

## 一般化調和解析における周波数成分の相互干渉

村岡輝雄<sup>†</sup> 松本泰尚<sup>‡</sup>

武蔵工業大学 〒158-8557 東京都世田谷区玉堤 1-28-1

E-mail: <sup>†</sup> t-muraoka@bea.hi-ho.ne.jp, <sup>‡</sup> g0363073@eng.musashi-tech.ac.jp

あらまし 一般化調和解析 (GHA) は、被分析信号を非調和関係にある正弦波の和(即ち概周期信号)で表現するので従来の短時間フーリエ変換 (STFT) より優れた時間一周波数分解能を有する。しかしながらその基本性能には未解明な部分も多く、例えば周波数分離限界や被分析信号中の周波数成分同士の干渉による誤差発生等が挙げられる。

筆者らは周波数と振幅の異なる二つの正弦波よりなる被分析信号を設定し GHA によって抽出された正弦波の誤差を検証した。その結果、誤差は一方の正弦波の周波数帯域内に混入する他方の正弦波に起因する不要周波数成分の干渉による、その正弦波の振幅と周波数の変動として観測される事が分り、二つの正弦波の周波数距離が大きいほど、また振幅比が小さいほど減少し、干渉の程度は二つの正弦波間の内積によって評価されるとの結果を得た。

キーワード 一般化調和解析, ABS 法, 平田のアルゴリズム, 相互干渉

## Mutual interference of frequency components in Generalized Harmonic Analysis (GHA)

Teruo MURAOKA<sup>†</sup> and Yasuhisa MATSUMOTO<sup>‡</sup>

Musashi Institute of Technology 1-28-1 Tamazutsumi, Setagaya-ku, Tokyo, 158-8557Japan

E-mail: <sup>†</sup> t-muraoka@bea.hi-ho.ne.jp, <sup>‡</sup> g0363073@eng.musashi-tech.ac.jp

**Abstract** Generalized Harmonic Analysis (GHA) is equipped with excellent time-frequency resolution better than that of conventional Short Time Fourier Transform (STFT). This advantage is brought by the principle that GHA represents any signal with a combination of sinusoidal functions of inharmonic frequency relationship (Quasi-periodic function). However, its fundamental characteristics such as frequency separation or measurement errors are not clarified sufficiently.

The authors investigated measurement errors through applying the GHA to test signals consist of two sinusoidal functions of different frequencies and amplitudes. Consequently, it was made clear that the errors are observed as variations of amplitudes and frequencies, which depend on frequency difference and amplitude ratio between two signals of sinusoidal functions. Furthermore, it was clarified that the error is caused by an interference from undesirable frequency components in the observed signal band mixed from the other signal, and the interference are estimated with the inner product of two signals.

**Keyword** Generalization harmonic analysis, Analysis By Synthesis, Hirta's algorithm, mutual intervention

### 1. はじめに

時間周波数解析の定番である短時間フーリエ変換 (STFT) は信号を調和関係にある周波数の正弦波の和で表すので、波動の不確定性原理によって、分析時間幅を大きくすれば周波数分解能が上がるが時間分解能は劣化する。このため音響信号の様な非常信号解析には双方の分解能がよい信号分析手法が必要となる。

1958年、N.Wienerによって提唱された<sup>(1)</sup>一般化調和解析 (Generalized Harmonic Analysis :GHA) は信号を周波数関係が非調和的な正弦波の和で表すので不確定性原理の制約がなく、それぞれの分解能を高くできる<sup>(1)</sup>。しかし、GHA は信号への最小二乗距離正弦波の逐次探索を必要とし、膨大な計算量のため顧みられなかった。

計算機が高速・大容量化した近年、平田により GHA の高速アルゴリズムが考案され実用に近づいた<sup>(2)</sup>。

しかしながら GHA には未解明な部分も多く、様々な分析誤差も発生する。本論文では被分析信号中の周波数成分同士の干渉による分析誤差について検討する。

### 2. GHA の原理と課題

#### 2.1. GHA の基本発想

1992年、E.B.George&M.J.Smith は ABS (Analysis By Synthesis) 法と呼ばれる最初の GHA アルゴリズムを示した<sup>(3)</sup>。この方法は、分析窓内の被分析信号に振幅・周波数・位相の異なる正弦波テンプレート(以降“テン

プレート”と呼ぶ)をあてはめて、最小二乗距離正弦波を逐次探索・抽出していくものである。

1992年、平田はABS法とは独立に、計算量を低減したGHAアルゴリズムを発表した<sup>(4)(5)</sup>。このアルゴリズムは、分析窓から更に短い信号を切り出し任意のテンプレートとの内積計算で最小二乗距離の正弦波を探索するものである。従ってこの方法で得られた再合成信号はABS法の近似解となる<sup>(6)</sup>。

## 2.2. ABS法の概要

音声や音楽の様な非定常信号を解析する場合、信号を定常と見做せる短い分析窓で区切り、順次解析する。

ABS法は、分析窓内の被分析信号 $x_0(t)$ を次式の様にな調和関係にある正弦波の線形和で表現する。

$$x_0(t) \cong \sum_{k=1}^K A_k \sin\left(\frac{2\pi t}{T_k} + \phi_k\right) \quad (2-1)$$

ここで、 $K$ は被分析信号を表現する正弦波(以後“抽出正弦波”と呼ぶ)の個数を表し、 $A_k$ 、 $T_k$ 、 $\phi_k$ は $k$ 番目の正弦波の振幅、周期、位相を表す。

ABS法のアルゴリズムは正弦波を逐一探索によって抽出する。そこでは探索に用いるテンプレートの振幅、周期、位相をそれぞれ $A_{ik}$ 、 $T_{ik}$ 、 $\phi_{ik}$ とし、分析窓内の被分析信号 $x_0(t)$ に対して(2-2)式で示されるテンプレート $S_{ik}(t)$ を設定し、続いて(2-3)式で示される両者間の残差 $e_k(t)$ および(2-4)式で示される残差エネルギー(二乗誤差) $E_k(t)$ を定義する。

$$S_{ik}(t) = A_{ik} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{ik}} + \phi_{ik}\right) \quad (2-2)$$

$$e_k(t) = x_{k-1}(t) - A_{ik} \sin\left(\frac{2\pi t}{T_{ik}} + \phi_{ik}\right) \quad (2-3)$$

$$E_k(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \{e_k(t)\}^2 \quad (2-4)$$

$k$ 段階での $E_k(t)$ を最小にするときの各係数を $A_k$ 、 $T_k$ 、 $\phi_k$ として表せば、抽出される $k$ 本目の抽出正弦波は、

$$S_k(t) = A_k \sin\left(\frac{2\pi t}{T_k} + \phi_k\right) \quad (2-5)$$

となる。そして、 $k+1$ 段階では、

$$x_k(t) = x_{k-1}(t) - S_k(t) \quad (2-6)$$

の様に、被分析信号から $k$ 本目の抽出正弦波を引いたものが被分析信号となる。以上の過程を $K$ 回繰り返すことにより、原信号 $x_0(t)$ は、

$$x_0(t) \cong \hat{x}_0 = \sum_{k=1}^K A_k \sin\left(\frac{2\pi t}{T_k} + \phi_k\right) \quad (2-7)$$

の様に、 $K$ 本の正弦波で表現されることになる。

## 2.3. 問題提起<sup>(7)</sup>

STFTで単一正弦波を分析する場合、その周波数成分が分析窓幅で決まる基本周波数の整数倍でない限りFig.2-1(a)に示す様に多くの周波数成分に拡散されるが、GHAでは逐次探索によるのでFig.2-1(b)の様にその周波数成分を正確に表示する。

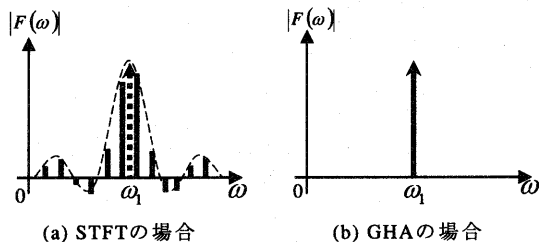


Fig.2-1 単一正弦波の分析

他方、被分析信号が二個の正弦波の場合、GHAではFig.2-2(a)、(b)に示す様にそれら正弦波同士の周波数差によって周波数および振幅の表示が異なる。

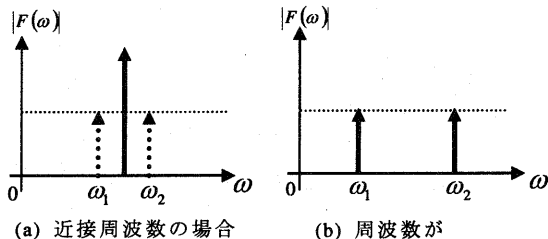


Fig.2-2 GHAによる二周波数正弦波の分析  
離れている場合

この正弦波分離抽出の状況は下図の通りであり、大まかに言えば分離抽出が不可能な領域(a)では二つの周波数の中間の周波数が、また分離抽出される領域(b)ではそれぞれの周波数が表示される。

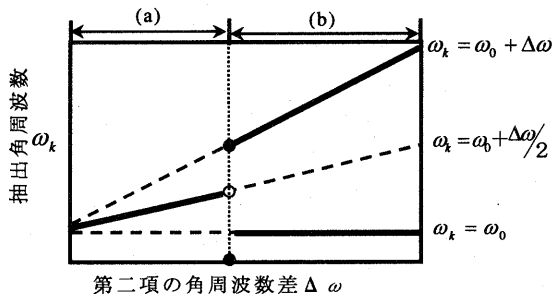


Fig.2-3 分離特性の概念図

しかしながら、実際に抽出された二つの正弦波の振幅と周波数を仔細に検討すると本来の値に対して乱れが認められ、Fig.2-4 に干渉が激しい例として同振幅で周波数が 100Hz と 180Hz の二つの正弦波よりなる被分析信号を GHA によって分析した結果を示す。本来高さが一様な二つの扉の様に表示されるはずの二つの正弦波が、高さがばらつき並びが乱れた杭の列の様にみえる。この乱れは GHA 過程分析における二つの正弦波の干渉によるものと考えられ、本論文ではその解明を試みる。

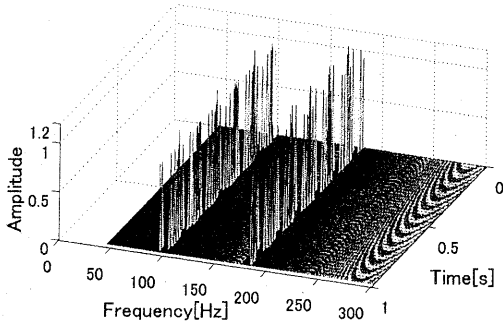


Fig.2-4 GHA における相互干渉の様子

#### 2.4.周波数成分相互干渉の定性的考察

GHA における二信号分離過程は以下の様に説明できる。Fig.2-5 は分析窓で切り出された被分析信号のスペクトラム(実線)と分析窓内のテンプレートのスペクトラム(波線)との関係を示す。

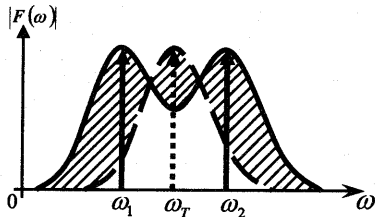


Fig.2-5 周波数領域での分離

斜線で示された面積が両者の残差を表し、それを最小にする周波数と振幅の正弦波が抽出正弦波となる。二信号分離がなされる場合は二つの周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  がある値以上に離れており、抽出の様子は Fig.2-6(a), (b) の様になる

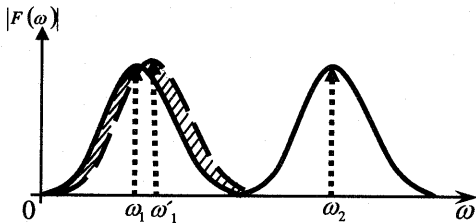


Fig.2-6(a) 一番目の正弦波の抽出

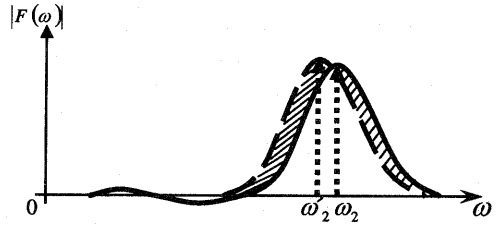


Fig.2-6(b) 二番目の正弦波の抽出

この図では先に低い周波数成分が抽出されるとしているが、いずれにしても本来の周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  は多少異なる周波数  $\omega'_1$  と  $\omega'_2$  が確定する。

いま二つの正弦波よりなる被分析信号  $x_0(t)$  を(2-7)式、テンプレート  $S_{i1}(t)$  を(2-8)式で表すものとする。

$$x_0(t) = \cos \omega_1 t + A \cos \{(\omega_2 - \omega_1)t - \phi\} \quad (2-7)$$

$$S_{i1}(t) = B_{i1} \cos(\omega_{i1}t - \theta_{i1}) \quad (2-8)$$

ここで  $\omega_1$  は第一番目の正弦波の周波数、 $A$  と  $\omega_2$  と  $\phi$  は第二番目の正弦波の相対振幅、周波数およびその分析窓内の初期位相、そして  $B_{i1}$  と  $\omega_{i1}$  と  $\theta_{i1}$  はテンプレートの相対振幅、周波数および位相を表す。

これより  $\Delta t$  を分析窓の時間幅として、残差エネルギー  $E_1$  は(2-9)式の様になる。

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \{f_0(t) - S(t)\}^2 dt \\ &= \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} [\cos \omega_1 t + A \cos \{(\omega_2 - \omega_1)t - \phi\} \\ &\quad - B_{i1} \cos(\omega_{i1}t - \theta_{i1})]^2 dt \end{aligned} \quad (2-9)$$

(2-9)式の極小を与える  $B_{i1}$ ,  $\omega_{i1}$ , そして  $\theta_{i1}$  が第一番目に抽出される正弦波の振幅、周波数、位相となる。

次の段階では被分析信号  $x_1(t)$  は(2-10)式、テンプレート  $S_{i2}(t)$  を(2-11)式で示され、さらに残差エネルギー  $E_2$  は(2-12)式の様になる。但し  $B_{i2}$  と  $\omega_{i2}$  と  $\theta_{i2}$  はテンプレートの相対振幅、周波数、位相を表す。

$$x_1(t) = \cos \omega_1 t + A \cos \{(\omega_2 - \omega_1)t - \phi\} - B_{i1} \cos(\omega_{i1}t - \theta_{i1}) \quad (2-10)$$

$$S_{i2}(t) = B_{i2} \cos(\omega_{i2}t - \theta_{i2}) \quad (2-11)$$

$$E_2 = \int_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} \{f_0(t) - S(t)\}^2 dt$$

$$= \int_{-t/2}^{t/2} \left[ \cos \omega_1 t + A \cos \{(\omega_2 - \omega_1)t - \phi\} - B_{11} \cos(\omega_{11}t - \theta_{11}) - B_{12} \cos(\omega_{12}t - \theta_{12}) \right]^2 dt \quad (2-12)$$

(2-12)式の極小を与える  $B_{12}$ ,  $\omega_{12}$ , そして  $\theta_{12}$  が第二番目に抽出される正弦波の振幅, 周波数, 位相となる。これらの計算は非常に煩雑で時間を要するが, 実際のGHA アルゴリズムによる抽出正弦波の値が理論値に近い事が確認されているため<sup>(7)</sup>, 以下平田のアルゴリズムを用いて周波数成分の干渉を検証する。

### 3. シミュレーション実験

#### 3.1. 被分析信号の設定

GHA における二信号干渉の検証のために非調和関係にある二個の正弦波による被分析信号を設定する。ここでは一個目の正弦波の周波数(基準周波数)を100Hzとし, 二個目の正弦波の周波数は対数軸上の100~20000Hzを10分割して得られる周波数とした。従って二個目の正弦波は Fig.3-1 に示す様に九種類存在し, それらの周波数は次表のようになる。

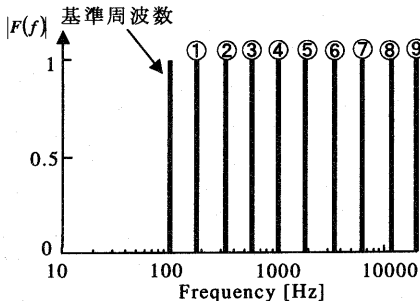


Fig.3-1 二個目の周波数設定

番号	周波数[Hz]	⑤	1898
①	180	⑥	3420
②	325	⑦	6162
③	585	⑧	11101
④	1054	⑨	20000

表.3-1 二個目の周波数成分

また一番目の正弦波に対して二番目の正弦波の振幅を1, 0.5, 0.25の三段階に比率で変化させる事にした。なお被分析信号の時間長は1secとし, 標本化周波数は44.1KHz, 分析窓幅は23.2msec(1024標本点)とした。

#### 3.2. 二信号干渉のシミュレーション

二信号干渉を解明するために上記の被分析信号にGHA(平田のアルゴリズム)を適用して信号分離を行った。それらの結果の中から典型例を示す。図中では実線は100Hzの正弦波に対する抽出値, 点線は二個目の正弦波に対する抽出値であり, 上部が振幅の変動, 下部が周波数の変動を示す。

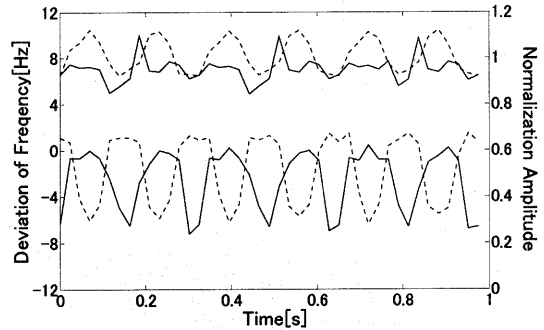


Fig.3-2 二信号干渉(100Hzと180Hz, 振幅比 1)

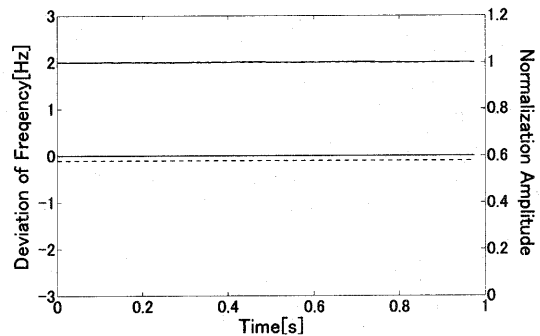


Fig.3-3 二信号干渉(100Hzと11101Hz, 振幅比 1)

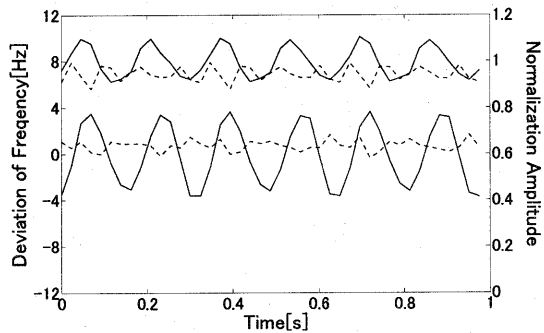


Fig.3-4 二信号干渉(100Hzと180Hz, 振幅比 0.5)

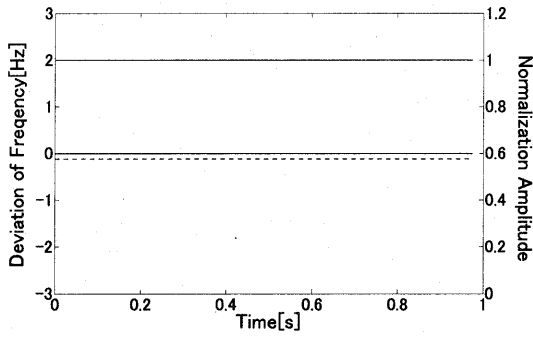


Fig.3-5 二信号干渉(100Hzと11101Hz, 振幅比 0.5)

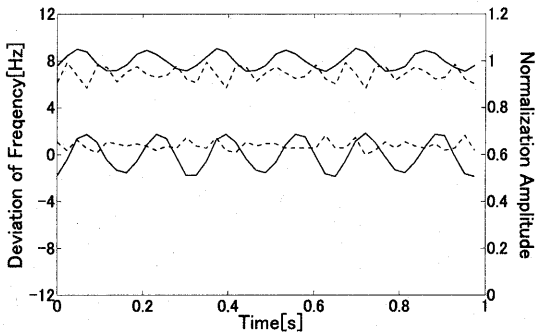


Fig.3-6 二信号干渉(100Hzと180Hz, 振幅比 0.25)

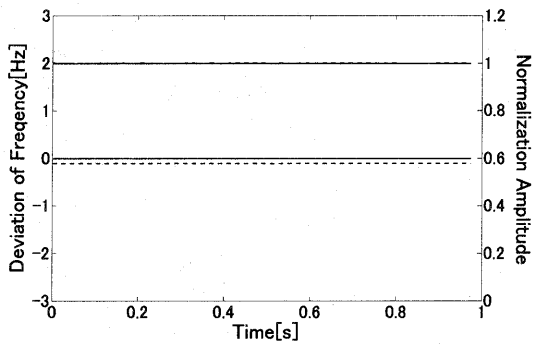


Fig.3-7 二信号干渉(100Hzと111101Hz, 振幅比 0.25)

これらの結果から以下の傾向がわかる。

- ① 二つの正弦波の周波数が十分に離れていれば振幅比に係わらずそれぞれの振幅は正確に表現される。
- ② 二つの正弦波の周波数が十分に離れていれば振幅比に係わらず 100Hz の正弦波は正しく示されるが 高い周波数は僅かに低く(ここでは約 0.15Hz)表現される。
- ③ 二つの正弦波の周波数が接近している時の各々の振幅の変動は大きい。振幅比が小さくなれば第一の正弦波の振幅変動は小さくなり、第二の正弦波の振幅変動はさらに小さくなる。
- ④ 二つの正弦波の周波数が接近している時の各々の周波数変動も大きい。振幅比が小さくなれば第一

の正弦波の周波数変動は小さくなり、第二の正弦波の周波数変動はさらに小さくなる。

そこで 100Hz の正弦波における振幅変動の P-P 値および周波数変動の P-P 値を Fig.3-8 および Fig.3-9 に示す。双方の図の横軸は二番目の正弦波の周波数を示し、3 通りの振幅比に関して表示している。これらの結果から、振幅比が小さくなると各々の変動は小さくなるが、周波数が近接していると十分な分析精度が得られないことがわかる。

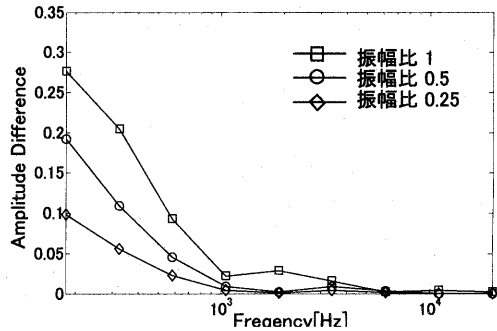


Fig.3-8 振幅比に対する振幅変動

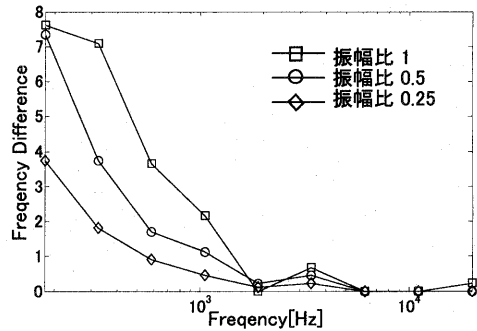


Fig.3-9 振幅比に対する周波数変動

#### 4. 考察

GHA における二信号干渉はラジオ受信の混信に相当する。第二の正弦波を分析窓で切り出す事によって発生する周波数成分の一部は、第一の正弦波の周波数帯域に混入する。その周波数成分の中で第一の周波数成分と直交するものは干渉を引き起こさない。従って干渉を及ぼす周波数成分の大きさは分析窓で切り出された二つの正弦波の内積によって求めることが出来る。

そこで振幅比ごとに、分析窓で切り出された二つの正弦波の内積の P-P 値を求めると Fig.4-1 の様になる。図中の点線は Fig.3-8 に示した振幅対振幅変動比を示し、両者の対比より少なく共 1kHz 以上の帯域では内積は二信号干渉の良好な指標となることがわかる。

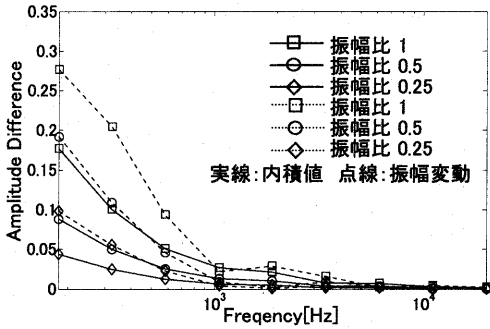


Fig.4-1 振幅比に対する内積値および振幅変動値

次に分析窓幅と二信号干渉の関係を調べるために、二つの正弦波の振幅比が1の条件下で分析窓幅を0.5倍と2倍にして内積を求め、Fig.4-2の結果を得た。

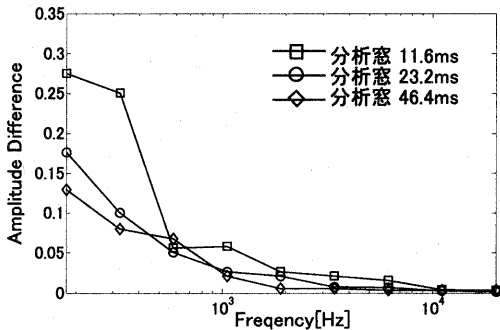


Fig.4-2 分析窓幅に対する内積値

図より約500Hz以上の帯域では内積の値には大差ない。それはFig.4-3の様に矩形窓が生じる不要周波数成分の包絡線が $\sin x/x$ なため周波数の隔たりが大きくなってもなかなか減衰しないためだと考えられる。従って二信号干渉の低減との観点からはGHAを行う際に包絡線の減衰が急速なHanning窓などを用いるのが好ましいと思われる。

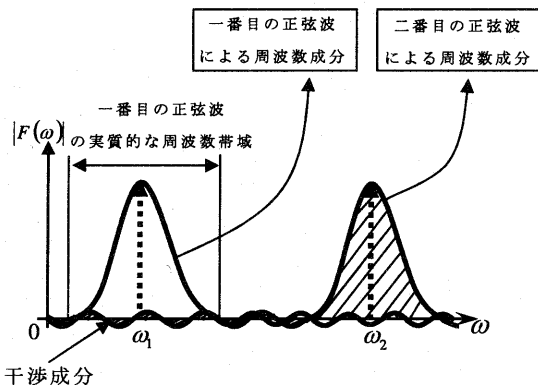


Fig.4-3 GHAにおける相互干渉の概念図

## 5.むすび

筆者らはGHAにおける周波数成分間の相互干渉を検討するために一つの正弦波を被干渉信号とし、もう一つの正弦波を干渉信号と見立てた二つの正弦波による被分析信号を設定し、二つの正弦波に周波数差と振幅差を与えて相互干渉によって生じる誤差を調べた。それらの結果は以下の様に整理される。

- ① 相互干渉による誤差は抽出正弦波に振幅と周波数の変動として観測され、二つの正弦波間の周波数差が小さくなるとこれらの変動は増大し、周波数差が大きくなるとこれらの変動は減少する。
- ② 二つの正弦波間の振幅比が小さくなると、振幅変動・周波数変動ともに減少する。
- ③ 相互干渉は被分析信号の分析窓による切り出しによって生成される不要な周波数成分のそれぞれの正弦波の周波数帯域への混入によってもたらされ、分析窓で切り出された正弦波同士の内積によって干渉の程度が評価できる。
- ④ 相互干渉は分析窓幅にはあまり影響されない。今回は一つの正弦波を干渉信号としたが、以降は帯域雑音や全帯域雑音を干渉信号として解明を行う予定である。

## 謝辞

本研究は、武蔵工業大学 工学研究科 電気工学専攻 音響システム研究室および電子回路研究室において行われたものである。本研究を進めるうえで有益な御指導、御助言をいただいた中添 淳教授、増澤信義助教授、工学院大学大学院情報学専攻の神谷裕一氏に感謝致します。

## 文献

- [1] N.Wiener, "The Fourier Integral and Certain of its Applications," Dover, 1958
- [2] 平田能陸, 小池恒彦, "一般化調和解析を用いた音声帯域圧縮法," 信学技法, EA98-61, pp.17-24, 1998
- [3] E.B.George and M.J.T.Smith, "Analysis-by-Synthesis/Overlap-Add Sinusoidal Modeling Applied to The Analysis and Synthesis of Musical Tones," J.Audio Eng. Soc., 40, (6), pp.497-516, June 1992
- [4] T. Terada, H. Nakajima, M. tohyama, and Y. Hirata, "Nonstationary waveform analysis and synthesis using generalized harmonic analysis," IEEE TF/TS Symp., pp.429-432, 1994
- [5] 牛山聡, 東山三樹夫, 飯塚昌弘, 平田能陸, "一般化調和解析による波形分析," 信学技法, EA-93-103, 1994
- [6] 東山三樹夫, 小池恒彦, "高い周波数分析再合成精度の信号分析手法," 日本音響学会誌, 54(8), pp.567-574, 1998
- [7] 村岡輝雄, 西岡義浩, "一般化調和解析における近接二周波数正弦波の分離," 信学技法, DSP-2003