1, pp. 67–78 (1987).

[9] Xiong X.-M. and Kuh E. S.: "A Unified Approach to the Via Minimization Problem", IEEE Trans. Circuits & Syst., **CAS-36**, 2, pp. 190–203 (1989).

[10] Stallmann M., Hughes T., and Liu W.: "Unconstrained Via Minimization for Topological Multilayer Routing", IEEE Trans. Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., **CAD-9**, 9, pp. 970–980 (1990).