

集積回路の配線インダクタンスの解析モデルの測定による検証

宮地 幸祐[†] 池田 誠^{††} 浅田 邦博^{††}

[†] 東京大学大学院工学系研究科

^{††} 東京大学大規模集積システム設計教育研究センター

E-mail: †{k-miyag,iked,asada}@silicon.u-tokyo.ac.jp

あらまし 本稿では、Grover's Formula と呼ばれる配線インダクタンスの解析モデルを検証する。これは、ノイマンの相互インダクタンス公式から導出される、平行で任意の位置関係にある2本の直線導線間の相互インダクタンスが計算可能な解析的近似式と、幾何学的平均距離 (G.M.D.)、算術的平均距離 (A.M.D.) を用いた自己インダクタンスの解析的近似式から成る。この解析モデルを用いて導線のインダクタンスを抽出し、基板上にスケールアップして作成したインダクタを測定することで検証を行った。これにより自己インダクタンスについては解析モデルと測定間の最大誤差が18%、相互インダクタンスは16%という結果を得た。

キーワード Grover's Formula、自己インダクタンス、相互インダクタンス、抽出、配線、解析的、近似式、測定、検証、スケールアップ

Verification of Analytical Model for Wiring Inductance with Measurement

Kousuke MIYAJI[†], Makoto IKEDA^{††}, and Kunihiro ASADA^{††}

[†] Faculty of Engineering, University of Tokyo

^{††} VLSI Design and Education Center, University of Tokyo

E-mail: †{k-miyag,iked,asada}@silicon.u-tokyo.ac.jp

Abstract In this paper, we verify an analytical model for wiring inductance extraction called "Grover's Formula". This model consists of two approximate expressions, which are expressing mutual inductance of parallel two wires of any spatial relationship, which based on Neuman's formula and self inductance with using geometrical mean distance (G.M.D.) and arithmetic mean distance (A.M.D.). Using this model, we extracted wiring inductance and we show measurement results of scaled-up inductors patterned on printed circuit boards (PCBs). The maximum error of the analytical model in self inductance was less than 18%, and in mutual inductance, it was less than 16%. **Key words** Grover's Formula, self inductance, mutual inductance, extraction, wiring, analytical, approximate expression, measurement, verification, scaled-up.

1. はじめに

近年の集積回路内配線の長距離化、配線ピッチの減少や回路動作周波数の上昇に伴い、配線の寄生インダクタンスの影響によるRC回路シミュレーション誤差の増大が懸念されている[1], [2]。また、配線を使った意識的な受動素子の設計の増加傾向からも、インダクタンスの抽出の重要性はさらに高くなってきている。インダクタンスの有効な計算手法として有限要素法や有限差分時間領域法、有限体積法などがあるが[3]~[5]、いずれも精度と計算量とのトレードオフが大きく、単純な配線のインダクタンス抽出でさえも非常に時間がかかる。また、指定空間における電磁波の解析を逐一行うため、考慮する対象空間

の区分けも難しく、場合によっては局所解に陥る危険性もある。このような状況で、現在の様に複雑な集積回路内のインダクタンスを見積もろうとする場合、これらを全て有限時間内に見積もることは不可能に近いのが実情である。

これに対し、電磁界の解析に基づく近似式を用いた配線インダクタンスのコンパクトな見積もり手法も多く検討されている[6]~[9]。これは、三次元構造シミュレータと比べて計算量が少なく、高速性を要求される配線インダクタンスの抽出に有効性があると考えられる。

本稿では "Grover's Formula" [6] と呼ばれる基本的なインダクタンスの解析モデルを測定を通じて検証した結果を述べる。その前に、数値計算によるインダクタンス計算手法の例として

有限体積法の一つであるスプリットファイバモデルの概要と問題を論じ、その後解析モデルによるインダクタンスの計算手法を説明する。さらに解析モデルの測定による検証方法を説明し、その結果をまとめて考察を行う。最後に結論と今後の課題を述べる。

2. スプリットファイバモデルを用いたインダクタンス計算モデル

2.1 計算方法の概要

本節では有限体積法の一つであるスプリットファイバモデルの基本的な理論を簡単にまとめる。まず、Maxwell 方程式の簡単化のために、時間軸に対し電磁界が正弦的に周期変化する電磁界で、導体に流れる伝導電流が変位電流を無視できるくらい十分大きいもとすることができる準定常状態を仮定する。また、半導体工学で通常用いられる物質の透磁率はほとんど真空中の透磁率 μ_0 と変わらないため、導体も含む周囲の透磁率は全て $\mu = \mu_0$ とする。以上の仮定にベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを導入すると、次の式 (1) が導かれる。

$$\frac{J(r)}{\sigma} + \frac{j\omega\mu}{4\pi} \int_{V'} \frac{J(r')}{|r-r'|} dv' = -\nabla\Phi(r) \quad (1)$$

式 (1) は導体内の電圧降下が抵抗成分とインダクタンス成分によって起きると捉えることができる。

スプリットファイバモデルは導線をいくつかのフィラメントに分け、導線断面に対して配線長が十分長く、各フィラメントには配線長方向と同じ方向に電流が流れると仮定する。そして各フィラメントのインピーダンスや、個々のフィラメント間のインピーダンスを定義してインピーダンス行列を作る。1本の導線の自己インダクタンスを考える場合、その導線内のフィラメント同士を比較することでインピーダンス行列を作っていく。同一フィラメント間の相互インダクタンスはそのフィラメントの自己インダクタンスとなる。また、2本の導線間の相互インダクタンスを考える場合は自分と相手のフィラメント間の相互インダクタンスからインピーダンス行列を作る。図1のように3×3に導線を区切った場合、インピーダンス行列 Z は式 (2) のようになる。

$$Z = \begin{pmatrix} R_{11} + j\omega L_{11} & j\omega M_{11,12} & \cdots & j\omega M_{11,33} \\ j\omega M_{12,11} & R_{12} + j\omega L_{12} & \cdots & j\omega M_{12,33} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j\omega M_{33,11} & j\omega M_{33,12} & \cdots & R_{33} + j\omega L_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

このようにしてインピーダンス行列 Z を作成し、下の式 (3) を境界条件と式 (1) を用いて解くと、各フィラメントに流れる電流の値 (ベクトル I) とインピーダンス行列 Z がわかり、電流分布を加味した導線の自己インダクタンス、及び相互インダクタンスが求まる。

$$V = ZI \quad (3)$$

2.2 問題点

スプリットファイバモデルは導線を複数のファイバに分け、

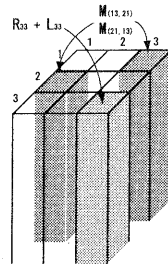


図1 スプリットファイバモデルにおける導線の分割例 (自己インダクタンスの場合)

Fig.1 An example for dividing conductor in fibers.

導線内の電流密度を考慮してインダクタンスを計算するため、ファイバの分割数が増すとインピーダンス行列の規模が大きくなり、膨大な計算量の行列演算が生じてしまう。また、ファイバ数を少なくしたとしても、最終的に積分計算を含むため、集積回路のような大規模な配線インダクタンス計算となると潜在的な計算量は非常に多くなることが予想される。このため、自己インダクタンス、相互インダクタンスの計算量自体を精度を、下げずに減らすことが肝要である。

3. 解析に基づく近似式を用いたインダクタンス計算モデル

3.1 2本の平行な直線導線間の相互インダクタンス

真空中で図2のように座標を与えた2本の平行に並んだ導線を考える。

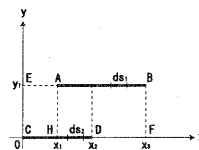


図2 平行に並んだ2本の直線導線

Fig.2 Two Parallel interconnections for mutual inductance extraction.

前述の準定常状態、電流方向が配線長方向と同方向に流れているという仮定以外に2本の導線に何らかのループを考え、ノイマンの公式を図2の座標と対応させると二本の導線間の相互インダクタンスは次のようになる。

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \int_{x_1}^{x_3} \int_0^{x_2} \frac{dx dx'}{\sqrt{(x-x')^2 + y_1^2}} \quad (4)$$

これを解き、かつ

$$EB = x_3$$

$$BC = \sqrt{x_3^2 + y_1^2}$$

$$HD = x_2 - x_1$$

$$AD = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + y_1^2}$$

$$DF = x_3 - x_2$$

$$DB = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + y_1^2}$$

$$EA = x_1$$

$$AC = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

とくと、電流分布を求めるための複雑な行列演算を行うことなく二本の導線の中心線の位置関係のみで相互インダクタンスが求められる。

$$M = \frac{\mu}{4\pi} \log \frac{(EB + BC)^{EB} (-HD + AD)^{-HD}}{(DF + DB)^{DF} (EA + AC)^{EA}} + \frac{\mu}{4\pi} (DB - BC - AD + AC) \quad (5)$$

3.2 1本の直線導線の自己インダクタンス

真空中に、ある断面積を持つ直線導線があり、導線内の電流密度が平等であった場合、その直線導線の自己インダクタンスは次の式のように表される。

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{GMD} - 1 + \frac{AMD}{l} \right) \quad (6)$$

ただし、 l は導線の長さ、 GMD は導線の、それに直角な断面自身の幾何学的平均距離 (Geometrical Mean Distance)、 AMD は断面内の算術平均距離 (Arithmetic Mean Distance) である。図3のような断面が縦 a 、横 b の矩形である直線導線の場合、 GMD は $0.22313(a+b)$ ($a \rightarrow 0$ のとき) から $0.22352(a+b)$ ($a = b$ のとき)、 AMD は $(a+b)/3$ になることが知られているので、式 (6) は式 (7) のような近似式で表すことができる。

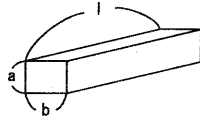


図3 断面が矩形の直線導線

Fig. 3 A conductor with rectangular cross section.

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\ln \frac{2l}{a+b} + 0.5 + \frac{a+b}{3l} \right) \quad (7)$$

3.3 適応限界

この手法は、真空中に導線があった場合のインダクタンスの計算手法である。つまり電磁波の導波に影響を与える導体性基板や、抵抗性基板上に配線があった場合のインダクタンスの計算ができない。また、電流が導線全体に均一に流れているという仮定を置いているため、表皮効果等の周波数の変化に伴う電流密度の変化も捉えることはできない。また、自己インダクタンスの解析モデルに関しては、導線の断面の G.M.D. が導線の長さより大きくなり過ぎると破綻してしまう。

3.4 導線ループのインダクタンス計算方法

図4のように直線導線がループ状に連なっているとき、このループ全体の実際のインダクタンス L_{total} は次の式 (??) のように定義できる [8]。ただし、全ての直線導線は自身以外の全ての直線導線に対して平行か直角にあるとする。

$$L_{total} = \sum_{i=1}^n L_i + \sum_{i=1, i \neq j}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n M_{ij} \quad (8)$$

ここで、ループが n 本の辺から成るとき、 i 番目の辺の自己イ

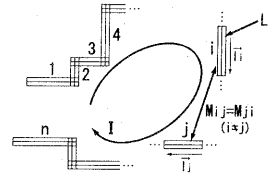


図4 直線導線から成る電流ループ

Fig. 4 A current loop consists of straight conductors.

ンダクタンスを L_i 、 i 番目と j 番目の辺の相互インダクタンスを M_{ij} とする。以降、 L_i と M_{ij} をそれぞれ部分自己インダクタンス、部分相互インダクタンスと呼ぶことにする。

部分相互インダクタンスに関しては以下の様に考える。

- $i \perp j$ なら、 $M_{ij} = 0$ とする
- $M_{ij} = M_{ji}$
- \vec{I}_i と \vec{I}_j が同方向なら $M_{ij} > 0$ 、逆方向なら $M_{ij} < 0$

また、2つのループが存在した場合、その2つのループ間の相互インダクタンスは部分相互インダクタンスの和のみで表すことができる。

4. スケールアップしたインダクタの測定による解析モデルの検証

4.1 スケールアップモデルの採用

オンチップインダクタは抵抗性導体基板上にあるため、この基板による電磁波の減衰が激しくコイル内を通過する磁束が少なくなり、インダクタンス値が真空中と比べて低くなる。そのため、真空中にあるという解析モデルの適応条件を満たさなくなり、検証環境が確保できない。このような理由より、本稿ではプリント基板用ボード上にインダクタを通常のチップスケールの数百から数千倍に拡大する代わりに、測定環境と解析モデルの条件との一致を図った。導体性基板、抵抗性基板上の解析モデルの評価は今後の課題とする。

4.2 測定対象物

測定のために作成したインダクタパターンを示す。図5、のような単純なループとそのループを二つ向かい合わせたものを、ループ一周当りの長さを 2.2inch、4.4inch、6.6inch と 3パターン用意し、それぞれについて導線幅を 0.1mm、0.4mm、0.9mm、1.9mm にしたものを作成した。ただし、一周が 2.2inch のループに関しては大きさの関係上、幅が 1.9mm のものは作成していない。

また、その他に図7のような一周 4.4inch のスパイラルインダクタも幅を 0.4mm、0.9mm、1.9mm のものについて作成した。このインダクタについては自己インダクタンスのみを測定した。

以上のように作成したインダクタがインダクタンスを集中定数的にもつと考えられる (ループの長さが伝導する電磁波の波長の $1/10$ の長さより短いと考えられる) 周波数の上限をまとめたものを表1に示す。誘電率は電磁波長が最も短くなる誘電体中の値、 $\epsilon = 4.8$ として計算した。

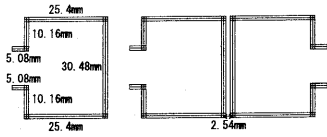


図5 一周 4.4inch のループ

Fig.5 A 4.4inch long loop conductor.

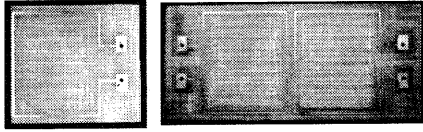


図6 作成したインダクタループの写真

Fig.6 Photographs of manufactured loop conductors.

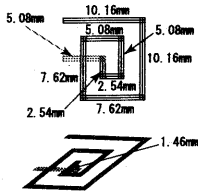


図7 一周 4.4inch のスパイラルインダクタ

Fig.7 A 4.4inch long spiral inductor.

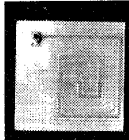


図8 作成したスパイラルインダクタ写真

Fig.8 Photograph of manufactured spiral inductor.

表1 各インダクタループが $\lambda/10$ となる周波数

2.2inch	4.4inch	6.6inch	4.4inch spiral
244.9MHz	122.4MHz	81.6MHz	122.4MHz

4.3 測定方法

前節で作成したインダクタをネットワークアナライザを通して、ループの自己インダクタンス、ループ間の相互インダクタンスを測定した。 S_{11} 測定による自己インダクタンス抽出の概要を図9に示す。測定はSパラメータテストセットからインダクタまでのケーブル、及びコネクタ、パッドの影響を取り除くためにインダクタを除いたパッドのみの校正用基板を作成し、校正を行った。ケーブル、コネクタ等の伝送系の特性インピーダンスは 50Ω である。また、周波数は 45MHz から 500MHz まで等間隔に 201 点取って測定した。

4.3.1 自己インダクタンスの測定

測定するインダクタが次の図10のような等価回路を持つと考える。この時、ポート1からのみ入力を行い、その反射係数 $\Gamma = S_{11}$ を測定した。

ここで、等価回路モデルの Z の虚部は反射計数 S_{11} によって表すことができ、さらにこれを全てインダクタンス成分とし

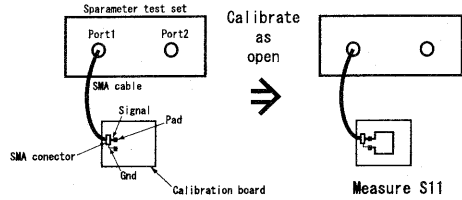


図9 自己インダクタンス測定の流れ

Fig.9 A measurement flow for self inductance measurement.

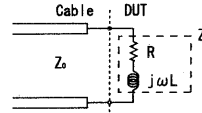


図10 ループの自己インダクタンス等価回路モデル

Fig.10 An equivalent circuit model for self inductance.

ているので、 Z の虚部を ω で割れば1次近似等価回路モデルによるループの自己インダクタンスが求められる。次の式(9)でその式を示す。 Z_0 はケーブルの特性インピーダンス (50Ω) である。

$$ImZ = Z_0 \frac{2(ImS_{11})}{(1 - ReS_{11})^2 + (ImS_{11})^2} = \omega L \quad (9)$$

4.3.2 相互インダクタンスの測定

二つのループ間の相互インダクタンスを測定するには、片方のポートからもう片方のポートへと透過する電力も測定する。二つのループがそれぞれポートから入力を受けている場合、その等価回路は次の図11ようになる。

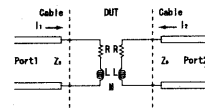


図11 ループ間の相互インダクタンス等価回路モデル

Fig.11 An equivalent circuit model for mutual inductance.

散乱行列 S (2×2 行列) と 50Ω で規格化されたインピーダンス行列の Z_{21} 成分には次の関係がある。

$$Z_{21} = Z_0 \frac{2S_{21}}{(1 - S_{11})(1 - S_{22}) - S_{12}S_{21}} \quad (10)$$

ここで、設定した等価回路モデルより Z_{21} の虚部は全て相互インダクタンス成分として考えると、

$$ImZ_{21} = \omega M \quad (11)$$

となり、相互インダクタンスを求めるには ω で Z_{21} の虚部を割れば良い。

4.4 測定結果と考察

4.4.1 自己インダクタンスの測定結果

図12に4.4inch長、幅0.4mmのループの S_{11} 測定データ(スミスチャート)を示す。これから式(9)を使ってインダクタンスを抽出した。各インダクタが集中定数と考えられる周波

数領域における、自己インダクタンス測定の結果を図 13、図 14、図 15、図 16 に示す。測定値との比較のため、解析モデルによる計算値、さらにスプリットファイバモデルを採用した fasthenry [3] によって計算されたインダクタンス値も示した。

また、各インダクタにおける解析モデルによって計算された値と測定値との最大誤差、標準偏差をまとめたものをそれぞれ表 2、表 3 に示す。表 3 の σ は測定値の解析モデルに対する標準偏差である。この結果、解析モデルと測定値の誤差は最大でも約 18% であり、ほとんどのデータは誤差 10% 以内に収まっていることがわかった。

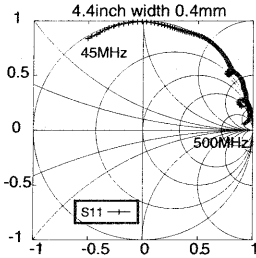


図 12 4.4inch 長、幅 0.4mm ループの S11 周波数特性

Fig. 12 Frequency characteristic of S11 for 4.4inch long, 0.4mm wide loop.

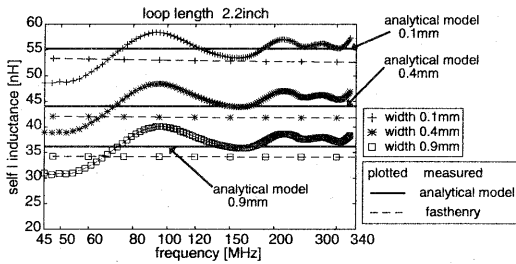


図 13 2.2inch ループの自己インダクタンス周波数特性

Fig. 13 Frequency characteristic of self inductance for 2.2inch loop.

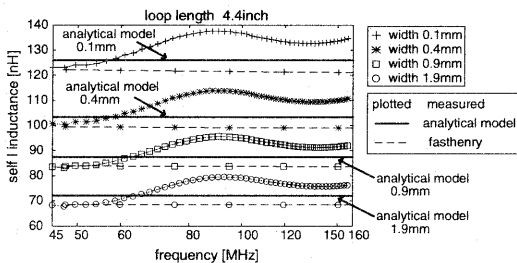


図 14 4.4inch ループの自己インダクタンス周波数特性

Fig. 14 Frequency characteristic of self inductance for 4.4inch loop.

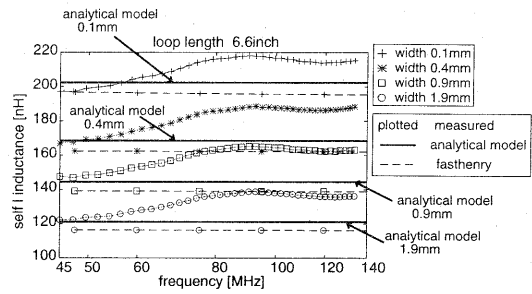


図 15 6.6inch ループの自己インダクタンス周波数特性

Fig. 15 Frequency characteristic of self inductance for 6.6inch loop.

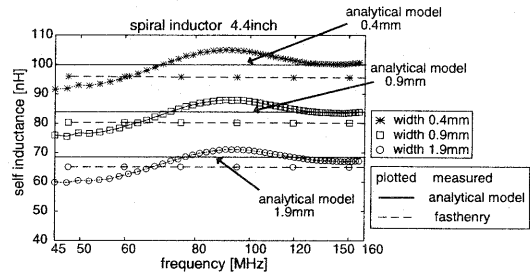


図 16 4.4inch 長スパイラルインダクタの自己インダクタンス周波数特性

Fig. 16 Frequency characteristic of self inductance for 4.4inch spiral inductor.

表 2 自己インダクタンスの最大誤差

Table 2 Maximum error of self inductance.

	2.2inch	4.4inch	6.6inch	spiral
width 0.1mm	-13.8%	8.5%	7.2%	—
width 0.4mm	-13.3%	9.3%	10.7%	-9.2%
width 0.9mm	-18.0%	8.7%	12.6%	-11.0%
width 1.9mm	—	10.0%	12.8%	-14.6%

表 3 自己インダクタンスの標準偏差 (単位 nH)

Table 3 Standard deviation of self inductance.

	width	2.2inch	4.4inch	6.6inch	spiral
σ	analytical model	2.075	7.780	11.35	—
	measured	55.26	125.9	202.5	—
σ	analytical model	2.418	7.122	15.75	3.647
	measured	44.04	103.3	168.5	99.96
σ	analytical model	2.190	5.213	16.55	3.421
	measured	36.17	87.38	144.4	83.89
σ	analytical model	—	4.862	13.54	3.500
	measured	—	72.01	121.2	68.51

4.4.2 相互インダクタンスの測定結果

相互インダクタンス測定の結果を図 17、図 18、図 19 に示す。これもインダクタが集中定数と考えられる周波数領域における結果を示している。自己インダクタンスと同様、解析モデル、fasthenry によって計算されたインダクタンス値も示した。また、解析モデルと測定値の最大誤差と標準偏差を表 4、表 5

にまとめた。その際、波形が乱れている周波数領域は評価の対象外にした。

相互インダクタンスは2.2inch ループの場合、最大で約16%前後過小評価されており、測定値と解析モデルによる計算値とで全体的にずれがあるが、その他の4.4inch ループ、6.6inch ループに関して、誤差は最大で10%前後であり、大部分のデータは非常に良い一致をしていた。

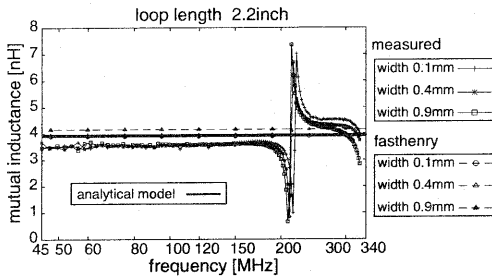


図 17 2.2inch ループの相互インダクタンス周波数特性

Fig. 17 Frequency characteristic of mutual inductance for 2.2inch loop.

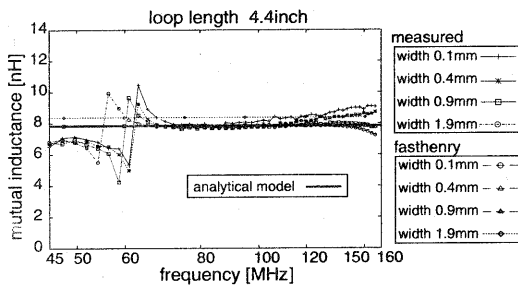


図 18 4.4inch ループの相互インダクタンス周波数特性

Fig. 18 Frequency characteristic of mutual inductance for 4.4inch loop.

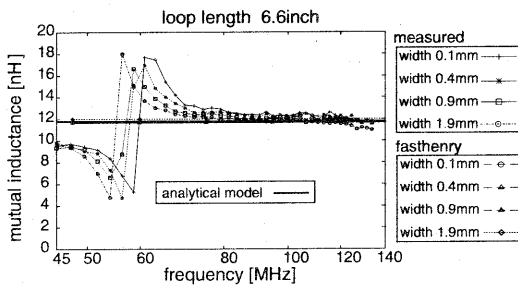


図 19 6.6inch ループの相互インダクタンス周波数特性

Fig. 19 Frequency characteristic of mutual inductance for 6.6inch loop.

5. 結 論

本稿では、複雑な行列演算を用いず解析的な近似式を用いて線分の部分自己インダクタンス、部分相互インダクタンスをある程度の精度を確保しつつ高速且つコンパクトに計算する解析モデルを紹介した。そして、直線導線から成るループ状のイ

表 4 相互インダクタンスの最大誤差

Table 4 Maximum error of mutual inductance.

	2.2inch	4.4inch	6.6inch
width 0.1mm	-15.3%	13.7%	10.8%
width 0.4mm	-15.1%	10.0%	6.7%
width 0.9mm	-16.2%	2.0%	4.8%
width 1.9mm	—	-8.6%	3.1%

表 5 相互インダクタンスの標準偏差 (単位 nH)

Table 5 Standard deviation of mutual inductance.

	2.2inch	4.4inch	6.6inch
expected value	3.926	7.853	11.78
width 0.1mm	0.4229	0.6900	0.6943
width 0.4mm	0.3587	0.4136	0.5456
width 0.9mm	0.3717	0.1102	0.3393
width 1.9mm	—	0.1757	0.3297

ンダクタのインダクタンスを見積もり、スケールアップモデルを採用した測定によりそれを評価、検証した。

ループの自己インダクタンスについて、インダクタが集中定数として考えられる周波数領域において、どのインダクタも解析モデルと測定値との誤差は、大体のデータが10%以内に収まっていた。また、ループ間の相互インダクタンスについては、一部の周波数領域を除き、ほとんどのデータが誤差10%以内にあることがわかった。

今後の課題としては、より集積回路内に近い環境である導体平面上、及び抵抗性基板上に配線がある場合についての解析モデルの評価と新しい解析モデルの検討が挙げられる。

文 献

- [1] T.Chen, "On the impact of on-chip inductance on signal nets under the influence of power grid noise", in Proc. Design, Automation and Test in Europe Conf., June 2001.
- [2] K.Banerjee, A.Mehrotra, "Analysis of on-chip inductance effects for distributed RLC interconnects", Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Trans. on, vol.21, issue 8, August 2002.
- [3] M.Komon, M.J.Tsuk, and J.White, "FASTHENRY:A Multipole-Accelerated 3-D Inductance Extraction Program", IEEE Trans. on MTT, vol.42, No.9, pp.1750—1758, September 1994.
- [4] Raphael version 2000.4, Avant! Corporation.
- [5] Sonnet 8.0 2002, Sonnet Software.
- [6] F.W.Grover, "Inductance Calculations : Working Formula and Tables", Dover Publications, Inc., New York, 1946.
- [7] C.Hoer, C.Love, "Exact Inductance Equations for Rectangular Conductors with Applications to More Complicated Geometries", Journal of Research of the National Bureau of Standards C. Engineering and Instrumentation Vol. 69C, No. 2, pp. 127-137, April-June 1965.
- [8] H. M. Greenhouse, "Design of Planar Rectangular Micro-electronic Inductors", IEEE Trans. on Parts, Hybrids, and Packaging, vol. PHP-10, No.2, pp.101—109, June 1974.
- [9] Sunderarajan S.Mohan, M.del M.Hershenson, S.P.Boyd, and T.H.Lee, "Simple Accurate Expressions for Planar Spiral Inductances", IEEE Journal of Solid-State Circuits, Vol.34, No.10, October 1999.