設 計 自 動 化 74－5
（1995. 3. 8）

対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化法について

神田 徳夫
徳山工業高等専門学校
情報電子工学科
〒745 徳山市久米高城 3538

笹尾 勤
九州工業大学情報工学部
電子情報工学科
〒820 飯塚市大字川津 680-4

あらまし

本論文では，対称関数を表現するＥＳＯＰの下界を効率よく評価する方法を提案し，これを用いた対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化法を示す．次に，この方法を用いて，７変数以下の１出力対称関数を簡単化して，６変数の場合，全対称関数の約 66%，７変数の場合，約 22% について，最小解が得られることを示す．また，対称性を有する算術演算回路の一部を簡単化した結果を示す．

和文キーワード　組み合わせ論理回路　排他的論理和　論理式簡単化　積項数の下界

A Simplification Method of ESOPs for Symmetric Functions

Norio KODA
Department of Computer Science
and Electronic Engineering
Tokuyama College of Technology
Tokuyama 745, Japan

Tsutomu SASAO
Department of Computer Science
and Electronics
Kyushu Institute of Technology
Iizuka 820, Japan

Abstract

This paper presents properties of Exclusive-OR Sum-of-Prodcuts expressions(ESOPs) for symmetric functions and their simplification algorithms. First, lower bounds on the number of products in ESOPs for symmetric functions are shown. Then, algorithms to simplify ESOPs and prove their minimality are preseted. Experimental results show that these algorithms prove the minimality of 66% for 6-variable symmetric functions and about 22% for 7-variable symmetric functions. Also, simplified results for some arithmetic functions are shown.

英文 key words　combinational circuit, Exclusive-Or sum-of-products, logic minimization, lower bound

1 まえがき

最近のＬＳＩは回路が非常に複雑であり，論理回路の設計には論理自動合成システムが必須となっている．論理回路は，一般に，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴを基本論理素子として設計する．しかし，算術演算回路や誤り訂正回路などでは，ＡＮＤ，ＯＲ，ＮＯＴのみで構成するよりも，ＥＸＯＲゲートを併用する方がゲート数を大幅に削減できる．任意の積項をＥＸＯＲで結合した式をＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式（ＥＳＯＰ）という．ＥＸＯＲを用いた論理式には種々のクラスが知られているが，ＥＳＯＰはこの中で最も一般的な論理式である．従って，任意の関数をＥＸＯＲを用いて表現した場合，ＥＳＯＰの積項数が最も少ない[1]．任意の関数を実現するために必要な積項数を論理和形（ＳＯＰ）と比較すると，平均するとＥＳＯＰの方がＳＯＰよりも少なくてよい[1]．また，任意の n 変数関数を実現するために十分な積項数は，ＳＯＰでは 2^{n-1}，ＥＳＯＰでは $2^{n-2} (n \geq 6)$ である[8]．また，任意の $n(=2r)$ 変数対称関数は，積項数が高々 $2^r \cdot 3$ のＥＳＯＰで実現できる[1]．『対称関数を実現する最小ＥＳＯＰの積項数はＳＯＰの積項数を越えない』ことが $n \leq 7$ の場合に確かめられ，$n \geq 8$ の場合にも成立すると推測されていた[1]．最近，この推論が任意の n で成立することが証明された[3]．対称関数は，計数の基本演算であり，計数はあらゆる算術演算の基本となる[2]．従って，算術演算回路の設計には，ＥＸＯＲの利用が有効であることが，理論的にも裏付けられたと言える．これらのことから，最近，ＥＸＯＲを用いた論理合成の研究が精力的に行われている[4~13,16]．ＥＸＯＲゲートを含む論理回路自動合成システムにおいては，ＥＳＯＰの最小化あるいは簡単化プログラムが必要となる．入力変数の個数が５以下の場合は，これらの関数をＬＰ同値類に分類し，その同値類の代表関数の最小ＥＳＯＰを用いて，任意の５変数以下の関数の最小ＥＳＯＰを高速に求める方法が提案されている[10,13]．しかし，変数の個数が多い場合は，一般には最小化は困難であり，ヒューリスティックなアルゴリズムによって簡単化を行うことにより，準最小解を得ている[5]．しかし，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムは，その簡単化結果の最小性を保証しない．

筆者らは，先に，与えられた関数の最小ＥＳＯＰの積項数の下界を評価する方法と，５変数以下の最小ＥＳＯＰの表，及び，ヒューリスティックな簡単化アルゴリズムを組み合わせて，簡単化結果の最小性を保証する方法を提案した．しかし，変数の個数が大きくなると，下界の評価に時間がかかる．さて，与えられた関数が対称性を有している場合，その性質を利用すると，効率のよい簡単化が可能となる．本論文では，与えられた対称関数を表現するＥＳＯＰの下界を効率よく評価する方法を提案し，これを用いた対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化法を示す．次に，この方法を用いて，７変数以下の１出力対称関数，及び，対称性を有する算術演算回路の一部を簡単化した結果を示す．

2 最小ＥＳＯＰの基本的性質

［定義１］ x と $\bar{x}$ を変数 x のリテラルという．$S_i \subseteq \{0,1\}$，$S_i \neq \emptyset\ (i=1,2,\cdots,n)$ とするとき，$T = x_1^{S1} x_2^{S2} \cdots x_n^{Sn}$ を積項という．ここで，$x_i^{\{0\}} = \bar{x}_i$，$x_i^{\{1\}} = x_i$，$x_i^{\{0,1\}} = 1$，$x_i^{\emptyset} = 0$ である．$x_i^{\{0\}} = x_i^0$，$x_i^{\{1\}} = x_i^1$，$x_i^{\{0,1\}} = x_i^2$ と略記することがある．

［定義２］ 積項をＯＲで結合した式をＡＮＤ－ＯＲ論理和形（ＳＯＰ）という．また，積項をＥＸＯＲで結合した式をＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理和形（ＥＳＯＰ）という．与えられた論理関数 f を表現する積項数最小のＳＯＰを最小ＳＯＰ（ＭＳＯＰ）という．また，与えられた論理関数 f を表現する積項数最小のＥＳＯＰを最小ＥＳＯＰ（ＭＥＳＯＰ）という．ＥＳＯＰ論理式 F の積項数を $\tau(F)$，f を表現するＭＥＳＯＰの積項数を $\tau(f)$ で表す．

［定理１］（リテラル変換定理）[10,13] $f = \bar{x} \cdot f_0 \oplus x \cdot f_1$ とする．このとき，変数 x のリテラルに対して次の変換を施す．

$$
\begin{aligned}
L_1(f) &= x \cdot f_0 \oplus 1 \cdot f_1 & (x \leftrightarrow 1)\\
L_2(f) &= 1 \cdot f_0 \oplus x \cdot f_1 & (\bar{x} \leftrightarrow 1)\\
L_3(f) &= x \cdot f_0 \oplus \bar{x} \cdot f_1 & (x \leftrightarrow \bar{x})\\
L_4(f) &= x \cdot f_0 \oplus 1 \cdot f_1 & (x \rightarrow 1 \rightarrow \bar{x} \rightarrow x)\\
L_5(f) &= 1 \cdot f_0 \oplus \bar{x} \cdot f_1 & (\bar{x} \rightarrow 1 \rightarrow x \rightarrow \bar{x})
\end{aligned}
$$

このとき，$\tau(f) = \tau(L_1(f)) = \tau(L_2(f)) = \tau(L_3(f)) = \tau(L_4(f)) = \tau(L_5(f))$ である．

［定理２］ 関数 f を表現するＭＥＳＯＰを
$F = \bar{x} \cdot F_0 \oplus x \cdot F_1 \oplus 1 \cdot F_2$ とするとき，

$$
\begin{aligned}
L_1(F) &= \bar{x} \cdot F_0 \oplus 1 \cdot F_1 \oplus x \cdot F_2 & (x \leftrightarrow 1)\\
L_2(F) &= 1 \cdot F_0 \oplus x \cdot F_1 \oplus \bar{x} \cdot F_2 & (\bar{x} \leftrightarrow 1)\\
L_3(F) &= x \cdot F_0 \oplus \bar{x} \cdot F_1 \oplus 1 \cdot F_2 & (x \leftrightarrow \bar{x})\\
L_4(F) &= x \cdot F_0 \oplus 1 \cdot F_1 \oplus \bar{x} \cdot F_2 & (x \rightarrow 1 \rightarrow \bar{x} \rightarrow x)\\
L_5(F) &= 1 \cdot F_0 \oplus \bar{x} \cdot F_1 \oplus x \cdot F_2 & (\bar{x} \rightarrow 1 \rightarrow x \rightarrow \bar{x})
\end{aligned}
$$

もＭＥＳＯＰである．

［定義３］ ２値論理関数において次の条件を満足する関係 $\sim$ をＬＰ同値関係という[8]．

1)$f \sim f$.

2)$f_1 = f(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)$，$f_2 = f(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots)$ ならば $f_1 \sim f_2$（入力変数の置換）．

3)$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ において変数 x_i について $f = \bar{x}_i \cdot f_0 \oplus x_i \cdot f_1$ と展開したとき，変数 x_i のリテラルに対して，
① $(x \leftrightarrow 1)$，② $(\bar{x} \leftrightarrow 1)$，③ $(x \leftrightarrow \bar{x})$，
④ $(x \rightarrow 1 \rightarrow \bar{x} \rightarrow x)$，⑤ $(\bar{x} \rightarrow 1 \rightarrow x \rightarrow \bar{x})$

のいずれかの変換を適用して得られる関数を g とする．この

とき，$f \sim g$ である．

［定義4］関数 $f(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)$ において，変数 x_i と x_j を置換して得られる関数 $f(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)$ が元の関数に等しいとき，f は x_i と x_j に関して対称であるという．また，関数 f の変数の部分集合を任意に置換しても f が変化しないとき，f を部分対称関数という．また，関数 f の変数を任意に置換しても f が変化しないとき，f を完全対称関数という．

［定義5］与えられた関数において，全ての変数に同一のリテラル変換を適用する変換を対称L変換，対称L変換によって得られる関数の集合を対称L同値類という．

［注意］完全対称関数に対称L変換を適用すると，対称関数が得られる．

次の対称関数は，ＥＳＯＰ簡単化プログラムのベンチマーク関数として用いられている[(1)]．

［定義6］ $SB(n,k) = \sum\limits_{\substack{(a_1 < a_2 < \cdots a_k)\\ a_i \in \{1,2,\cdots,n\}}}^{\oplus} x_{a_1}x_{a_2}\cdots x_{a_k}$

［例1］ $SB(4,2) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus x_1 \cdot x_4 \oplus x_2 \cdot x_3 \oplus x_2 \cdot x_4 \oplus x_3 \cdot x_4$
$= x_1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot 1 \cdot x_3 \cdot 1 \oplus x_1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot 1 \oplus 1 \cdot x_2 \cdot 1 \cdot x_4 \oplus 1 \cdot 1 \cdot x_3 \cdot x_4$

この関数に対称L変換 $x \leftrightarrow 1$ を適用しても同じ関数となる．すなわち，$L_1(SB(4,2)) = SB(4,2)$ である．対称L変換 $\bar{x} \leftrightarrow 1$ を適用すると
$L_2(SB(4,2)) = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 \oplus \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$
となる．$SB(4,2)$ 及び $L_2(SB(4,2))$ を表現するカルノー図を，それぞれ図1，図2に示す．図1，図2を比較すると，$SB(4,2)$ よりも $L2(SB(4,2))$ の方が最小項の個数が少ない．

（例終り）

［補題1］ $\tau(SB(n,k)) = \tau(SB(n,n-k))$

（証明） $SB(n,k) = \sum\limits_{\substack{(a_1 < a_2 < \cdots < a_k)\\ a_i \in \{1,2,\cdots,n\}}}^{\oplus} x_{a_1}x_{a_2}\cdots x_{a_k}$

ここで，リテラル変換 $L_1 : x_i \leftrightarrow 1 (1 \le i \le n)$ を適用すると，

$$L_1(SB(n,k)) = \sum_{\substack{(b_1 < b_2 < \cdots < b_{n-k})\\ b_i \in \{1,2,\cdots,n\}}}^{\oplus} x_{b_1}x_{b_2}\cdots x_{b_k}$$

を得る．ここで，$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\} \cap \{b_1,b_2,\cdots,b_{n-k}\} = \emptyset$，$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\} \cup \{b_1,b_2,\cdots,b_{n-k}\} = \{1,2,\cdots,n\}$ である．$SB(n,k)$ は対称関数なので，$L_1(SB(n,k)) = SB(n,n-k)$ が成立する．従って，定理2より，補題が成立する．

（証明終）

本研究で利用するヒューリスティックなＥＳＯＰ簡単化プログラムＥＸＭＩＮ２[(5)]では，関数の最小項の個数が少ない方が速く解が求まる傾向がある．そこで，与えられた関数

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11	1	1		1
10		1	1	1

図 1: $SB(4,2)$

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00			1	
01		1		1
11	1			
10		1		1

図 2: $L_2(SB(4,2))$

にリテラル変換定理を適用し，なるべく最小項の少ない関数に変換して，簡単化する方針をとる．

3　ＭＥＳＯＰの積項数の下界

本章では，与えられた対称関数を表現するＭＥＳＯＰの積項数の下界を評価する方法について検討する．

［定義7］

$f(0) = f(0,x_2,\cdots,x_n)$，　$\tau(0) = \tau(f(0))$
$f(1) = f(1,x_2,\cdots,x_n)$，　$\tau(1) = \tau(f(1))$
$f(2) = f(0) \oplus f(1)$，　$\tau(2) = \tau(f(2))$

$a,b \in \{0,1\}$ とするとき，

$f(a,b) = f(a,b,x_3,\cdots,x_n)$，　$\tau(a,b) = \tau(f(a,b))$
$f(2,b) = f(0,b) \oplus f(1,b)$，　$\tau(2,b) = \tau(f(2,b))$
$f(a,2) = f(a,0) \oplus f(a,1)$，　$\tau(a,2) = \tau(f(a,2))$

$\alpha,\beta,\gamma \in \{0,1,2\}$ とするとき，$f(\alpha,\beta,\gamma)$ も同様に定義する．

［例2］ $f(2,2,1) = f(0,0,1) \oplus f(0,1,1) \oplus f(1,0,1) \oplus f(1,1,1)$，$\tau(2,2,1) = \tau(f(2,2,1))$　（例終り）

［定理3］[(9)] n 変数論理関数 f において，$\tau(f) \ge L1$ が成立する．ここで，

$$L1 = \frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\\ \alpha \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha)$$

である．

［補題2］(11) n 変数論理関数 f において，$\tau(f) \geq L22$ が成立する．ここで，

$$L22 = \frac{1}{4} \sum_{\substack{(\alpha,\beta) \\ \alpha,\beta \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha,\beta)$$

である．

［補題3］$\tau(f) \geq \{\tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(2,1)+\tau(1,2)\}/2$ が成立する．

（証明）関数 f を表現するMESOPを

$$F_{00}x_1^0x_2^0 \oplus F_{01}x_1^0x_2^1 \oplus F_{02}x_1^0x_2^2 \oplus F_{10}x_1^1x_2^0 \oplus F_{11}x_1^1x_2^1 \oplus F_{12}x_1^1x_2^2 \oplus F_{20}x_1^2x_2^0 \oplus F_{21}x_1^2x_2^1 \oplus F_{22}x_1^2x_2^2 \quad (1)$$

とする．ここで，$F_{ab}\ (a,b \in \{0,1,2\})$ は変数 x_1 も x_2 も含まないESOPである．

(1) において，$(x_1,x_2) = (0,0),(1,1),(0,1),(1,0)$ とおくと，

$$\begin{aligned} F_{00} \oplus F_{02} \oplus F_{20} \oplus F_{22} &= f(0,0) &(2)\\ F_{11} \oplus F_{12} \oplus F_{21} \oplus F_{22} &= f(1,1) &(3)\\ F_{01} \oplus F_{02} \oplus F_{21} \oplus F_{22} &= f(0,1) &(4)\\ F_{10} \oplus F_{12} \oplus F_{20} \oplus F_{22} &= f(1,0) &(5) \end{aligned}$$

を得る．(2) と (4)，(2) と (5)，(3) と (4)，(3) と (5) より，それぞれ，

$$\begin{aligned} F_{00} \oplus F_{01} \oplus F_{20} \oplus F_{21} &= f(0,2) &(6)\\ F_{00} \oplus F_{02} \oplus F_{10} \oplus F_{12} &= f(2,0) &(7)\\ F_{01} \oplus F_{02} \oplus F_{11} \oplus F_{12} &= f(2,1) &(8)\\ F_{10} \oplus F_{11} \oplus F_{20} \oplus F_{21} &= f(1,2) &(9) \end{aligned}$$

を得る．(6) ～ (9) より，

$$\begin{aligned} \tau(F_{00})+\tau(F_{01})+\tau(F_{20})+\tau(F_{21}) &\geq \tau(0,2)\\ \tau(F_{00})+\tau(F_{02})+\tau(F_{10})+\tau(F_{12}) &\geq \tau(2,0)\\ \tau(F_{01})+\tau(F_{02})+\tau(F_{11})+\tau(F_{12}) &\geq \tau(2,1)\\ \tau(F_{10})+\tau(F_{11})+\tau(F_{20})+\tau(F_{21}) &\geq \tau(1,2) \end{aligned}$$

を得る．上の4つの不等式を加えると，

$$\begin{aligned} 2\{\tau(F_{00})+\tau(F_{01})+\tau(F_{02})+\tau(F_{10})+\tau(F_{11})\\ +\tau(F_{12})+\tau(F_{20})+\tau(F_{21})\}\\ \geq \tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(2,1)+\tau(1,2) \end{aligned}$$

を得る．$\tau(f) = \tau(F_{00})+\tau(F_{01})+\tau(F_{02})+\tau(F_{10})+\tau(F_{11}) + \tau(F_{12})+\tau(F_{20})+\tau(F_{21})+\tau(F_{22})$，$\tau(F_{22}) \geq 0$ であるから，$\tau(f) \geq \tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(2,1)+\tau(1,2)$ を得る．これより，補題が成立する．（証明終）

［補題4］$\tau(f) \geq \{\tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(0,2)+\tau(2,0)\}/2$

（証明）補題3の証明と同様にして，補題3の証明中の式 (4) ～ (7) より，

$$\begin{aligned} 2\{\tau(F_{00})+\tau(F_{01})+\tau(F_{02})+\tau(F_{10})+\tau(F_{12})\\ +\tau(F_{20})+\tau(F_{21})+\tau(F_{22})\}\\ \geq \tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(0,2)+\tau(2,0) \end{aligned}$$

を得る．これより，補題が成立する．（証明終）

［補題5］$\tau(f) \geq \{\tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(1,2)+\tau(2,1)\}/2$

（証明）補題3の証明と同様にして，補題3の証明中の式 (4)，(5)，(8)，(9) より，

$$\begin{aligned} 2\{\tau(F_{01})+\tau(F_{02})+\tau(F_{10})+\tau(F_{11})+\tau(F_{12})\\ +\tau(F_{20})+\tau(F_{21})+\tau(F_{22})\}\\ \geq \tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(1,2)+\tau(2,1) \end{aligned}$$

を得る．これより，補題が成立する．（証明終）

補題3～補題5より，次の定理を得る．

［定理4］$\tau(f) \geq L23$ が成立する．ここで，
$L23 = [\{\tau(0,1)+\tau(1,0)+\tau(0,2)+\tau(2,0)+\tau(2,1)+\tau(1,2)\} - \min\{\tau(0,1)+\tau(1,0), \tau(0,2)+\tau(2,0), \tau(2,1)+\tau(1,2)\}]/2$
である．

［系1］$f_{01} = f_{10}$ のとき，$\tau(f) \geq L24$ が成立する．ここで，$L24 = \tau(0,1)+\tau(0,2)+\tau(1,2)-\min\{\tau(0,1), \tau(0,2), \tau(1,2)\}$
である．

系1は，対称関数を表現するESOPの積項数の下界の評価に利用できる．

［補題6］(9) n 変数論理関数 f において，$\tau(f) \geq L3$ が成立する．ここで，
$L3 = \{\tau(0,0,2)+\tau(0,2,0)+\tau(2,0,0)+\tau(0,2,1)+\tau(0,1,2)+\tau(2,1,1)+\tau(2,0,1)+\tau(1,0,2)+\tau(1,2,1)+\tau(2,1,0)+\tau(1,2,0)+\tau(1,1,2)\}/4$ である．

［補題7］(11) n 変数論理関数 f において，$\tau(f) \geq L32$ が成立する．ここで，

$$L32 = \frac{1}{8} \sum_{\substack{(\alpha,\beta,\gamma) \\ \alpha,\beta,\gamma \in \{0,1,2\}}} \tau(\alpha,\beta,\gamma)$$

である．

［定義8］$Lm = \max\{L1, L22, L24, L3, L32\}$

［定義9］n 変数論理関数 f において，各変数のリテラルが1個だけ含まれている積項を最小項という．関数 f に包含される最小項を f の最小項という．f の最小項の集合を $M(f)$ で表す．また，$v \in M(f)$ とし，v および v を含む積項の集合を $E(v)$ で表す．

［定理5］(9) n 変数関数 f において，$v \in M(f)$，$q_i \in E(v)\ (i = 1,2,\cdots,2^n)$ とするとき，$\tau(f) \geq La$ が成立する．ここで，

$$La = 1 + \min_i\{\tau(f \oplus q_i)\}$$

である．

［注意］f が一般の n 変数関数の場合，v としての候補は $|f|$（f の最小項の個数）だけある．また，v を包含する積項数は 2^n 個ある．従って，q_i の候補としては，最大 $3^n - 2^n +$

$|f|$ 個調べる必要がある．f が対称関数の場合，v としては，v のキューブの各重みについて調べればよいので，高々 $n+1$ 個である．

［補題8］ n 変数対称関数を表現するＥＳＯＰの積項数の下界を［定理5］によって求める場合，q_i の候補としては，高々 $(n+1)(n+2)/2$ 個の積項を調べればよい．

（証明）積項 q_i のキューブ表現を，

$(\underbrace{00\cdots0}_{a}\underbrace{11\cdots1}_{b}\underbrace{--\cdots-}_{c})$

とする．ここで，a，b，c は非負の整数で，$a+b+c=n$ を満たす．対称関数であるから，変数を置換したキューブは調べる必要はない．従って，調べるべき異なるキューブの個数は，『0，1，－の三つの文字から，重複を許して n 個とる組み合わせの個数』に等しく，

$C(n+2,n)=(n+1)(n+2)/2$ となる．（証明終）

［例2］4変数対称関数の場合，v の候補のキューブ表現は，(0,0,0,0)，(0,0,0,1)，(0,0,1,1)，(0,1,1,1)，(1,1,1,1) である．q_i の候補のキューブ表現は，

$(0,0,0,0),(0,0,0,1),(0,0,0,-),(0,0,1,-),(0,0,1,1),$
$(0,0,-,-),(0,1,1,1),(0,1,1,-),(0,1,-,-),(0,-,-,-),$
$(1,1,1,1),(1,1,1,-),(1,1,-,-),(1,-,-,-),(-,-,-,-)$

の15通りでよい．（例終）

定理5を適用する場合，一般の n 変数関数 f では，$O(3^n)$ 個の場合を調べる必要があるが，対称関数の場合は，$O(n^2)$ 個となり，計算時間の大幅な削減が可能である．また，$q_i \cdot f=0$ となる積項 q_i に対しては調べる必要はない．また，リテラル変換定理を用いて関数の最小項の個数をなるべく少なくしておくと，計算の手順を削減できる．

［系2］ n 変数関数 f において，$v\in M(f)$，$q_i,q_j\in E(v)$ $(i,j=1,2,\cdots,2^n)$ とするとき，$\tau(f)\geq La2$ が成立する．ここで，

$$La2 = 1+\min_j[1+\min_i\{\tau((f\oplus q_i)\oplus q_j)\}]$$

である．

系2は，定理5の拡張である．系2により，下界の値を更に1増やせる可能性がある．与えられた関数 f が対称関数の場合，$g=f\oplus q_i$ の下界の評価には対称性を利用して計算手順を削減できるが，関数 g は対称関数とは限らないので，$g\oplus q_j$ の下界の評価には対称性を利用できない．

次の定理は，対称関数を表現するＭＥＳＯＰの積項数の上界を与える．

［定理6］ $f_{01}=f_{10}$ のとき，$\tau(f)\leq\tau(0,1)+\tau(0,2)+\tau(1,2)$ が成立する．

（証明）f は，$f=\bar{x}_1\bar{x}_2f_{00}\oplus\bar{x}_1x_2f_{01}\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_2f_{11}$ $=\bar{x}_1\bar{x}_2f_{00}\oplus(x_1\oplus x_2)f_{01}\oplus x_1x_2f_{11}$ と表現できる．$x_1\oplus x_2=x_1x_2\oplus\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus 1$ の関係を用いると，$f=\bar{x}_1\bar{x}_2(f_{00}\oplus f_{01})\oplus x_1x_2(f_{11}\oplus f_{01})\oplus f_{01}=\bar{x}_1\bar{x}_2f_{02}\oplus x_1x_2f_{21}\oplus f_{01}$ を得る．$f_{12}=f_{21}$ であるから，定理が成立する．（証明終）

4 対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化アルゴリズム

現在，5変数以下の対称関数のＭＥＳＯＰはテーブル探索により容易に得られる[10,13]．6変数以上の関数の場合は、与えられた関数をある変数で展開すると，少ない変数の部分関数が得られる．この展開を各部分関数に順次適用することにより，いくつかの5変数部分関数が得られる．この5変数部分関数にＭＥＳＯＰを代入することにより，効率の良い簡単化が可能となる．与えられた関数が対称関数の場合，部分関数も対称となり，どの変数で展開しても結果は同じになるので，任意の1変数で展開すれば十分である．また，下界の評価において，一般関数の場合は，$L1$ は1変数，$L22$，$L23$，$L24$ は2変数，$L3$，$L32$ は3変数の全ての組み合わせについて評価する必要があるが，対称関数の場合は，それぞれ1つの組み合わせでよい．

＜アルゴリズム1（対称関数のＥＳＯＰの簡単化）＞

simpn(n:*number of inputs*, f:*function*)
{
  if($n\leq5$) then return *MESOP for* f;
  for an arbitrary input variable x{
    $f=\bar{x}f_0\oplus xf_1$;
    F_0=simpn($n-1,f_0$);
    F_1=simpn($n-1,f_1$);
    F_2=simpn($n-1,f_0\oplus f_1$);
    G_0=exmin2($\bar{x}F_0\oplus xF_1$);
    G_1=exmin2($F_0\oplus xF_2$);
    G_2=exmin2($F_1\oplus\bar{x}F_2$);
  }
  return G_i *where*

$$\tau(G_i)=\min\{\tau(G_0),\tau(G_1),\tau(G_2)\};$$

}

exmin2(F:*ESOP*){ return *simplified ESOP for F by EXMIN2*;}

＜アルゴリズム2（ＥＳＯＰの最小性保証）＞

1) 与えられた関数を表現するＥＳＯＰの積項数の下界を求め，これを LB とする．

2) 与えられた関数を表現するＥＳＯＰをアルゴリズム1で簡単化する．簡単化したＥＳＯＰの積項数を τ_a とする．

3) もし $LB=\tau_a$ ならば，簡単化したＥＳＯＰは最小解である．もし $LB\neq\tau_a$ ならば，簡単化結果の最小性は保証されない．

5 実験結果

表1は，7変数以下の対称関数を対称L同値類に分類した結果を示す．これより，対称関数の総数の約1/4個の同値類に分類できる．各同値類に属する関数のうちの1個を簡単化すればよい．表2は，各種下界を6変数対称関数によって評価した結果を示す．これより，下界の比較は，平均すると，$L1 > L22 > L24 > L32 > L3$ となる．また，La の評価により，27個の関数の下界が改善でき，La_2 の評価により，更に32個の関数の下界が改善できた．表3は，6変数対称L同値類代表関数を簡単化した結果を示す．ここで，$S^6_{\{A\}}, A \subseteq \{0,1,2,3,4,5,6\}$ は，6変数対称関数を基本対称関数[16]の組み合わせによって示したものである．32個の代表関数のうち，23個（全対称関数の65.6%）について，最小性の保証ができた．表4は，7変数対称L同値類代表関数を簡単化した結果を示す．52個の代表関数のうち，14個（全対称関数の21.9%）について，最小性の保証ができた．$SB(n,k)$ 関数のＥＳＯＰを簡単化した結果を表5に示す．$n=6$ の全ての関数，及び，$n=7$，$n=8$ の一部について最小解が得られた．表6は，対称性を有する算術演算回路[14]の一部を簡単化した結果を示す．表7は，最も積項数の多い6変数対称関数 $S^6_{\{1,2,4,5\}}$ の下界評価および簡単化を一般の関数用のプログラムと対称関数用のプログラムで求めたときの計算時間の比較を示す．これより，関数の対称性を考慮すると，処理時間を短縮できることがわかる．

なお，アルゴリズム4では，ヒューリスティックな簡単化プログラムＥＸＭＩＮ２が用いられている．このため，今後のＥＸＭＩＮ２の改善により，本実験結果が変化することがあり得る．

6 むすび

本論文では，対称関数のＥＳＯＰの積項数の下界を効率よく評価する方法を提案し，これを用いた簡単化アルゴリズムを与えた．本アルゴリズムにより，6変数対称関数の65.6%，7変数対称関数の21.9%について，最小解が得られた．対称関数を表現するＥＳＯＰの簡単化は，算術演算回路の設計の基本となる．本アルゴリズムの利用により，効率の良い設計が可能となる．

謝辞

本研究は，一部文部省科学研究費による．

参考文献

[1] T. Sasao and P.W. Besslich: "On the complexity of MOD-2 SUM PLA's", *IEEE Trans. on Compt.*, vol.39, No.2, pp.262-266, Feb. 1990.

[2] C. Damm: "How much EXOR improves on OR ?", *IFIP WG.10.5 Workshop on Application of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 1993.

[3] U. Rollwage: "The complexity of mod-2 sum PLA's for symmetric functions", *IFIP WG.10.5 Workshop on Application of the Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 1993.

[4] M. Perkowski and M. Chrzanowska-Jeske: "An exact algorithm to minimize mixed-radix exclusive sums of products for incompletely specified Boolean functions", *Proc. International Sympo. on Circuits and Systems*, pp.1652-1655, May 1990.

[5] T. Sasao: "EXMIN2: A simplification algorithm for Exclusive-Or-Sum of products expressions for multiple-valued input two-valued output functions", *IEEE Trans. on CAD* Vol.12, No.5, pp.621-632, May 1993.

[6] 神田徳夫, 笹尾勤：" 4変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質", 信学論 (D-I), J74-D-I, 11, pp.765-773 (1991-11).

[7] 神田徳夫, 笹尾勤：" 5変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式の簡単化について", 1990 信学秋季全大,SA-3-3, pp.1-288(1990).

[8] 神田徳夫, 笹尾勤：" ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式の積項数の上界について", 信学論 (D-I), J75-D-I, 3, pp.135-142(1992-3).

[9] 神田徳夫, 笹尾勤：" 下界定理を用いたＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式の簡単化法", 信学論 (D-I), J76-D-I, 1, pp.1-10(1993-1).

[10] 神田徳夫, 笹尾勤：" 論理関数のＬＰ特徴ベクトルとその応用", 信学論 (D-I), J76-D-I, 6, pp.260-268(1993-6).

[11] 神田徳夫, 笹尾勤：" ＥＸＢＯＵＮＤ：多出力ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式最小化プログラム", 信学技報, FTS93-35, VLD93-59(1993-10).

[12] T. Sasao: "An exact minimization of AND-EXOR expressions using BDDs", *IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 16, 1993.

[13] N. Koda and T. Sasao: "LP characteristic vector of logic functions", *IFIP WG10.5 Workshop on Applications of Reed-Muller Expansion in Circuit Design*, Sept. 16, 1993.

[14] 笹尾勤：“ＰＬＡの作り方・使い方”，日刊工業新聞社，1986.

[15] 笹尾勤，松浦宗寛：”ＢＤＤを用いたＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式最小化の一手法”，信学技法，FTS93-34，VLD93-58(1993-10).

[16] 笹尾勤：”論理設計：スイッチング回路理論”，近代科学社，1995.

表 1: 対称関数の対称Ｌ同値関係による分類

変数の個数	関数の総数	対称Ｌ同値類の個数
3	16	6
4	32	10
5	64	16
6	128	32
7	256	52

表 2: 下界の比較（６変数対称関数）

下界	該当する下界が最大となる関数の個数	平均下界
$L1$	69	10.10
$L22$	8	9.37
$L24$	7	8.83
$L3$	4	7.06
$L32$	8	8.02
La	96	10.27
La_2	128	10.53

表 3: ６変数対称関数の簡単化

代表関数	関数の個数	下界			積項数
		Lm	La	La_2	
$S^6\{\}$	1	0	0	0	0
$S^6\{0\}$	3	1	1	1	1
$S^6\{1\}$	3	6	6	6	6
$S^6\{2\}$	6	11	11	11	11
$S^6\{3\}$	1	12	12	12	12
$S^6\{0,1\}$	3	6	6	6	6
$S^6\{0,2\}$	6	11	11	11	11
$S^6\{0,3\}$	3	13	13	13	13
$S^6\{0,5\}$	6	7	7	7	7
$S^6\{1,3\}$	3	10	11	11	12
$S^6\{1,4\}$	6	13	14	14	14
$S^6\{2,3\}$	3	11	11	12	12
$S^6\{2,4\}$	6	8	8	8	8
$S^6\{0,1,3\}$	6	11	11	12	13
$S^6\{0,1,4\}$	6	13	13	13	14
$S^6\{0,1,5\}$	6	10	11	11	12
$S^6\{0,2,3\}$	6	12	12	13	13
$S^6\{0,2,4\}$	6	7	7	7	7
$S^6\{0,2,6\}$	6	11	11	12	12
$S^6\{1,2,4\}$	3	11	12	12	13
$S^6\{1,2,5\}$	6	11	11	12	12
$S^6\{0,1,2,4\}$	6	11	12	12	13
$S^6\{0,1,2,5\}$	6	12	12	12	13
$S^6\{0,1,2,6\}$	6	12	12	12	12
$S^6\{0,1,4,6\}$	2	12	12	13	14
$S^6\{0,2,4,5\}$	3	10	11	11	12
$S^6\{1,2,4,5\}$	1	14	14	15	15
$S^6\{0,1,2,4,5\}$	3	14	14	14	14
$S^6\{0,1,3,4,6\}$	2	14	14	15	15
$S^6\{0,2,3,4,5\}$	3	8	8	8	8
$S^6\{1,2,3,4,5\}$	1	3	3	3	3
$S^6\{0,1,2,3,4,5\}$	3	2	2	2	2

表 4: 7変数対称関数の簡単化

代表関数	関数の個数	下界 Lm	La	La2	積項数
$S^7\{\}$	1	0	0	0	0
$S^7\{0\}$	3	1	1	1	1
$S^7\{1\}$	6	7	7	7	7
$S^7\{2\}$	6	14	14	14	15
$S^7\{3\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{0,3\}$	6	18	18	18	22
$S^7\{0,5\}$	6	15	15	15	16
$S^7\{1,2\}$	3	14	14	14	14
$S^7\{1,3\}$	6	16	17	18	21
$S^7\{1,4\}$	3	20	21	21	25
$S^7\{1,6\}$	3	12	13	13	14
$S^7\{2,4\}$	3	13	14	14	15
$S^7\{2,5\}$	3	20	21	21	25
$S^7\{3,4\}$	3	15	16	16	16
$S^7\{0,1,2\}$	3	14	14	14	14
$S^7\{0,1,3\}$	6	17	17	18	22
$S^7\{0,1,4\}$	3	20	20	20	24
$S^7\{0,1,5\}$	6	16	17	18	20
$S^7\{0,1,6\}$	6	12	13	13	14
$S^7\{0,1,7\}$	6	8	8	8	8
$S^7\{0,2,4\}$	3	12	13	13	14
$S^7\{0,2,5\}$	6	20	21	21	25
$S^7\{0,2,6\}$	6	16	17	18	21
$S^7\{0,2,7\}$	6	15	15	15	16
$S^7\{0,3,4\}$	6	15	15	15	15
$S^7\{0,3,5\}$	6	13	14	14	15
$S^7\{0,3,6\}$	6	21	21	22	25
$S^7\{0,3,7\}$	6	18	18	19	23
$S^7\{0,5,6\}$	6	15	15	15	15
$S^7\{1,2,4\}$	6	17	18	18	21
$S^7\{1,2,5\}$	6	17	18	18	21
$S^7\{1,2,6\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{1,3,4\}$	6	18	19	19	22
$S^7\{1,3,5\}$	6	8	8	8	8
$S^7\{0,1,2,5\}$	6	18	18	19	22
$S^7\{0,1,2,6\}$	6	18	18	19	21
$S^7\{0,1,3,4\}$	6	18	19	19	23
$S^7\{0,1,3,5\}$	6	9	9	9	9
$S^7\{0,2,3,6\}$	6	16	16	16	17
$S^7\{1,2,3,5\}$	6	18	18	19	23
$S^7\{0,1,2,3,5\}$	6	17	18	18	22
$S^7\{0,1,2,3,6\}$	6	17	18	19	23
$S^7\{0,1,2,4,7\}$	2	17	18	18	21
$S^7\{0,1,3,4,7\}$	6	18	18	19	21
$S^7\{0,1,3,5,6\}$	3	13	13	14	15
$S^7\{0,1,4,5,6\}$	6	17	17	18	21
$S^7\{0,2,3,4,7\}$	6	18	18	18	22
$S^7\{0,2,3,5,6\}$	3	21	21	22	27
$S^7\{0,3,4,5,6\}$	3	15	16	16	16
$S^7\{0,1,2,3,5,6\}$	6	19	19	19	23
$S^7\{1,2,3,4,5,6\}$	1	3	3	3	3
$S^7\{0,1,2,3,4,5,6\}$	3	2	2	2	2

表 5: $SB(n,k)$ の簡単化

n	k	下界 Lm	La	La2	積項数
6	1	6	6	6	6
6	2	11	11	11	11
6	3	12	12	12	12
7	1	7	7	7	7
7	2	14	14	14	15
7	3	17	17	18	19
8	1	8	8		8
8	2	18	18		21
8	3	24	24		32
8	4	25	26		38

表 6: 算術演算回路の簡単化

n k	下界 Lm	La	La2	積項数
$SYM6$	11	11	12	13
$WGT4$	8	8	8	9
$WGT5$	12	13	13	14
$WGT6$	18	19		22

表 7: 計算時間の比較 (CPU time (sec))

計算の種類	一般関数用プログラム	対称関数用プログラム
簡単化	14.5	2.3
下界 La	16.1	1.7
下界 $La2$	10320	361

(HP9000/720 による)