設計自動化　68－9
(1993. 10. 28)

EXBOUND: 多出力 AND-EXOR 論理式最小化プログラム

神田　徳夫
徳山工業高等専門学校
情報電子工学科
〒745　徳山市久米高城 3538

笹尾　勤
九州工業大学情報工学部
電子情報工学科
〒820　飯塚市大字川津 680-4

あらまし

本論文は，多出力ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式（ＥＳＯＰ）の積項数の下界とそれを用いたＥＳＯＰの最小化法について述べている．まず，多出力関数を多値入力１出力関数と考えることにより，多出力ＥＳＯＰの積項数の下界を評価する方法を与える．次に，この下界を用いた多出力ＥＳＯＰの簡単化アルゴリズムを与える．最後に，本アルゴリズムによって，10 変数までの乱数関数およびいくつかの算術演算回路のＥＳＯＰの最小性が保証できることを示す．

和文キーワード　組み合わせ論理回路　排他的論理和　論理式最小化

EXBOUND: A Minimization Program for AND-EXOR Expressions for Multiple output Functions

Norio KODA
Department of Computer Science
and Electronic Engineering
Tokuyama College of Technology
Tokuyama 745, Japan

Tsutomu SASAO
Department of Computer
Science and Electronics
Kyushu Institute of Technology
Iizuka 820, Japan

Abstract

This paper presents properties of Exclusive-OR Sum-of-Products expression (ESOP) for multiple output function and their simplification algorithm. First, lower bounds on the number of products in minimum ESOP(MESOP) for multiple output function are shown. Then, an algorithm to simplify ESOPs and to prove their minimality is presented. Exterimental results for arithmetic functions and randomly generated functions for up to 10 variables are shown.

英文 key words　combinational circuit, Exclusive-Or sum-of-products, logic minimization

1 まえがき

最近のＬＳＩは回路が非常に複雑になっており，論理回路の設計を自動的に行う論理自動合成システムが必須となっている．一般の論理回路は，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴを基本論理素子として設計される．しかし，算術演算回路や誤り訂正回路などでは，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴのみで構成するよりも，ＥＸＯＲゲートを併用するとゲート数を大幅に削減できる．そのため，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴの他にＥＸＯＲを併用した論理回路の自動合成システムを開発する必要がある．

ＥＸＯＲゲートを含む論理回路自動合成システムにおいては，ＡＮＤ－ＥＸＯＲ形論理式（ＥＳＯＰ）の最小化あるいは簡単化プログラムが必要となる．しかし，ＥＳＯＰの最小化問題はきわめて困難である．入力変数の個数が少ない場合は網羅的あるいは非常に時間がかかる方法により最小解が得られる[(5),(10),(15)]．入力変数の個数が５以下の場合は，これらの関数をＬＰ同値類に分類し，その同値類の代表関数の最小ＥＳＯＰを用いて，任意の５変数以下の関数の最小ＥＳＯＰを高速に求める方法が提案されている[(14)]．しかし，変数の個数が多い場合は，一般には最小化は困難であり，ヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化を行うことにより，準最小解を得ている[(3),(8)]．しかし，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムは，その簡単化結果の最小性を保証しない．

筆者らは，先に，与えられた関数の最小ＥＳＯＰの積項数の下界を評価することにより，１出力関数のＥＳＯＰの簡単化結果の最小性を保証する方法を提案し，４変数関数の最小ＥＳＯＰを用いて５変数関数のＥＳＯＰの最小化が可能であることを示した[(11),(13)]．本論文では，多出力関数の最小ＥＳＯＰの積項数の下界の評価法を提案し，これを用いた多出力関数のＥＳＯＰの簡単化法を与える．次に，５変数関数の最小ＥＳＯＰの積項数を利用することにより，１出力 10 変数関数で積項数が 19 程度のＥＳＯＰの簡単化およびその最小性の証明が可能であることを示す．また，代表的な多出力回路である算術演算回路に関して，最小性を証明できることを示す．

2 定義

本章では，諸定義について述べる．

［定義１］ Ｘを $P=\{0,1,\cdots,p-1\}$ のいずれかの値をとる変数とする． $S\subseteq P$， $S\neq\emptyset$ とするとき， X^S を X のリテラルとよび，

$$X^S=\begin{cases}1 & (X\in S \text{のとき})\\ 0 & (X\notin S \text{のとき})\end{cases}$$

と定義する． S の要素の個数が１個の場合， $X^{\{i\}}$ を X^i と表す． $p=2$ のとき， $x^0=\bar{x}$， $x^1=x$， $x^{\{0,1\}}=x^2=1$ と表す．

リテラルの論理積 $X_1^{S_1}X_2^{S_2}\cdots X_n^{S_n}$ を積項という．

［定義２］ 積項をＯＲで結合した式をＡＮＤ－ＯＲ形論理和形（ＳＯＰ）という．また，積項をＥＸＯＲで結合した式をＡＮＤ－ＥＸＯＲ形論理和形（ＥＳＯＰ）という．与えられた論理関数 f を表現する積項数最小のＳＯＰを最小ＳＯＰ（ＭＳＯＰ）という．また，与えられた論理関数 f を表現する積項数最小のＥＳＯＰを最小ＥＳＯＰ（ＭＥＳＯＰ）という．

［定義３］ ＥＳＯＰ論理式 F の積項数を $\tau(F)$， f のＭＥＳＯＰの積項数を $\tau(f)$ で表す．

［定義４］ n 変数関数のＭＥＳＯＰの積項数の最大値を $\psi(n)$ で表す．

［定義５］[(8)] 写像 $f: P_1\times P_2\times\cdots\times P_n\rightarrow B$， $P_i=\{0,1,\cdots,p_i-1\}$， $B=\{0,1\}$ を多値入力２値出力関数という．

［定義６］ 多値入力２値 m 出力関数を

$$f_i(X_1,X_2,\cdots,X_n)\quad (i=0,1,\cdots,m-1)$$

とする．このとき，

$$F(X_1,X_2,\cdots,X_n,X_{n+1}) = \bigvee_{i=0}^{m-1} X_{n+1}^{\{i\}}\cdot f_i(X_1,X_2,\cdots X_n)$$

を多出力関数 $(f_0,f_1,\cdots,f_{n-1})$ の特性関数という．ここで， X_{n+1} は，出力部を表す m 値変数である．

特性関数 F では．入力と出力の組み合わせが，元の多出力関数で許されるとき， $F=1$ となり，許されないとき， $F=0$ となる．

［注意１］[(8)] 多出力関数を表現するＥＳＯＰを最小化することと，与えられた多出力関数の特性関数を表現するＥＳＯＰを最小化することとは等価である．従って，多出力関数のＥＳＯＰの最小化問題は，その多出力関数の特性関数を求めることにより，多値入力２値１出力関数のＥＳＯＰの最小化問題として考えることができる．

［例１］ 表１は，２値２入力３出力関数 (f_0,f_1,f_2) を示している．この関数の特性関数は表２のようになる．特性関数 F のＭＥＳＯＰは，図１のカルノー図より，

$$F=X_1^{\{1\}}\cdot X_2^{\{1\}}\oplus X_3^{\{2\}}$$

となる．従って，３出力関数 (f_0,f_1,f_2) のＭＥＳＯＰは

$$\begin{aligned} f_0 &= f_1 = X_1^{\{1\}}\cdot X_2^{\{1\}}\\ f_2 &= X_1^{\{1\}}\cdot X_2^{\{1\}}\oplus 1\end{aligned}$$

となる．

表 1: 多出力関数

x_1	x_2	f_0	f_1	f_2
0	0	0	0	1
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	0

表 2: 特性関数

X_1	X_2	X_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	1
0	1	0	0
0	1	1	0
0	1	2	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	0	2	1
1	1	0	1
1	1	1	1
1	1	2	0

3　ＭＥＳＯＰの積項数の下界

本章では，与えられた関数を表現するＭＥＳＯＰの積項数の下界について考察する．

［定義７］ n 変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ において，

$\tau(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1q}) = \tau(f(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1q}))$,

$\tau(a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1q} : a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2q} : \cdots$

$$: a_{p1}, a_{p2}, \cdots, a_{pq}) \quad = \quad \tau(\sum_{i=1}^{p} \oplus \;\; f(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{iq}))$$

と表す．ここで,

$$\begin{aligned} & f(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{iq}) \\ & \quad = \quad f(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{iq}, x_{q+1}, x_{q+2}, \cdots, x_n), \end{aligned}$$

$a_{ij} \in \{0,1\}$, $i = (1, 2, \cdots, p)$, $j = (1, 2, \cdots, q)$ である．

［定理１］ [13] n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L1$ が成立する．ここで， $L1 = \{\tau(0) + \tau(1) + \tau(0:1)\}/2$ である．

［補題１］ [13] n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L2$ が成立する．ここで,

$L2 = \{\tau(0,0:0,1) + \tau(0,0:1,0) + \tau(1,1:0,1)$

$+ \tau(1,1:1,0)\}/2$ である．

［定義８］ $\boldsymbol{a} = (0,0,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,0,1)$, $\boldsymbol{c} = (0,1,1)$, $\boldsymbol{d} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{e} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{f} = (1,1,1)$, $\boldsymbol{g} = (1,0,1)$, $\boldsymbol{h} = (1,0,0)$ とする．このとき， $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ や $\{\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ は， B^3 上で１次元の立方体を形成するので， *1-cube* という．また， $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}\}$ や $\{\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}\}$ は，２次元の立方体を形成するので， *2-cube* という．また， $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}\}$ は３次

X_1X_2

X_3		00	01	11	10
	0			1	
X_3	1			1	
	2	1	1		1

図 1: 特性関数のカルノー図

（例題終）

元の立方体を形成するので， *3-cube* という．一般に， B^n の節点の部分集合が k 次元の立方体を形成するとき，これを *k-cube* という．また， B^n の各節点は， *0-cube* である．

［補題２］ n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L22$ が成立する．ここで,

$L22 = \{\tau(0,0) + \tau(0,1) + \tau(1,0) + \tau(1,1)$

$+ \tau(0,0:0,1) + \tau(0,0:1,0) + \tau(1,1:0,1)$

$+ \tau(1,1:1,0) + \tau(0,0:0,1:1,0:1,1)\}/4$

$$= \{ \sum_{\boldsymbol{a} \in B^2} \tau(\boldsymbol{a}) + \sum_{\substack{\{\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,\} \text{は 1-cube} \\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in B^2}} \tau(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b}) + \tau(\sum_{\boldsymbol{a} \in B^2} \oplus \;\; f(\boldsymbol{a}))\}/4$$

である．

（証明）付録１参照．

［補題３］ [13] n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L3$ が成立する．ここで,

$L3 = \{\tau(0,0,0 : 0,0,1) + \tau(0,0,0 : 0,1,0) + \tau(0,0,0 : 1,0,0) + \tau(0,1,1 : 0,0,1) + \tau(0,1,1 : 0,1,0) + \tau(0,1,1 : 1,1,1) + \tau(1,0,1 : 0,0,1) + \tau(1,0,1 : 1,0,0) + \tau(1,0,1 : 1,1,1) + \tau(1,1,0 : 0,1,0) + \tau(1,1,0 : 1,0,0) + \tau(1,1,0 : 1,1,1)\}/4$ である．

［補題４］ n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L32$ が成立する．ここで,

$$L32 = \{ \sum_{\boldsymbol{a} \in B^3} \tau(\boldsymbol{a}) + \sum_{\substack{\{\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,\} \text{は 1-cube} \\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in B^3}} \tau(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b})$$

$$+ \sum_{\substack{\{\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \,\} \text{は 2-cube} \\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \in B^3}} \tau(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b} : \boldsymbol{c} : \boldsymbol{d}) + \tau(\sum_{\boldsymbol{a} \in B^3} \oplus \; f(\boldsymbol{a}))\}/8$$ である．

（証明）補題２と同様にして証明できる．

［補題５］ n 変数論理関数 f において， $\tau(f) \geq L4$ が成立する．ここで,

$$L4 = \{ \sum_{\boldsymbol{a} \in B^3} \tau(\boldsymbol{a}) + \sum_{\substack{\{\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \,\} \text{は 1-cube} \\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in B^4}} \tau(\boldsymbol{a} : \boldsymbol{b})$$

$$+ \sum_{\substack{\{a,b,c,d\} \text{ は 2-cube} \\ a,b,c,d \in B^4}} \tau(a:b:c:d)$$

$$+ \sum_{\substack{\{a,b,c,d,e,f,g,h\} \text{ は 3-cube} \\ a,b,c,d,e,f,g,h \in B^4}} \tau(a:b:c:d,e,f,g,h)$$

$+\tau(\sum_{a\in B^4}^{\oplus} f(a))\}/16$ である．

（証明）補題2と同様にして証明できる．

$L1 \sim L4$ は，2値入力1出力関数のＥＳＯＰの積項数の下界の評価に利用できる．$\psi(2)=2$，$\psi(3)=3$，$\psi(4)=6$，$\psi(5)=9$，$\psi(n)=2^{n-2}(n\geq 6)$ であるから (12)，これらの下界の最大値の比較は表3のようになる．

［補題6］ $M=\{0,1,\cdots,m-1\}$ とし，$A\subseteq M$，$A\neq\emptyset$ とし，A の要素を奇数個含む M の部分集合を $E(A)$ とする．$\alpha(A)$ を任意の関数とするとき，次式が成立する．

$$\sum_{A\subseteq M}\sum_{E(A)\subseteq M}\alpha(E(A)) = 2^{m-1}\sum_{A\subseteq M}\alpha(A).$$

［例2］ $m=2$ のとき，

$$\sum_{E(\{0\})}\alpha(E(\{0\})) + \sum_{E(\{1\})}\alpha(E(\{1\})) + \sum_{E(\{0,1\})}\alpha(E(\{0,1\}))$$
$$= [\alpha(\{0\})+\alpha(\{0,1\})] + [\alpha(\{1\})+\alpha(\{0,1\})] + [\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})]$$
$$= 2[\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})+\alpha(\{0,1\})].$$

$m=3$ のとき，

$$\sum_{E(\{0\})}\alpha(E(\{0\})) + \sum_{E(\{1\})}\alpha(E(\{1\})) + \sum_{E(\{2\})}\alpha(E(\{2\}))$$
$$+ \sum_{E(\{0,1\})}\alpha(E(\{0,1\})) + \sum_{E(\{0,2\})}\alpha(E(\{0,2\}))$$
$$+ \sum_{E(\{1,2\})}\alpha(E(\{1,2\})) + \sum_{E(\{0,1,2\})}\alpha(E(\{0,1,2\}))$$
$$= [\alpha(\{0\})+\alpha(\{0,1\})+\alpha(\{0,2\})+\alpha(\{0,1,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{1\})+\alpha(\{0,1\})+\alpha(\{1,2\})+\alpha(\{0,1,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,2\})+\alpha(\{1,2\})+\alpha(\{0,1,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})+\alpha(\{0,2\})+\alpha(\{1,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{0\})+\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,1\})+\alpha(\{1,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{1\})+\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,1\})+\alpha(\{0,2\})]$$
$$+ [\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})+\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,1,2\})]$$
$$= 2^2[\alpha(\{0\})+\alpha(\{1\})+\alpha(\{2\})+\alpha(\{0,1\}) + \alpha(\{0,2\})+\alpha(\{1,2\})+\alpha(\{0,1,2\})].$$

［定理2］多値入力関数を

$f(x_1,x_2,\cdots,x_k,Y): B^k\times M\rightarrow B$,

$M=\{0,1,\cdots,m-1\}$，$B=\{0,1\}$ とするとき，$\tau(f)\geq Lm$ が成立する．ここで，

$$Lm = 2^{-m+1}\sum_{A\subseteq M}\tau(f(:A)),$$

$$f(:A) = \sum_{i\in A}^{\oplus} f(|Y=i),\ \text{また，}\ \sum_{A\subseteq M}\ \text{は，}$$

空でない M の全ての部分集合に関する和である．

（証明）f のＭＥＳＯＰを

$$F = \sum_{A\subseteq M}^{\oplus} Y^A\, G(A) \qquad (1)$$

とする．ここで，$G(A)$ は，$x_1,x_2,\cdots,x_k$ だけからなるＥＳＯＰである．(1) において，変数 Y に定数 i を代入すると，

$$F(|Y=i) = \sum_{i\in B\subseteq M}^{\oplus} G(B)$$

を得る．上式と $f(:A)$ の定義より，

$$f(:A) = \sum_{i\in A}^{\oplus}\ \sum_{i\in B\subseteq M}^{\oplus} G(B) = \sum_{E(A)\subseteq M}^{\oplus} G(E(A)) \qquad (2)$$

ここで，$E(A)$ は，A の要素を奇数回含む集合，と変形できる．(2) の積項数に関して，

$$\tau(f(:A)) \leq \sum_{E(A)\subseteq M}\tau(G(E(A)))$$

を得る．これより，

$$\sum_{A\subseteq M}\tau(F(:A)) \leq \sum_{A\subseteq M}\sum_{E(A)\subseteq M}\tau(G(E(A))) \qquad (3)$$

が成立する．ところで，補題6より，

$$\sum_{A\subseteq M}\sum_{E(A)\subseteq M}\tau(G(E(A))) = 2^{m-1}\sum_{A\subseteq M}\tau(G(A))$$

が成り立ち，また (1) の積項数に関して，

$$\tau(f) = \sum_{A\subseteq M}\tau(G(A))$$

が成立するので，(3) より，

$$\sum_{A\subseteq M}\tau(f(:A)) \leq 2^{m-1}\tau(f)$$

を得る．これより，定理が成立する．　（証明終）

定理2は，多値入力関数のＭＥＳＯＰの積項数の下界を与える．注意1より，定理2の変数 Y を多出力関数の出力部を表す多値変数と考えることにより，定理2を，多出力関数のＭＥＳＯＰの積項数の下界の評価に利用できる．また，与えられた関数が2値入力多出力関数の場合，関数 $f(:A)$ は2値入力1出力関数となるので，$f(:A)$ のＥＳＯＰの積項数の評価には下界 $L1\sim L4$ が利用できる．

［系1］ n 入力 m 出力関数 $f_i: B^n\rightarrow B$ $(i=0,1,\cdots,m-1)$ のＥＳＯＰの積項数に関して，次の関係が成立する．

$m=2$ のとき，

$\tau(f)\geq 2^{-1}[\tau(f_0)+\tau(f_1)+\tau(f_0\oplus f_1)]$.

$m=3$ のとき，

$\tau\geq 2^{-2}[\tau(f_0)+\tau(f_1)+\tau(f_2)+\tau(f_0\oplus f_1)$

表 3: 下界の最大値の比較

n	$L1$	$L2$	$L22$	$L3$	$L32$	$L4$	Ln *)
6	14	12	14	9	11	11	14
7	≤ 24	18	21	18	21	16	21
8	≤ 48	≤ 32	≤ 36	27	31	31	31
9	≤ 96	≤ 64	≤ 72	≤ 48	≤ 54	46	46
≥ 10	$\leq 3 \cdot 2^{n-3}$	$\leq 2^{n-3}$	$\leq (9/8) \cdot 2^{n-3}$	$\leq (3/4) \cdot 2^{n-3}$	$\leq (27/32) \cdot 2^{n-3}$	$\leq (81/128) \cdot 2^{n-3}$	$9 \cdot (3/2)^{n-5}$

*) 後述

$+\tau(f_0 \oplus f_2) + \tau(f_1 \oplus f_2) + \tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2)]$.

$m = 4$ のとき,

$$\begin{aligned}\tau(f) \geq 2^{-3}[&\tau(f_0) + \tau(f_1) + \tau(f_2) + \tau(f_3)\\ &+ \tau(f_0 \oplus f_1) + \tau(f_0 \oplus f_2) + \tau(f_0 \oplus f_3)\\ &+ \tau(f_1 \oplus f_2) + \tau(f_1 \oplus f_3) + \tau(f_2 \oplus f_3)\\ &+ \tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2) + \tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_3)\\ &+ \tau(f_0 \oplus f_2 \oplus f_3) + \tau(f_1 \oplus f_2 \oplus f_3)\\ &+ \tau(f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3)].\end{aligned}$$

［定義９］ n 変数論理関数 f において，各変数のリテラルが１個だけ含まれている積項を最小項という．関数 f に包含される最小項を f の最小項という． f の最小項の集合を $M(f)$ で表す．また， $v \in M(f)$ とし， v および v を含む積項の集合を $E(v)$ で表す．

［補題７］多値入力関数を

$f(x_1, x_2, \cdots, x_k, Y) : B^k \times M \to B$,

$M = \{0, 1, \cdots, m-1\}$， $B = \{0, 1\}$ とし， $v \in M(f)$, $q_i \in E(v) (i = 1, 2, \cdots, m \cdot 2^k)$ とするとき， $\tau(f) \geq La$ が成立する．ここで,

$$La = 1 + \min_i \{\tau(f \oplus q_i)\}$$

である．

［注意２］補題７は，文献 13 の補題９の多値入力関数への拡張である．これにより，下界の値を１増やせる可能性がある．

4　ＥＳＯＰの簡単化アルゴリズム

現在，６変数以上の任意の関数のＭＥＳＯＰは容易には得られないので，表３の $L1 \sim L4$ の不等号で示した部分の下界は実際には得られず，10 変数以上の関数のＥＳＯＰの下界の評価ができない．さて， $n(\geq 6)$ 変数関数をある変数で展開すると $(n-1)$ 変数関数の部分関数が得られる．この展開を各部分関数に順次適用することにより，いくつかの５変数部分関数が得られる．このことを利用すると，10 変数以上の関数のＥＳＯＰの下界の評価ができる．

＜アルゴリズム１（下界 Ln）＞

getlwr(n:*number of inputs*, f:*function*)
{
  if($n \leq 5$) then return $\tau(f)$;
  $tmax = 0$;
  for(*for all input variables*){
    $f = \bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$;
    $t0$=getlwr($n-1, f_{i0}$);
    $t1$=getlwr($n-1, f_{i1}$);
    $t2$=getlwr($n-1, f_{i0} \oplus f_{i1}$);
    $t = (t1 + t2 + t3)/2$;
    if($t > tmax$) then $tmax = t$;
  }
  return $tmax$;
}

下界 Ln の最大値を表３の最後の列に示す．

現在迄，５変数以下の任意の２値入力１出力関数を表現するＭＥＳＯＰは，テーブル探索により高速に得る方法が確立されている．しかし，変数の個数が６以上の場合や多出力関数の場合は，これらを表現するＭＥＳＯＰを効率良く求める方法は確立されていなく，一般には，ヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化が行われるが，簡単化結果の最小性は保証されない．そこで，前章で検討した，与えられた関数のＥＳＯＰの積項数の下界の評価法と，５変数以下の関数のＭＥＳＯＰの表，及び，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムＥＸＭＩＮ２ [8] を組み合わせることにより，ＥＳＯＰの簡単化アルゴリズムが得られる．

＜アルゴリズム２（１出力関数のＥＳＯＰの簡単化）＞

minin(n:*number of inputs*, f:*function*)
{
  if($n \leq 5$) then return *MESOP for f*;
  for(*all input variables*){
    $f = \bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$;
    F_{i0}=minin($n-1, f_{i0}$);

F_{i1}=minin($n-1, f_{i1}$);
F_{i2}=minin($n-1, f_{i0} \oplus f_{i1}$);
G_{i0}=exmin2($\bar{x}_i F_{i0} \oplus x_i F_{i1}$);
G_{i1}=exmin2($F_{i0} \oplus x_i F_{i2}$);
G_{i2}=exmin2($F_{i1} \oplus \bar{x}_i F_{i2}$);
}
return G_{ij} *where*

$$\tau(G_{ij}) = \min_i[\min\{\tau(G_{i0}), \tau(G_{i1}), \tau(G_{i2})\}];$$

}
exmin2(F:*ESOP*){ return *simplified ESOP for F by EXMIN2*;}

<アルゴリズム３（多出力関数のＥＳＯＰの簡単化）>
1）各出力関数のＥＳＯＰをアルゴリズム２で簡単化する．
2）１で得られたＥＳＯＰを用いて，与えられた多出力関数の特性関数のＥＳＯＰを得る．
3）２で得られた特性関数のＥＳＯＰをＥＸＭＩＮ２で簡単化する．

<アルゴリズム４（ＥＳＯＰの最小性保証）>
1) 与えられた関数を表現するＥＳＯＰの積項数の下界を求め，これを LB とする．
2) 与えられた関数を表現するＥＳＯＰをアルゴリズム３で簡単化する．簡単化したＥＳＯＰの積項数を τ_a とする．
3) もし $LB = \tau_a$ ならば，簡単化したＥＳＯＰは最小解である．もし $LB \neq \tau_a$ ならば，簡単化結果の最小性は保証されない．

5 実験結果

表４は，２値７入力１出力乱数関数をＥＸＭＩＮ２によって簡単化したときの積項数と，各種下界の平均値を示す．これより，下界の比較は，平均すると，$Ln > L22 > L2 > L32 > L4 > L3$ となる．しかし，関数によっては，下界の大きさがこの順とはならない場合がある．
表５は，10変数以下の２値入力１出力乱数関数をアルゴリズム４によって簡単化したときの最小性保証の割合を示す．これより，10変数関数で積項数が19程度までのＥＳＯＰの最小性の証明ができた．

表６は，多出力乱数関数をアルゴリズム４によって簡単化したときの最小性が保証できた関数の割合を示す．これより，６積項以下のＥＳＯＰの場合は，比較的高い割合で最小解が得られる．また，代表的な算術演算回路[17]のＥＳＯＰを簡単化した結果を表７に示す．ＭＬＰ２，ＡＤＲ２，ＮＲＭ２及びＲＤＭ４については最小性の保証ができた．

なお，アルゴリズム４では，ヒューリスティックな簡単化プログラムＥＸＭＩＮ２が用いられている．このため，今後のＥＸＭＩＮ２の改善により，本実験結果が変化することがあり得る．

表 4: 各種下界の比較（７変数乱数関数）

積項数	下界の平均					
	$L2$	$L22$	$L3$	$L32$	$L4$	Ln
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.50	2.00	1.50	2.00	2.00	2.00
3	2.51	3.00	2.50	3.00	3.00	3.00
4	3.52	4.00	3.19	4.00	4.00	4.00
5	4.54	5.00	3.80	5.00	4.99	5.00
6	5.51	5.99	4.55	5.95	5.76	5.99
7	6.50	6.97	5.45	6.76	6.30	6.99
8	7.46	7.83	6.11	7.34	6.94	7.97
9	8.30	8.59	6.75	8.02	7.48	8.88
10	9.07	9.22	7.46	8.58	7.96	9.60
11	9.80	9.98	8.09	9.18	8.46	10.34
12	10.42	10.60	8.67	9.71	8.92	11.10
13	10.95	11.20	9.14	10.24	9.37	11.74
14	11.37	11.75	9.56	10.70	9.79	12.33

表 5: 最小性が保証できた関数の割合（%）（１出力関数）

積項数	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
1	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
2	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
3	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
6	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
7	100.0	99.2	100.0	100.0	100.0
8	97.3	98.2	100.0	100.0	100.0
9	89.3	90.6	100.0	100.0	100.0
10	78.7	66.6	95.2	100.0	100.0
11	43.7	36.5	93.3	96.2	100.0
12	0.0	11.4	72.2	95.8	100.0
13		3.7	60.0	91.3	100.0
14		0.5	8.0	80.0	100.0
15		0.0	0.0	45.8	100.0
16		0.0	0.0	23.5	83.3
17		0.0	0.0	0.0	83.0
18		0.0	0.0	0.0	66.0
19		0.0	0.0	0.0	9.1
20		0.0	0.0	0.0	0.0

6 むすび

本論文では，従来の２値入力１出力関数のＥＳＯＰの積項数の下界の評価法を拡張して多出力関数のＥＳＯＰの積項数の下界の評価法を提案し，多出力関数簡単化アルゴリズム

表 6: 最小性が保証できた関数の割合（%）（多出力関数）

積項数	4入力					5入力					6入力				
	2出力	3出力	4出力	5出力	6出力	2出力	3出力	4出力	5出力	6出力	2出力	3出力	4出力	5出力	6出力
3	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
4	100.0	92.3	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
5	100.0	92.0	96.0	93.3	100.0	95.8	100.0	100.0	92.9	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
6	94.7	87.0	79.2	76.9	59.1	95.4	84.2	100.0	90.0	61.5	100.0	100.0	100.0	100.0	100.0
7	30.8	63.8	58.6	30.4	20.0	85.7	56.5	64.7	35.3	46.7	100.0	100.0	91.7	100.0	100.0
8	0.0	2.7	0.0	0.0	0.0	60.0	31.8	42.1	0.0	17.6	100.0	100.0	81.3	92.9	100.0
9		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	3.4	0.0	0.0	0.0	94.4	70.0	86.7	76.9	70.6
10			0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	52.2	37.5	64.3	47.1	41.7
11				0.0	0.0		0.0	0.0	0.0	0.0	26.7	33.3	9.1	4.7	30.0
12								0.0	0.0	0.0	0.0	16.7	4.8	0.0	0.0
13								0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

注) 空欄は，該当する積項数の乱数関数が得られなかったことを示す.

表 7: 算術演算回路の最小化

回路	入力	出力	積項	下界
MLP2	4	4	5	5
MLP3	6	6	18	15
ADR2	4	3	7	7
ADR3	6	4	15	13
NRM2	4	3	7	7
NRM3	6	4	26	17
SQR4	4	8	15	8
SQR6	6	12	38	15
ROT4	4	3	8	7
ROT6	6	4	17	14
LOG4	4	4	10	8
LOG6	6	6	33	19
WGT4	4	3	9	8
WGT6	6	3	22	19
RDM4	4	4	6	6
RDM6	6	6	15	12
INC4	4	5	7	6
INC6	6	7	11	10

を与えた．1出力関数の場合，10変数で積項数が19程度のＥＳＯＰの最小性の保証が可能である．また，多出力関数の場合，代表的な算術演算回路の一部については最小性の保証ができた．現在，ＥＳＯＰの簡単化はヒューリスティックなアルゴリズムによって行われている．しかし，これらのアルゴリズムは簡単化結果の最小性を保証しない．これらのアルゴリズムとＥＳＯＰの積項数の下界の評価法を組み合わせることにより，効率の良い簡単化が可能となる．

謝辞

本研究は，一部文部省科学研究費による．

参考文献

[1] M.A. Harrison: *Introduction to Switching and Automata Theory*, McGraw Hill, 1965.

[2] M. Davio, J.P. Deschamps and A. Thayse: *Discrete and Switching Functions*, McGraw-Hill International, 1978.

[3] M. Helliwell and M. Perkowski: "A fast algorithm to minimize multi-output mixed-polarity generalized Reed-Muller forms", *Proc. of the 25th Design Automation Conference*, pp.427-432, June 1988.

[4] T. Sasao and P.W. Besslich: "On the complexity of MOD-2 SUM PLA's", *IEEE Trans. on Compt.*, vol.39, No.2, pp.262-266, Feb. 1990.

[5] M. Perkowski and M. Chrzanowska-Jeske: "An exact algorithm to minimize mixed-radix exclusive sums of products for incompletely specified Boolean functions", *Proc. International Sympo. on Circuits and Systems*, pp.1652-1655, May 1990.

[6] T. Sasao: "A transformation of multiple-valued input two-valued output functions and its application to simplification of exclusive-or sum-of-products expressions", *Proc. of the 21th International Symposium on Multiple-Valued Logic*, pp.270-279, May 1991.

[7] T. Sasao: "AND-EXOR expressions and their optimization", in Sasao(ed.) *Logic Synthesis and Optimization*, Kluwer Academic Publishers, pp.287-312, Jan. 1993.

[8] T. Sasao: "EXMIN2: A simplification algorithm for Exclusive-Or-Sum of products expressions for multiple-valued input two-valued output functions", *IEEE Trans. on CAD* Vol.12, No.5, pp.621-632, May 1993.

[9] 室賀三郎, 笹尾勤訳: 論理設計とスイッチング理論，共立出版 (1981).

[10] 神田徳夫, 笹尾勤:" 4変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質", 信学論 (D-I), J74-D-I, 11, pp.765-773 (1991-11).

[11] 神田徳夫, 笹尾勤:" 5変数ＡＮＤ - ＥＸＯＲ論理式の簡単化について", 1990 信学秋季全大,SA-3-3, pp.1-288(1990).

[12] 神田徳夫, 笹尾勤:" ＡＮＤ - ＥＸＯＲ最小論理式の積項数の上界について", 信学論 (D-I), J75-D-I, 3, pp.135-142(1992-3).

[13] 神田徳夫, 笹尾勤:"下界定理を用いたＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式の簡単化法", 信学論 (D-I), J76-D-I, 1, pp.1-10(1993-1).

[14] 神田徳夫, 笹尾勤:"論理関数のＬＰ特徴ベクトルとその応用", 信学論 (D-I), J76-D-I, 6, pp.260-268(1993-6).

[15] T. Sasao: "An exact minimization of AND-EXOR expressions using BDDs", *IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 16, 1993.

[16] N. Koda and T. Sasao: "LP characteristic vector of logic functions", *IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 16, 1993.

[17] 笹尾勤: "ＰＬＡの作り方・使い方", 日刊工業新聞社, 1986.

付録

１．補題２の証明

関数 f のＭＥＳＯＰを F とし，次のように表されるとする．

$$\begin{aligned}&F(0,0)x^0y^0 \oplus F(0,1)x^0y^1 \oplus F(0,2)x^0y^2\\ &\oplus F(1,0)x^1y^0 \oplus F(1,1)x^1y^1 \oplus F(1,2)x^1y^2\\ &\oplus F(2,0)x^2y^0 \oplus F(2,1)x^2y^1 \oplus F(2,2)x^2y^2\\ &= f(x,y)\end{aligned} \tag{A1}$$

ここで，$f(a,b)(a,b \in \{0,1,2\})$ は，変数 x も y も含まないＥＳＯＰである．式 (A1) において，$(x,y)=(0,0),(1,1),(0,1),(1,0)$ とおくと，

$$F(0,0) \oplus F(0,2) \oplus F(2,0) \oplus F(2,2) = f(0,0) \tag{A2}$$

$$F(1,1) \oplus F(1,2) \oplus F(2,1) \oplus F(2,2) = f(1,1) \tag{A3}$$

$$F(0,1) \oplus F(0,2) \oplus F(2,1) \oplus F(2,2) = f(0,1) \tag{A4}$$

$$F(1,0) \oplus F(1,2) \oplus F(2,0) \oplus F(2,2) = f(1,0) \tag{A5}$$

を得る．式 (A2) と (A4) より，

$$F(0,0) \oplus F(0,1) \oplus F(2,0) \oplus F(2,1) = f(0,0) \oplus f(0,1) \tag{A6}$$

を得る．式 (A2) と (A5) より，

$$F(0,0) \oplus F(0,2) \oplus F(1,0) \oplus F(1,2) = f(0,0) \oplus f(1,0) \tag{A7}$$

を得る．式 (A3) と (A4) より，

$$F(0,1) \oplus F(0,2) \oplus F(1,1) \oplus F(1,2) = f(1,1) \oplus f(0,1) \tag{A8}$$

を得る．式 (A3) と (A5) より，

$$F(1,0) \oplus F(1,1) \oplus F(2,0) \oplus F(2,1) = f(1,1) \oplus f(1,0) \tag{A9}$$

を得る．式 (A2) ～ (A5) より，

$$\begin{aligned}&F(0,0) \oplus F(0,1) \oplus F(1,0) \oplus F(1,1)\\ &= f(0,0) \oplus f(0,1) \oplus f(1,0) \oplus f(1,1)\end{aligned} \tag{A10}$$

を得る．$\tau(F(a,b)) = \tau_F(a,b)$ とすると，式 (A2) ～ (A10) より，

$\tau_F(0,0)+\tau_F(0,2)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,2) \geq \tau(0,0)$,
$\tau_F(1,1)+\tau_F(1,2)+\tau_F(2,1)+\tau_F(2,2) \geq \tau(1,1)$,
$\tau_F(0,1)+\tau_F(0,2)+\tau_F(2,1)+\tau_F(2,2) \geq \tau(0,1)$,
$\tau_F(1,0)+\tau_F(1,2)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,2) \geq \tau(1,0)$,
$\tau_F(0,0)+\tau_F(0,1)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,1) \geq \tau(0,0:0,1)$,
$\tau_F(0,0)+\tau_F(0,2)+\tau_F(1,0)+\tau_F(1,2) \geq \tau(0,0:1,0)$,
$\tau_F(0,1)+\tau_F(0,2)+\tau_F(1,1)+\tau_F(1,2) \geq \tau(1,1:0,1)$,
$\tau_F(1,0)+\tau_F(1,1)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,1) \geq \tau(1,1:1,0)$,
$\tau_F(0,0)+\tau_F(0,1)+\tau_F(1,0)+\tau_F(1,1) \geq \tau(0,0:0,1:1,0:1,1)$

を得る．上の９個の不等式を加えると，

$$\begin{aligned}&4\{\tau_F(0,0)+\tau_F(0,1)+\tau_F(0,2)+\tau_F(1,0)\\ &+\tau_F(1,1)+\tau_F(1,2)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,1)+\tau_F(2,2)\}\\ &\geq \tau(0,0)+\tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(1,1)+\tau(0,0:0,1)\\ &+\tau(0,0:1,0)+\tau(1,1:0,1)+\tau(1,1:1,0)\\ &+\tau(0,0:0,1:1,0:1,1)\end{aligned}$$

を得る．また，

$$\tau(f) = \tau_F(0,0)+\tau_F(0,1)+\tau_F(0,2)+\tau_F(1,0)+\tau_F(1,1)+\tau_F(1,2)+\tau_F(2,0)+\tau_F(2,1)+\tau_F(2,2)$$

である．これより，補題を得る． （証明終）