

局所畳み込みによる補正および周波数領域処理に基づいた 高速フィルタリングとそのDSP実装による検証

轡 良樹[†] 請地 伸隆[†] 市毛 弘一[†] 石井 六哉[†]

[†] 横浜国立大学 大学院 工学府 / 工学研究院

〒240-8501 神奈川県横浜市保土ヶ谷区常盤台79-5

E-mail: †{kutsuwa,ose}@ichilab.dnj.ynu.ac.jp, ††{koichi,ishii}@ynu.ac.jp

あらまし デジタルフィルタやマスキングといった信号処理・画像処理における基本演算の多くは離散畳み込みに基づいている。離散畳み込みを計算機やプロセッサ上で実現する場合、信号長およびフィルタ長によっては、高速フーリエ変換 (FFT) を用いて周波数領域で処理することで大幅に計算量を削減できる。しかし、FFT はデータ長が2のべき乗であるときに最も計算量を抑えられるため、畳み込み演算の結果得られる信号長が2のべき乗をわずかに上回る場合などでは、多くの冗長な0を付加する必要がある。本稿では、入力信号長が2のべき乗であるときに、変形の周波数領域処理と時間領域での局所畳み込みによる補正を用いることで、畳み込み演算およびフィルタ処理の効率改善が可能であることを示す。さらに、その有用性をDSP実装により検証する。

キーワード 離散畳み込み, フィルタ, FFT, DSP

Fast Filtering using Modified Frequency Domain Processing with Time/Space Domain Compensation and Its DSP Implementation

Yoshiki KUTSUWA[†], Nobutaka UKEJI[†], Koichi ICHIGE[†], and Rokuya ISHII[†]

[†] Department of Electrical and Computer Engineering, Yokohama National University

Tokiwadai 79-5, Hodogaya-ku, Yokohama-shi, 240-8501 Japan

E-mail: †{kutsuwa,ose}@ichilab.dnj.ynu.ac.jp, ††{koichi,ishii}@ynu.ac.jp

Abstract Most of basic operations in signal or image processing are based on discrete convolution. Fast Fourier Transform (FFT) is used to implement discrete convolution in frequency domain in order to reduce computational complexity, for certain signal and impulse response durations. FFT needs to add redundant zeros for its operation, since it is designed for the signals whose duration is power of two. Therefore the operation sometimes contains many redundant calculations. This paper proposes an efficient method using modified frequency domain processing and compensation in time/space domain which can improve efficiency in convolution operation and filtering. Its effectiveness is verified through some computer simulation and DSP implementation.

Key words Discrete Convolution, Filter, FFT, DSP

1. まえがき

離散フーリエ変換を計算機やプロセッサ上で高速に計算するアルゴリズムとして、高速フーリエ変換 (FFT) がある。高速フーリエ変換は、データ長が2のべき乗のときに最も計算が効率よくなるため、冗長な0を付加することによって信号を2のべき乗にそろえるという操作が必要になる。長さ K の信号と長さ L のインパルス応答を畳み込んだ結果は、長さ $(K+L-1)$ の信号になるため、FFT を用いて畳み込みを実現するには、 $K+L-1 \leq N$ を満足する最小の2のべき乗数 $N=2^n$ を用

いなければならない[1]。信号長 K やインパルス応答長 L が小さい場合は問題ないが、 N が大きくなると多くの冗長な0を付加するのは無駄が多く、計算量の増加につながる。また、入力信号が無限長である場合、FFT をそのまま用いることはできない。このような場合、無限長のデータ列を有限区間ごとの畳み込みに帰着させ、その実行にFFTを利用するOverlap-Save法 (OLS法) がある[2]。分割する有限区間のサイズを適正に選ぶことによって直接的な解法に比べ非常に高速になるため、OLS法での畳み込みは高速畳み込みと呼ばれる[3]。しかし、OLS法は分割する区間がインパルス応答よりも十分長くなく

ればならず、また2次元フィルタ演算においてそのまま用いることができないという問題がある。

信号処理、画像処理の多くの演算において、処理される信号や画像は2のべき乗のサンプル数がとられている。そのため、フィルタのインパルス応答が短い場合、畳み込みによる結果は2のべき乗をわずかに超えてしまうことになる。信号長が N の場合、FFTを用いて畳み込み演算をする際、FFTのサイズを畳み込みの結果よりも大きくとらなければならないため、 $2N$ を選択しなければならない。この場合、多くの冗長な0を付加して計算することになる。

本稿では、入力信号の多くは 2^n 個のサンプル数であることに着目し、冗長な0の付加を抑え計算量の削減を行うことを目的とした新たな演算手法を提案する。さらに、DSP実装により、直接解法、従来法の巡回畳み込み、OLS法との比較を行う。

2. 準備

2.1 周波数領域での畳み込み演算

離散時間信号 $f(n)$ とフィルタのインパルス応答 $h(n)$ のフーリエ変換をそれぞれ $F(k)$ 、 $H(k)$ とすると、連続時間と同様に、離散時間においても次式に示すように2つの時間信号の畳み込みの結果は、それら2つの時間信号の個々の離散フーリエ変換の積を逆離散フーリエ変換したものととして求められる[1]。

$$F(k) = \text{DFT}[f(n)] \quad (1)$$

$$H(k) = \text{DFT}[h(n)] \quad (2)$$

$$f * h(n) = \text{IDFT}[F(k)H(k)] \quad (3)$$

ただし、 $\text{DFT}[\cdot]$ 、 $\text{IDFT}[\cdot]$ はそれぞれ離散フーリエ変換、逆離散フーリエ変換を表す。

DFTを用いて周波数領域で畳み込みを行う場合、巡回的に時間反転した系列と巡回的に時間シフトした系列とから算出する巡回畳み込みができる。2つの時間信号のDFTを乗算しそれを逆変換したものは、もとの信号の畳み込みと等価になる。ここで重要なのは、畳み込みを行うためにDFTをどのように用いたらいいかということである。長さ K の系列 $f(n)$ と長さ L の系列 $h(n)$ を考えると、これらの畳み込みは長さ $K+L-1$ の有限長系列となる。したがって、2つの周期系列の畳み込みが同一周期の別の系列になることを利用すれば、次のように畳み込みを実行することができる。

Step1

$f(n)$ と $h(n)$ の長さを $N(N=K+L-1)$ にあわせるために、適当な数の0をそれぞれの系列に追加する。

Step2

0を追加した系列 $f(n)$ と $h(n)$ に対して、 N 点DFTを行う。

$$F(k) = \sum_{n=0}^N f(n)W_N^{kn}, \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (4)$$

$$H(k) = \sum_{n=0}^N h(n)W_N^{kn}, \quad (k=0,1,\dots,N-1) \quad (5)$$

ただし、 $W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ は回転因子である。

Step3

それぞれを乗算し、その結果をIFFTすることで出力 $y(n)$ が得られる。

$$Y(k) = F(k)H(k) \quad (6)$$

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k)W_N^{-kn}, \quad (n=0,1,\dots,N-1) \quad (7)$$

FFTを用いたい場合は $K+L-1 \leq N$ であるような2のべき乗 N を選択すればよい。この手法は有限長の系列に対しては完全に動作する。しかし、線形フィルタに応用する場合、入力系列の多くは無有限長となる。この場合には次に示すOverlap-Save法といった手法が一般的に用いられている。

2.2 Overlap-Save法

Overlap-Save法(重複保持法、OLS法)とは、無限長のデータに対する畳み込みを有限なブロックごとの畳み込みに帰着させ、その実行にFFTを利用する手法である。OLS法で行われる手順を示す。図1のように、任意長 K の入力信号 $f(k)$ は、フィルタのインパルス応答 $h(k)$ の長さを L としたとき、 $(L-1)$ サンプルだけ重なり合う長さ N のブロックに分割される。ここで、 N はFFTのサイズであり、フィルタのサイズ L のおよそ4倍程度の2のべき乗が良いといわれている[3]。

Step1

各ブロックに対し巡回畳み込みを行う。フィルタ h に対しては後ろに0を埋め、サイズ N まで伸ばしてから行う。 r 番目のブロックで得られた畳み込みの結果を $g_{r,p}$ とする。

Step2

それぞれの出力の先頭 $(L-1)$ サンプルは、巡回畳み込みの端効果があるために無視される。さらに畳み込みの結果として得られる範囲外も無視することによって、畳み込みの結果 $g(n)$ を得ることができる。

$$g(n) = \sum_{r=0}^{\infty} g_{r,p}[n - r(K-L+1) + L - 1] \quad (8)$$

ただし、

$$g_{r,p}[n] = \begin{cases} g_{r,p}[n], & (n=L-1, L, \dots, K-1) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

3. 提案手法

ここでは、FFTを用いた高速フィルタリングを可能にするための局所的な補正手法を提案する。

FFTを用いる場合にはサンプル数の長さが2のべき乗であるという制限がある。そのため任意長の信号やフィルタにFFTを用いたい場合、後ろに0を冗長して2のべき乗にそろえてFFTを行わなければならない。この冗長により余計に計算量を増やしてしまう。畳み込みで得られる信号長が2のべき乗 N をわずかに超える場合、周波数領域での畳み込みに用いるFFTサイズを $2N$ にそろえなければならない。多くの0を含む信号

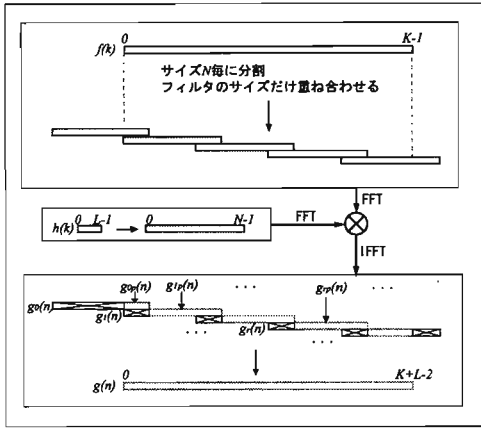


図 1 Overlap-Save 法

に対して計算するのは無駄が多く、計算量の増加につながる。
本章では、畳み込みの結果が 2 のべき乗 N を超えた場合において、FFT サイズを N にしたまま局所的な補正を加えて信号を修復する手法を提案する。

3.1 巡回畳み込みとその性質

離散時間での入力信号 f がインパルス応答が h のフィルタを通過し、出力 g を得るシステムを考える。 f, h のサイズをそれぞれ K, L とする (ただし、 $L \leq K$)。 $K \leq N < K + L - 1$ である 2 のべき乗 N に大きさにそろえて周波数領域で畳みこむと、回転因子 W_N^n を用いて、

$$g(m) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(k)h(\ell) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k+\ell-m)} \quad (10)$$

と表される (付録 1 参照)。ここで、回転因子の和の値は、

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k+\ell-m)} = \begin{cases} N, & k+\ell-m=0, \\ 0, & k+\ell-m \neq 0, N \end{cases} \quad (11)$$

となるので (付録 2 参照)、式 (10) は

$$g(m) = \sum_{k=0}^{K-1} f(k)h(m-k) + \sum_{k=0}^{K-1} f(k)h(N+m-k) \\ =: g_1(m) + g_2(m) \quad (12)$$

のように 2 つの項 $g_1(m), g_2(m)$ に分けることができる。 $g_1(m), g_2(m)$ が値を持つ範囲を考えると、これらは

$$g_1(m) = \begin{cases} \sum_{k=0}^m f(k)h(m-k), & (m=0, 1, \dots, L-1) \\ \sum_{k=m-L+1}^m f(k)h(m-k), & (m=L, L+1, \dots, K-1) \\ \sum_{k=m-L+1}^{K-1} f(k)h(m-k), & (m=K, K+1, \dots, K+L-1) \end{cases} \quad (13)$$

$$g_2(m) = \sum_{k=N+m-L+1}^{K-1} f(k)h(N+m-k), \\ (m=0, 1, \dots, K+L-2-N) \quad (14)$$

と書くことができる。ここで、FFT サイズ N を適切にとると、 $K+L-1-N \leq 0$ となるため、 $g_2(m) = 0$ となり、畳み込みの結果は $g_1(m)$ のみにより、正しい結果が得られる。正しい結果が得られる FFT サイズを用いたときの結果を $g''(m)$ で表せば、

$$g''(m) = g_1''(m) + g_2''(m) \\ = \begin{cases} \sum_{k=0}^m f(k)h(m-k), & (m=0, 1, \dots, L-1) \\ \sum_{k=m-L+1}^m f(k)h(m-k), & (m=L, L+1, \dots, K-1) \\ \sum_{k=m-L+1}^{K-1} f(k)h(m-k), & (m=K, K+1, \dots, K+L-2) \end{cases} \quad (15)$$

となる。今回は $K+L-1 > N$ であるので、 $g_1(m)$ は $0 \leq m < N$ までの結果で打ち切れ、 $g_2(m)$ が存在し結果に影響を与える。式 (14) において $m = p - N$ とおくと、

$$g_2(m) = \sum_{k=p-L+1}^{K-1} f(k)h(p-k), \\ (p=N, N+1, \dots, K+L-2) \quad (16)$$

と。これは式 (15) における $N \leq m < K+L-1$ の部分に相当する。つまり、 $g''(m)$ の $N \leq m < K+L-1$ の要素が $g(m)$ の $0 \leq m < K+L-N$ に現れることがわかる。

3.2 提案手法の流れ

以下に提案手法の流れを説明する。入力信号 $f(k)$ の長さを $K = 2^n$ 、フィルタ $h(k)$ の長さを L 、FFT サイズを $N = K$ 、として巡回畳み込みを行った結果を $g(m)$ 、時間領域での畳み込みの結果を $g'(m)$ 、最終的な結果を $g''(m)$ とする。

時間領域での畳み込みは、

$$g'(m) = \sum_{k=0}^{K-1} f(k)h(m-k), \quad (m=0, 1, \dots, K+L-2) \quad (17)$$

と表せる。

Step1

まず、FFT のサイズ N を $N = K$ として入力信号 f およびフィルタ h に FFT を行う。

$$F(k) = \text{FFT}[f(n)] \quad (18)$$

$$H(k) = \text{FFT}[h(n)] \quad (19)$$

それぞれの要素毎に積をとり IFFT を行う (巡回畳み込み)。

$$g(m) = \text{IFFT}[F(k)H(k)] \quad (20)$$

このとき、出力の大きさが K となり得られるべき結果の大きさ $(K+L-1)$ よりも短く、冗長な 0 を付加しなかったことに

よる誤差が先頭の $(L-1)$ 点に含まれてしまうので、最終的な結果として用いることができるのは、

$$g''(m) = g(m), \quad (21)$$

$$(m = K+L-1-N, K+L-N, \dots, N-1)$$

となる。

Step2

次に入力信号とフィルタの先頭および末尾の $L/2$ 点の直接解法を行う (図 2 の網掛け部分を直接計算する)。

$$g''(m) = \begin{cases} g'(m), & (m = 0, 1, \dots, K + \frac{L}{2} - N - 1) \\ g'(m), & (m = K + \frac{L}{2}, K + \frac{L}{2} + 1, \dots, K + L - 2) \end{cases} \quad (22)$$

Step3

Step1 の $0 \sim (L-2)$ 点に含まれる誤差は本来 $K \sim (K+L-2)$ に現れる部分に相当するため、Step2 との差分から Step1 の誤差を補正する。

$$g''(m) = \begin{cases} g(m) - g'(m+N), & (m = \frac{L}{2}, \frac{L}{2} + 1, \dots, L-2) \\ g(m-N) - g'(m-N), & (m = K, K+1, \dots, K + \frac{L}{2}) \end{cases} \quad (23)$$

式 (17), 式 (21), 式 (23) より $0 \leq m \leq K+L-1$ の $g''(m)$ を求めることができる。

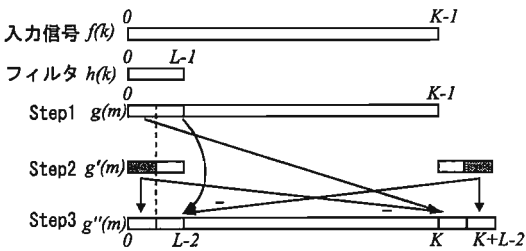


図 2 補正手法

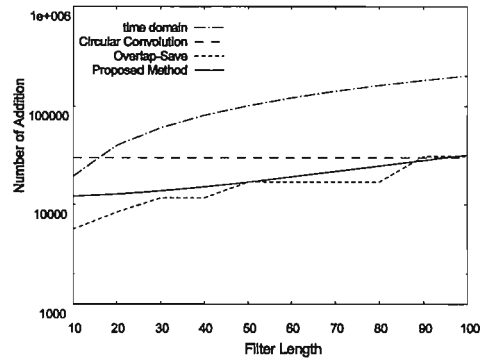
4. シミュレーション

複素入力信号長が 512 点の場合においてフィルタ長 L を変化したときの畳み込みの実数加算回数, 実数乗算回数をそれぞれ図 3(a), 図 3(b) に示す [4]。ある入力信号長とフィルタ長の関係においては, 提案手法は十分効果的であるといえる。

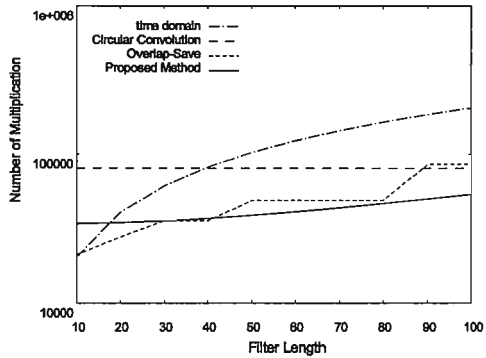
5. 実験

5.1 実験ボード

実験には, テキサス・インスツルメンツ社製 TMS320 C6713 DSK ボードを用いた。主な仕様は表 1 に示す通りである。



(a) 加算回数



(b) 乗算回数

図 3 演算量の比較

表 1 TMS320 C6713 DSK の主な仕様

32bit 浮動小数点 DSP	
動作周波数	225MHz
積和演算器の数	2

5.2 提案手法のプロセス毎の処理時間

前述の DSP ボードを用いて提案手法及び巡回畳み込みの各プロセスでの処理時間 (CPU サイクル数) を比較した。256 点の複素入力信号, フィルタ長 33 の場合において比較した結果は表 2 のようになった。この結果よりフィルタ長が入力信号長と比べて十分に小さい場合において, 巡回畳み込みを行うよりも入力サイズで FFT を行い, 時間領域での畳み込みと補正により求めた方が効率改善されることがわかる。

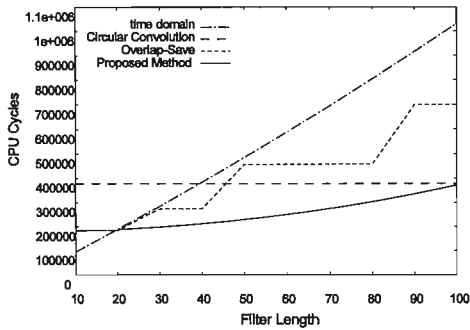
表 2 提案手法・巡回畳み込みの各プロセスの CPU サイクル数 (入力信号長 $K = 256$, フィルタ長 $L = 33$, FFT サイズ $N = K$)

	巡回畳み込み	提案手法	
サイズ $2N$ の FFT	260,020	サイズ N の FFT	115,734
サイズ $2N$ の IFFT	93,692	サイズ N の IFFT	41,824
		直接解法 ($L/2$ 点)	20,876
		補正処理	12,036
プロセス全体	398,388	プロセス全体	202,056

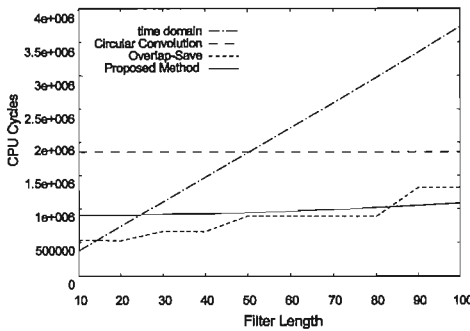
5.3 他の手法との処理時間の比較

提案手法と直接解法（時間領域の畳み込み）、巡回畳み込み、Overlap-Save 法をそれぞれ DSP に実装したときの処理時間を CPU サイクル数により比較した。入力信号長を 256 点、1024 点とし、フィルタ長を変化させたときの CPU サイクル数の変化を測定した結果をそれぞれ図 4(a)、図 4(b) に示す。シミュレーションの結果と傾向に差はあまりみられなかったが、他の手法を上回る範囲が広がっていた。

また、これらの結果より提案手法と巡回畳み込み、Overlap-Save 法とを比較し、提案手法が有効である範囲を入力サイズに対するフィルタ長の大きさに評価すると、図 5 のようになった。これより、入力信号長に対するフィルタ長の大きさが適切な範囲において提案手法は十分に有効であることがわかった。



(a) 入力 256 点の場合



(b) 入力 1024 点の場合

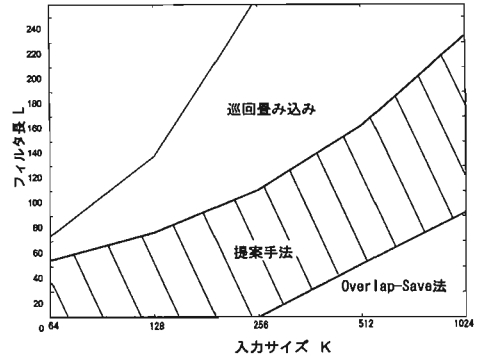
図 4 各入力における処理時間

6. まとめ

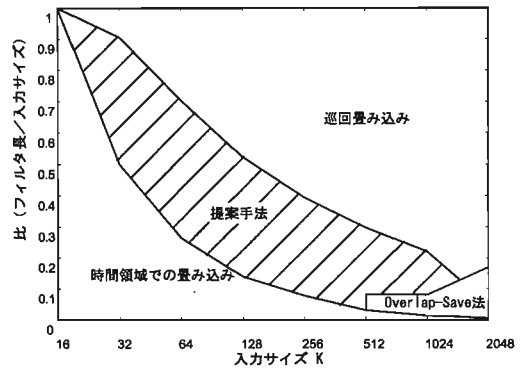
本稿では、入力信号が 2 のべき乗であるときその大きさのまま巡回畳み込みを行い、局所的な畳み込みによって補正を行うことで畳み込みを実現する手法について DSP 実装で検証を行った。その結果、シミュレーションでの結果を上回るような範囲において計算時間を抑えられることを確認できた。

文 献

- [1] A. Oppenheimer, R. Schaffer: Discrete-Time Signal Processing, Prentice-Hall, 1989.
- [2] Stochham, T. G., Jr.: "High Speed Convolution and Correlation", 1966 Spring Joint Computer Conference, pp. 229-233, 1966.



(a) フィルタ長と入力サイズによる有効範囲



(b) フィルタ長と入力サイズの比による有効範囲

図 5 提案手法の有効範囲

- [3] M. Borgerding: Turning Overlap-Save into a Multiband Mixing, Downsampling Filter Bank, IEEE Signal Processing Magazine, pp. 158-161, Mar. 2006.
- [4] 請地 伸隆, 市毛 弘一: "FFT に基づいた高速フィルタリングと局所畳み込みによる補正手法", 信学総大, no. A-4-49, 2007 年 9 月.

付 録

1. 周波数領域での畳み込み

離散時間での入力信号 f がインパルス応答が h のフィルタを通過し、出力 g を得るシステムを考える。 f, h のサイズをそれぞれ K, L とする。ただし、 $L \leq K$ である。 $K \leq N < K + L - 1$ である 2 のべき乗 N に大きさを揃えた $f(k)$ と $h(k)$ の離散フーリエ変換 $F(n), H(n)$ は式 (4)、式 (5) のように表される。式 (4)、式 (5) の、 $k = K, K + 1, \dots, N - 1$ において $f(k) = 0$ 、 $\ell = L, L + 1, \dots, N - 1$ において $h(\ell) = 0$ である。要素ごとの積をとると、

$$\begin{aligned}
 Y(n) &= F(n)H(n) \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k)W_N^{nk} \sum_{\ell=0}^{N-1} h(\ell)W_N^{n\ell} \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(k)h(\ell)W_N^{nk}W_N^{n\ell} \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

とまとめられる。上式に逆離散フーリエ変換を用いると、

$$\begin{aligned}
g(m) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{-mn} Y(n), \quad (m = 0, 1, \dots, N-1) \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(k)h(\ell)W_N^k W_N^\ell W_N^{-mn} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(k)h(\ell)W_N^{n(k+\ell-m)} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\ell=0}^{N-1} f(k)h(\ell) \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{n(k+\ell-m)} \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

となる。

2. 回転因子の展開

W_N^n は回転因子と呼ばれ、単位円を N 等分した点上を移動する変数とみなせ、その N 点全ての和は 0 になる性質がある。

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^n = 0 \quad (\text{A.3})$$

W_N^{ns} は W_N^n が単位円上で移動する点を W_N^n の s 倍の速度で移動する変数とみなせるため、やはりその和は 0 になる。しかし、 s が N の整数倍なら $W_N^{ns} = 1$ となるため、全ての点の和は N になる。

$$\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{ns} = \begin{cases} N, & s = N \text{ の整数倍} \\ 0, & s \neq N \text{ の整数倍} \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

$k, \ell, m = 0, 1, \dots, N-1$ より $(k+\ell-m)$ の取り得る範囲を考えると、

$$-(N-1) \leq (k+\ell-m) \leq 2(N-1) \quad (\text{A.5})$$

すなわち

$$-N < -(N-1) \leq (k+\ell-m) \leq N \leq 2(N-1) < 2N \quad (\text{A.6})$$

となる。

したがって、 $(k+\ell-m)$ が取り得る N の整数倍は 0 か N だけなので、式 (11) のように場合分けられる。式 (11) と、 $k = K, K+1, \dots, N-1$ のとき $f(k) = 0$ より、式 (A.2) は式 (12) のように 2 つの項に分けて考えることができる。

式 (12) の各項が値を持つ範囲について細かく場合わけしてみる。

第 1 項における $f(k)$ が値を持つ範囲は

$$k = 0, 1, \dots, K-1 \quad (\text{A.7})$$

であり、 $h(m-k)$ が値を持つ範囲は

$$m-k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{A.8})$$

である。つまり、第 1 項が値を持つ範囲は

$$(0 \leq k \leq K-1) \cap (m-L+1 \leq k \leq m) \quad (\text{A.9})$$

である。ここから、第 1 項は式 (13) のように分けられる。

同様に、第 2 項における $h(N+m-k)$ が値を持つ範囲は

$$N+m-k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (\text{A.10})$$

であるから、第 2 項が値を持つ範囲は

$$(0 \leq k \leq K-1) \cap (N+m-L+1 \leq k \leq N+m) \quad (\text{A.11})$$

である。したがって、 $g_2(m)$ は、式 (14) のように書ける。