# 資源切り出し型待ち行列モデルによるメモリ競合問題の解析

紀 一誠
(日本電気，基本ソフトウェア開発本部)

## 1. はじめに

システムの性能評価を行う際には，各種の競合問題を定量的に扱う必要にしばしば迫られる。それは例えば図1の如くに，CPUの競合，各種入出力装置の競合，さらにそれ等を包括したメモリの競合問題，といったように相互に関連し複雑な様相を呈している。

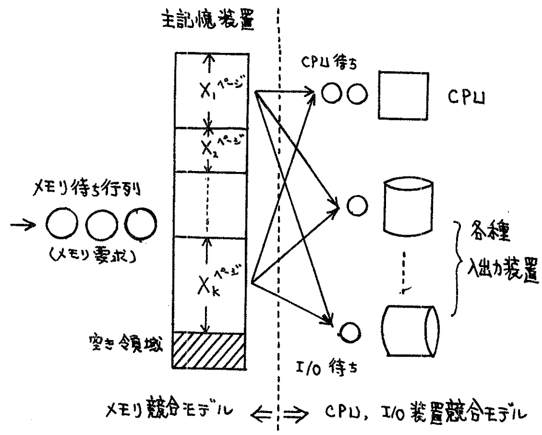


図 1. システム・モデル の一例

一般に，これ等の関係を全て網羅し一挙にモデル化しようとすると数学モデルが複雑になり過ぎ，往々にして解を求める事すら不可能になる場合が多い。かと言って，ほんの僅かなパラメータしか含まないようなシステム・モデルを作ってみても実用になる結果が得られるとも思い難い。この矛盾は全パラメータを包み込んだモデルを一気に作り上げようとした事にあろう。しかし，実システムの動作は比較的独立とみなされるいくつかのサブシステムに局所化し分類する事ができ，このサブシステム間を結びつけるパラメータは本質的な少数のもののみに絞る事ができる。[文献1] 従って，性能評価に際しては，まず対象システムを大略独立とみなせるいくつかのサブシステム群に分割局所化し，各サブシステム毎に応じてモデル化しその内部的諸関係を明確化し，次いでそれ等のサブシステム間の有機的な結合を付けていく事によってシステム全体の動作を多数のパラメータを包みつつ，殆んど精度を損う事なく解明する方法が提案されている。(文献1)

この方法によれば，問題を局所化するため解析が容易になる事，システム動作の因果関係の洞察が容易で，サブシステムの部分的変更が全体に及ぼす影響を把握し易い点，実測データを対応するサブシステムと置き換えることにより精度を高められる，といった数々の利点を持っている。(文献1)

ところで，競合問題を含むような性能評価の場合には，この局所分割化されたサブシステムが既に待ち行列理論あるいはトラヒック理論で解かれているモデルに帰着できるかどうかが大きな問題になってくる。既存の理論が使える場合は問題は無いが，そうでない時には，まず手掛りとなる理論を構築するか，シミュレーションに依るとか，別の手段に頼らざるを得ない。例えば，図1のモデルを点線で2つのサブシステムに分割した場合，右側の部分は多種別リソースの競合問題として扱え既存の待ち行列モデルが使用できる。(文献2) しかし，左側のメモリ競合モデルは筆者の知る限り既存モデルの中には見当たらない。

従って，一般に，性能評価技法の進歩のためには，サブシステムへの分割局所化及びそれ等の総合化にまつわる諸問題の解明と共に，局所化されたサブシステム固有の諸問題の解明の両者が必要であろう。

本稿はこの後者に属する問題を扱ったもので、筆者があるシステムの性能評価を行なった際に出会ったメモリ領域の占有競合問題について、その理論的な扱いについて述べたものである。

対象としたシステムでは、主記憶装置はページと呼ばれる4KBの大きさの領域に区切られており、常駐部を除く残りCページの領域に対して、種々の大きさの要求ページ数を持つメモリ切り出し要求が次々と発生する。　割り付けはページを単位とし主記憶装置内の物理的位置関係には無関係に行われ、要求ページ数以上の空きページが残っていれば割り付け、切り出し不成功な時待ち行列に着く。　後着の要求に対しては割り付け可能であっても先着の要求を飛び越えて割り付けることはしない。（FIFOルール）

この時、与えられた負荷条件に対してメモリの動的占有率がどうなるか、何個のタスクが同時にメモリ上に存るであろうか、メモリ切り出しのための待ち時間はどの位か、待たねばならぬ確率はどの程度か、といったような事が興味の中心である。

発想の発端は以上述べた如くであるが、理論化に際しては以下に述べるモデルの如くに一般的な待ち行列理論の問題として、“資源切り出し型待ち行列”と名付け解析を進めることにする。

## 2. 資源切り出し型待ち行列モデル

前章で出て来た主記憶装置の各ページを資源とみなして、これに対する任意の大きさの切り出し要求をトラヒック理論に従い“呼”と呼ぶことにし、“資源切り出し型待ち行列”のモデルを以下の如くに設定することにする。（図2参照）

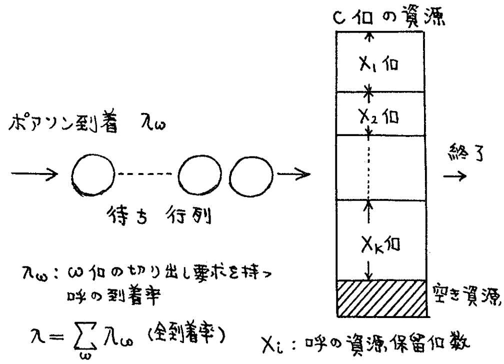


図2 モデルの概念図

【設定条件】

(1) 全体でC個より成る資源に対して、ω個（$1 \leqq \omega \leqq C$）の切り出し要求を持つ呼が$\lambda_\omega$個/秒なる到着率を持ってポアソン到着するものとする。
全体の到着率は $\lambda=\sum_\omega \lambda_\omega$ 個/秒 とする。　資源の切り出しは資源相互の物理的位置関係には無関係に、資源が要求個数以上に空いていれば切り出せるものとし、空きの無い時には待ち行列に着くものとする。

(2) 資源の切り出しは先着順に行われるものとする。（FIFOルール）

(3) 呼の資源保留時間Hは、パラメータμの指数分布に従うものとする。
即ち、Hの分布関数H(t)は次の如くである。　$H(t)=1-e^{-\mu t}$　(以上)

設定条件(1)から次の事がいえる。　ポアソン到着の重ね合せはポアソン到着であるから、呼は全体としてパラメータλのポアソン到着をする。　従って、$f_\omega$を $f_\omega=\lambda_\omega/\lambda$ とすれば、$f_\omega$は到着呼の切り出し要求がω個である確率であると考える事ができ、資源の切り出し個数の分布$\{f_\omega\}$を持つ呼がパラメータλのポアソン到着をしていると考える事ができる。

以上から解るように、本モデルの特徴は、呼によって資源の切り出し個数が異なっている点にある。　呼の資源切り出し要求個数の分布$\{f_\omega\}$は、$1 \leqq \omega \leqq C$ なる現実的条件下で、一般任意の分布であってかまわない。

## 3．記号の定義

本検討で使用する記号を以下の如くに定義しておく。

$J$ ： 系内呼数，任意時点で系に存在している呼数，　確率変数

$K$ ： 資源保留呼数，系に存在している呼の中で資源を保留している呼数

$Z$ ： 被保留資源個数，任意時点で保留されている資源総数，確率変数

$W$ ： 任意の呼の，資源を切り出せるまでの待ち時間，　確率変数

$W(\omega)$ ： $\omega$個の切り出し要求を持つ呼の待ち時間，確率変数

$L$ ： 待ち行列長　，確率変数

$X_i$ ： 呼 $i$ の資源切り出し要求個数，　確率変数

$\lambda_\omega$ ： 切り出し要求$\omega$個を持つ呼の，単位時間当りの到着呼数，到着率

$\lambda$ ： 系全体に対する到着率　，　$\lambda = \sum_\omega \lambda_\omega$　，　$1 \leqq \omega \leqq C$

$H$ ： 任意の呼の資源保留時間　，確率変数

$h$ ： $H$の期待値　，平均資源保留時間，　$E(H) = h$

$\mu$ ： $\mu = 1/h$　　，　$C$　：　資源総数

$a$ ： 資源切り出し呼量，　$a = \lambda h = \lambda/\mu$　　（単位：アーラン）

$f_\omega$ ： 呼の資源切り出し要求個数が$\omega$個である確率，$\{f_\omega\}$　分布

$f_\omega = Pr\{X_i = \omega\} = \lambda_\omega/\lambda$

$v$ ： $X_i$の期待値，　平均切り出し要求個数，　$v = E(X_i)$

$\varphi$ ： 資源保留率，　保留されている資源の割合，　$\varphi = E(Z)/C$

$P(j)$ ： 任意時点で，系内呼数$J$が$j$である確率，　$P(j) = Pr\{J = j\}$

$Z(l)$ ： $Z$の分布関数　　$Z(l) = Pr\{Z \leqq l\}$

$M(0)$ ： 到着呼が待ちに入る確率

$S(n)$ ： 確率変数$X_i$の$n$個の和，$X_i$は互に独立に同一の分布$\{f_\omega\}$に従うものとする。　$S(n) = X_1 + X_2 + \cdots\cdots + X_n$

$F_n(C)$ ： $S(n)$の分布関数　，　$F_n(C) = Pr\{S(n) \leqq C\}$

$U_n(C)$ ： $U_n(C) = F_1(C) + F_2(C) + \cdots\cdots + F_n(C)$

（再生関数　$U(C) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(C)$　を　$n$ 項までで打ち切った関数が $U_n(C)$である。）

$g_{j,k}(r)$ ： $g_{j,k}(r) = j - k + 1 - \{F_k(r) + F_{k+1}(r) + \cdots + F_j(r)\}$

$Y(j,k)$ ： $$Y(j,k) = Pr\{K = k \mid J = j\} = \begin{cases} F_k(C) - F_{k+1}(C) & 1 \leqq k \leqq j-1 \\ F_j(C) & k = j \end{cases}$$

$v(j,l)$ ： $$v(j,l) = Pr\{Z \leqq l \mid J = j\} = \begin{cases} U_j(l) - \sum_{i=1}^{j-1} F_{i+1}(C) F_i(l) / F_i(l) & j \geqq 2 \\ U_j(l) & j = 1 \\ 1 & j = 0 \end{cases}$$

$\gamma(j)$ ： $$\gamma(j) = E(Z \mid J = j) = C + 1 - \sum_{k=1}^{j} l(k) Y(j,k) / F_k(C)$$

$l(k)$ ： $$l(k) = \begin{cases} \sum_{l=k}^{C} F_k(l) & k \leqq m \\ 0 & k > m \end{cases}$$

$m$ ： $m = [C/\min(\omega)]$　，$[\ ]$ はガウス記号，又　$m = \max(K)$　である。

4. 解析諸結果

以下に解析により得られた諸結果を示す。

$\lambda_\omega$ 及び C は与えられているものとする。 $\lambda_\omega$ が与えられているという事は切り出し要求個数の分布 $\{f_\omega\}$ が与えられている事に等価である。

一方，$X_1$，$X_2$，，$X_n$ は互に独立に同一の分布 $\{f_\omega\}$ に従う確率変数であるから，その n 個の和 $S(n)$ の分布関数 $F_n(C)=P_r\{S(n)\leqq C\}$ は $X_i$ の n 重のたたみ込みとして $\{f_\omega\}$ が与えられれば求まる量である。 従ってまた，$F_n(C)$の和 $u_j(C)$も $\{f_\omega\}$によって求まる量である。 よって，結局この$F_n(C)$ とか $u_j(C)$ とかいった関数によって求める諸量が表現できればよい事になる。 以下この表現を用いて結果を示すことにする。

(1) 系内呼数に関連したもの

① 系内呼数の定常分布

$$P(j)=\begin{cases}\{a^j/\prod_{i=1}^{j}u_i(C)\}\,P(0) & j\leqq m\\ \{a/u_m(C)\}^{\ell}\,P(m) & j=m+\ell\ ,\ \ell\geqq 1\end{cases} \quad \text{---- (4.1)}$$

$$P(0)=[\,1+\sum_{j=1}^{m-1}a^j/\prod_{i=1}^{j}u_i(C)+a^m u_m(C)/\{u_m(C)-a\}\cdot\prod_{i=1}^{m}u_i(C)\,]^{-1} \quad \text{----- (4.2)}$$

② 系内呼数 J の期待値 （平均系内呼数）

$$E(J)=\sum_{\ell=1}^{m}\ell a^{\ell}/\prod_{i=1}^{j}u_i(C)+[ma/\{u_m(C)-a\}+u_m(C)a/\{u_m(C)-a\}^2]\cdot a^m/\prod_{i=1}^{m}u_i(C) \quad \text{------ (4.3)}$$

(2) 資源保留呼数 K に関連したもの

① 資源保留呼数 K の分布関数

$$P_r\{K\leqq k\}=1-F_{k+1}(C)\{1-I(k)\} \quad \text{------ (4.4)}$$

但し，$I(k)$は Jに関する分布関数で，$I(k)=P_r\{J\leqq k\}=\sum_{i=0}^{j}P(j)$ ------- (4.5)

② 資源保留呼数が k である確率

$$P_r\{K=k\}=F_k(C)\{1-I(k-1)\}-F_{k+1}(C)\{1-I(k)\} \quad \text{------ (4.6)}$$

③ K の期待値 （平均資源保留呼数）

$$E(K)=a \quad \text{------ (4.7)}$$

④ 系内呼数が j の時の K の条件付き期待値

$$E(K\mid J=j)=u_j(C) \quad \text{------ (4.8)}$$

(3) 被保留資源個数 Z に関連したもの

① 保留されている資源個数 Z の分布

$$Z(\ell)=P_r\{Z\leqq\ell\}=\sum_{j=0}^{m-1}v(j,\ell)P(j)+v(m,\ell)P(m)u_m(C)/\{u_m(C)-a\} \quad \text{----- (4.9)}$$

② Z の期待値 ，（平均被保留資源個数）

$$E(Z)=\sum_{j=1}^{m-1}\gamma(j)P(j)+\gamma(m)P(m)u_m(C)/\{u_m(C)-a\} \quad \text{----- (4.10)}$$

(4) 待ち時間，待ち行列に関連するもの

① 待ち時間 W の期待値 （平均待ち時間）

$$E(W)/k = g_{2,2}(c)F_1(c)P(1) + \sum_{j=2}^{m-1}\{g_{j+1,2}(c)F_1(c) - \sum_{k=2}^{j}F_k(c)g_{j+1,k+1}(c)/(k-1)k\}P(j)$$
$$+ \frac{u_m(c)P(m)}{u_m(c)-a}\{g_{m,2}(c)F_1(c) - \sum_{k=2}^{m-1}F_k(c)g_{m,k+1}(c)/(k-1)k\}$$
$$+ \left\{\frac{u_m(c)}{u_m(c)-a}\right\}^2\cdot\{F_1(c) - \sum_{k=2}^{m}F_k(c)/(k-1)k\}P(m) \qquad \text{------}(4.11)$$

② 切り出し要求 ω 個を持つ呼の待ち時間 W(ω) の期待値

$$E\{W(\omega)\}/k = g_{1,1}(c-\omega)F_1(c)P(1) + \sum_{j=2}^{m}\{g_{j,1}(c-\omega)F_1(c) - \sum_{k=2}^{j}F_k(c)g_{j,k}(c-\omega)/(k-1)k\}P(j)$$
$$+ \frac{aP(m)}{u_m(c)-a}\{g_{m,1}(c-\omega)F_1(c) - \sum_{k=2}^{m}F_k(c)g_{m,k}(c-\omega)/(k-1)k\}$$
$$+ \frac{a\,u_m(c)P(m)}{\{u_m(c)-a\}^2}\{F_1(c) - \sum_{k=2}^{m}F_k(c)/(k-1)k\} \qquad \text{-----}(4.12)$$

③ 待ち行列長 L の期待値

$$E(L) = E(J) - a \qquad \text{-----}(4.13)$$

④ 待ち合せ率，到着呼が待ち合せねばならない確率

$$M(0) = 1 - \sum_{j=0}^{m-1}F_{j+1}(c)P(j) \qquad \text{------}(4.14)$$

(5) その他の諸関係

① 系内呼数の定常分布が存在するための必要十分条件

$$|a/u_m(c)| < 1 \qquad \text{-----}(4.15)$$

再生理論によれば，次のような関係が成り立つ事が知られている。

$$u_m(c) = \sum_{m=1}^{\infty}F_m(c) = E(N) \quad ,\ 但し\quad N = \max\{m \mid S(m) \leq c\} \qquad \text{-----}(4.16)$$

② 呼の到着直前での系内呼数が j である確率 *P(j)

$$P(j) = {}^*P(j) \qquad \text{-----}(4.17)$$

但し，*P(j) は次の如くに定義される。J(t) は任意時刻 t の系内呼数である。

$${}^*P(j) = \lim_{dt\to 0} P_r\{J(t) = j \mid J(t+dt) = J(t)+1\} \qquad \text{------}(4.18)$$

## 5．解析

以下に前章で示した解析結果に至るまでの解析過程について述べる。

### (1) 系内呼数の定常分布について

時刻 t における系内呼数を J(t)，資源保留呼数を K(t) とする。 $J(t) = j$，$K(t) = k$ である状態を $(j, k)$ で表わすことにする。

系が $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2)$ に入ってから $\boldsymbol{j} = (j_1, j_2)$ に推移するまでの時間を $\tau(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ とすると，呼の資源保留時間はパラメータ $\mu$ の指数分布に従うから，$\tau(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ はパラメータ $i_2\mu$ なる指数分布に従う。 また，呼はポアソン到着し，到着呼の資源切り出し要求個数の分布も時刻に無関係に与えられているので，1回の状態変化にともなう状態間推移の条件付確率は変化前の状態により完全に規定することができる。 従って，この系は時間的に一様なマルコフ過程をなすと考えることができる。

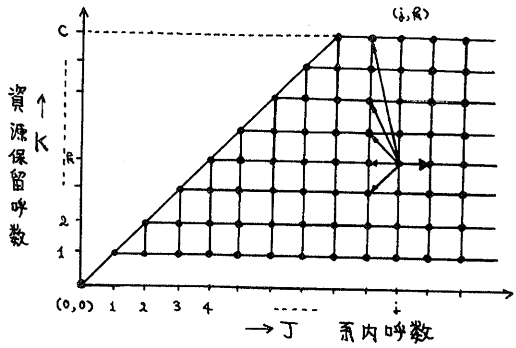

図3 系の状態 $(j, k)$ の概念図

改めて，次のようなベクトル値をとる定常マルコフ過程を考えることにする。

$\{X(t, \omega), t \in T[0, \infty), \omega \in \Omega^2\}$，但し，$\Omega^2$ は $\Omega = (0, 1, 2, \cdots\cdots)$ の直積空間とする。

状態空間 $\Omega^2$ のうち，図3において●印を付けた点の集合 $\mathbb{C}$ が既約な集合である。 以後 $\mathbb{C}$ 上での推移を考えていく事にする。

$X(t, \omega) = (i_1, i_2)$ のとき，$(t, t+h)$，$(h > 0)$ において1回の状態変化の生ずる確率（推移強度関数）を，$q_{(i_1, i_2)}h + o(h)$ とし，1回の変化で $(j_1, j_2)$ に移る確率（無限小パラメータ）を $q_{(i_1, i_2),(j_1, j_2)}h + o(h)$ とする。 但し，$o(h)$ は $h$ の高次項とする。

考えている系においては，次の如くの関係が成り立っている。

① $q_{(j,l)} = \lambda + l\mu \quad , \quad 0 \leq l \leq j$ ---- (5.1)

② $q_{(j,l),(j-1,m)} = \varphi_j(l, m)\, l\mu \quad , \quad 1 \leq l \leq m+1 \leq j$ ---- (5.2)

但し，$\varphi_j(l, m)$ は，呼の終了によって系内呼数が $j$ から $j-1$ に変る時に，資源保留呼数が $l$ から $m$ に変る確率である。 （図4参照）

従って，次の関係が成り立っている。 $\sum_{m=l-1}^{j-1} \varphi_j(l, m) = 1$

③ $q_{(j,l),(j+1,m)} = \lambda\beta_j(l, m)$ ---- (5.3)

$1 \leq l \leq j, \quad m = l, \ l+1$

但し，$\beta_j(l, m)$ は呼の到着によって系内呼数が $j$ から $j+1$ に変る時に，資源保留呼数が $l$ から $m$ に変る確率で，次の如くの関係がある。 （図5参照）

$\beta_j(l, l) + \beta_j(l, l+1) = 1 \quad , \quad j = l$

$\beta_j(l, l) = 1 \ , \ \beta_j(l, l+1) = 0 \quad , \quad j \neq l$

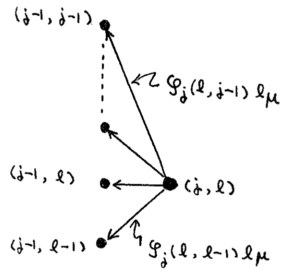

図4 呼の終了による状態変化

④ $q_{(0,0),(1,1)} = \lambda$ ----- (5.4)

⑤ $q_{(j,l),(x,y)} = 0$ ----- (5.5)

但し，$(x, y)$ は①～④にあげた以外の状態とする。

また，$(i_1, i_2)$ から t 時間後に $(j_1, j_2)$ に推移する確率を次式の如くに定義しておく。

$$P_{(i_1, i_2),(j_1, j_2)}(t) = \Pr\{X(t, \omega) = (j_1, j_2) \mid X(0, \omega) = (i_1, i_2)\} \quad ----- (5.6)$$

①～⑤を用い，(5.6) についてコルモゴロフの前向き微分方程式を作ると次の如くになる。

$$\frac{d}{dt}P_{(x,y),(j,k)}(t) = -(\lambda + k\mu)P_{(x,y),(j,k)}(t) + \sum_{\ell=1}^{k+1}\varphi_{j+1}(\ell,k)\,\ell\mu\,P_{(x,y),(j+1,\ell)}(t)$$
$$+\sum_{\ell=k-1}^{k}\beta_{j-1}(\ell,k)\lambda P_{(x,y),(j-1,\ell)}(t) \quad \text{---- (5.7)}$$

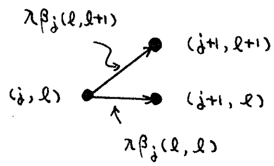

図5　呼の到着による状態変化

ここで，$r(j,k) = P_r\{K(t)=k \mid J(t)=j\}$ ---- (5.8)

また，$P_{(x,j)}(t) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} P_{(x,y),(j,k)}(t) = P_r\{J(t)=j \mid J(0)=x\}$ ----- (5.9)

とし，(5.10) なる関係を用いて (5.7) 式を変形し，(5.11),(5.12) なる微分方程式を得る。

$$\sum_{k=1}^{j} k\,r(j,k) = u_j(c) \quad \text{---- (5.10)}$$ （次項にて証明する）

$$\begin{cases} P'_{(x,j)}(t) = -\lambda P_{(x,j)}(t) - u_j(c)\mu P_{(x,j)}(t) + u_{j+1}(c)\mu P_{(x,j+1)}(t) + \lambda P_{(x,j-1)}(t), & x \geq 0,\ j \geq 1 \quad \text{---- (5.11)} \\ P'_{(x,0)}(t) \quad -\lambda P_{(x,0)}(t) + \mu P_{(x,1)}(t) & x \geq 0,\ j=0 \quad \text{---- (5.12)} \end{cases}$$

この微分方程式は，出生率が $\lambda$，死滅率を $u_j(c)\mu$，と考えた時の出生死滅過程についてのコルモゴロフの前向き微分方程式になっている。

出生死滅過程については既に種々の性質が調べられており，結果が使える。

この出生死滅過程が再帰的正状態であるための必要十分条件は (5.13) の如くである事が知られており，この時定常分布 $P(j) = \lim_{t\to\infty} P_{(x,j)}(t)$ が存在し，(5.14) の如くになり，確率条件 $\sum_{j=0}^{\infty} P(j) = 1$ を付する事により $P(0)$ は (5.15) の如くになる事が知られている。

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^i}{u_1(c)u_2(c)\cdots u_i(c)} < \infty, \quad a = \lambda/\mu \quad \text{---- (5.13)}$$

$$P(j) = \{a^j / \prod_{i=1}^{j} u_i(c)\} P(0) \quad \text{------ (5.14)}, \qquad P(0) = \{1 + \sum_{j=1}^{\infty} a^j / \prod_{i=1}^{j} u_i(c)\}^{-1} \quad \text{---- (5.15)}$$

ところが，同時に資源を保留し得る最大呼数 $m$ を3章で定義した如くにすると，

$m < n$ なる総ての $n$ に対して，$F_n(c) = 0$，$u_m(c) = u_n(c)$ ---- (5.16)

なる関係が成り立ち，従って，例えば (5.13) の左辺は (5.17) の如くになり，有限確定値をとる条件 (4.15) が得られる。

$$(5.13)\text{式} = \sum_{i=1}^{m-1} a^i / \prod_{j=1}^{i} u_j(c) + \{a^m / \prod_{j=1}^{m} u_j(c)\}\{1 + a/u_m(c) + a^2/u_m^2(c) + \cdots\cdots\} \quad \text{---- (5.17)}$$

同様に (5.16) を用いて，(5.14),(5.15) を整理する事により，系内呼数の定常分布 (4.1),(4.2) を得る。

(2) 資源保留呼に関連した解析

呼の資源切り出し要求の分布は時間的に一様で，保留時間とも独立であるので，(5.8) で示される $r(j,k)$ はさらに，$r(j,k) = P_r\{K=k \mid J=j\}$ と表わせる。

① FIFO ルールの時 $r(j,k)$ は次の如くになる。

$$r(j,k) = \begin{cases} F_k(c) - F_{k+1}(c) & , 1 \leq k \leq j-1 \\ F_j(c) & \quad k = j \end{cases} \quad \text{---- (5.18)}$$

（証明）

$J=j$ の時，$K$ は次式によって定義される確率変数となる。

$$K = \max\{k \mid S(k) \leq c\}, \quad 1 < k < j-1 \quad \text{---- (5.19)}$$

従って定義より，$P_r\{K \geq k \mid J=j\} = P_r\{S(k) \leq c\}$ ---- (5.20)

$\therefore\ r(j,k) = P_r\{K \geq k \mid J=j\} - P_r\{K \geq k+1 \mid J=j\} = F_k(c) - F_{k+1}(c)$，$1 \leq k \leq j-1$，---- (5.21)

また，$F_{j+1}(c) = 0$ であるから，$r(j,j) = F_j(c)$，$k=j$.　（証明終り）

② (5.10)式の証明

(5.18)式より，明らかに次式が成り立つ。

$$E(K \mid J=j) = \sum_{k=1}^{j} k \Pr\{K=k \mid J=j\} = \sum_{k=1}^{j} k\, r(j,k) = u_j(c) \qquad \text{---- (5.22)}$$

(証明終り)

③ (4.9)式の証明

補題として，$v(j,\ell) = \Pr\{z \leq \ell \mid J=j\}$ を証明しておく。 ------ (5.28)

$j \geq 2$ に対して，$\Pr\{z \leq \ell \mid J=j\} = \sum_{k=1}^{j} \Pr\{K=k \mid J=j\} \cdot \Pr\{S(k) \leq \ell \mid S(k) \leq c\}$

$$= \sum_{k=1}^{j} r(j,k) F_k(\ell)/F_k(c) = \sum_{k=1}^{j} F_k(\ell) - \sum_{k=1}^{j-1} F_{k+1}(c) F_k(\ell)/F_k(c) = u_j(\ell) - \sum_{i=1}^{j-1} F_{i+1}(c) F_i(\ell)/F_i(c) = v(j,\ell)$$

また，$\Pr\{z \leq \ell \mid J=1\} = F_1(c) = u_1(\ell) = v(1,\ell)$，$\Pr\{z \leq \ell \mid J=0\} = 1 = v(0,\ell)$ (補題証明終り)

(4.9)の証明

$$z(\ell) = \sum_{j=0}^{\infty} \Pr\{z \leq \ell \mid J=j\} P(j) = \sum_{j=0}^{\infty} v(j,\ell) P(j)$$

ところが，$j \geq m$ に対して $v(j,\ell) = v(m,\ell)$ に注意し上式より (4.9) を得る。(証終)

④ (4.7)式の証明

$$E(K) = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr\{K=k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k [F_k(c) \Pr\{J \geq k\} - F_{k+1}(c) \Pr\{J \geq k+1\}] = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(c) P(k)$$

$$= a \sum_{k=1}^{\infty} \{a^{k-1} / \prod_{i=0}^{k-1} u_i(c)\} P(0) = a \sum_{k=0}^{\infty} P(k) = a$$

(証明終り)

## (3) 待ち時間に関連した解析

(4.11)，(4.12)式を導く事が目標である。そのためには，いくつかの補題を証明しておかなくてはならない。

ω個の資源切り出し要求を持つ呼が，系に到着する直前の系内呼数が $j$ である時，到着呼が資源を切り出せるまでの待ち時間を $W_j(\omega)$ とする。この呼の到着時刻を $\tau_0$ とし，その後の $i$ 番目の呼の終了時刻を $\tau_i$ とし，呼の終了間隔である $T_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ なる確率変数を考えることにする。

また，この呼が資源を切り出せるまでに終了した呼の数を $N = R_j(\omega)$ と記すことにする。次の如くの諸関係が成り立つ。

$$W_j(\omega) = T_1 + T_2 + \cdots + T_N, \quad N = R_j(\omega) \qquad \text{---- (5.24)}$$

$$W(\omega) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(\omega) * P(j) = \sum_{j=0}^{\infty} W_j(\omega) P(j) \qquad \text{---- (5.25)}$$

(4.17より：証明略)

$$W = \sum_{\omega} f_\omega W(\omega) \qquad \text{---- (5.26)}$$

① 補題1

$$E\{W_j(\omega)\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{N=n\} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{N \geq i\} \cdot E(T_i) \qquad \text{---- (5.27)}$$

(証明)

$$E\{W_j(\omega)\} = \int_0^{\infty} t\, d\Pr\{W_j(\omega) \leq t\} = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{N=n\} \cdot \int_0^{\infty} t\, d\Pr\{T_1 + T_2 + \cdots + T_n \leq t\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr\{N=n\} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(T_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr\{N \geq i\} E(T_i)$$

(補1，証明終り)

② 補題2

$$E(T_i) = \sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k)/k\mu = \begin{cases} k\{F_1(c) - \sum_{k=2}^{j-i+1} \frac{F_k(c)}{(k-1)k}\}, & i \leq j-1 \\ kF_1(c), & i = j \end{cases} \qquad \text{---- (5.28)}$$

(証明)

系が$(j,k)$になってから次の呼の終了までの時間の分布関数は，$G_k(t) = 1 - e^{-k\mu t}$ なる指数分布であり，$T_i$ は $i-1$ 番目の呼が終了後の呼終了間隔であるから，$T_i$ の従う分布関数は，$B_i(t) = \sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k) G_k(t) = 1 - \sum_{k=1}^{j-i+1} r(j-i+1,k) e^{-k\mu t}$ なる超指数分布に従う。よって，この期待値をとり (5.28) 式を得る。(補2，証明終り)

③ 補題 3

$$Pr\{R_j(\omega) \leqq r\} = F_{j-r}(c-\omega) \qquad \text{-----}(5.29)$$

（証明）

切り出し要求ωを持つ呼の到着直前の系が $(j, k)$ であったとする。この呼が資源を確保するまでに終了していく呼，1, 2, ……, r によって解放される資源数を $Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ (個) とすると，$Y(r) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_r$ とし，待ち行列中の呼の資源要求個数の総和は，$S(j) - S(k) + \omega$ (個) である事を考えて，$R_j(\omega)$ は (5.30) 式で定義される如くの確率変数となる。（図6 参照）

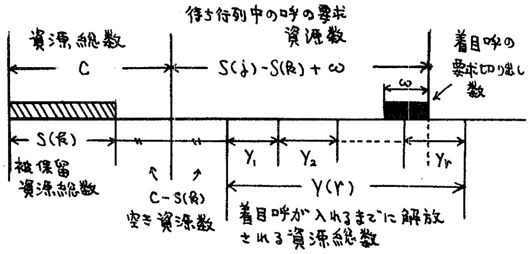


図 6 資源保留/解放の概念数

$$R_j(\omega) = \min\{r \mid C - S(k) + Y(r) \geqq S(j) - S(k) + \omega\} = \min\{r \mid Y(r) \geqq S(j) - (c-\omega)\} \qquad \text{-----}(5.30)$$

ここで，$Y(r) \geqq y$ という事は，$R_j(\omega) \leqq y$ である事に注意し，次式を得る。

$$Pr\{R_j(\omega) \leqq r\} = Pr\{Y(r) \geqq S(j) - (c-\omega)\} = Pr\{S(j) - Y(r) \leqq c - \omega\} \qquad \text{----}(5.31)$$

また，終了呼 1, 2, 3, ……, r は系内呼 1, 2, 3, ……, j のいずれかであり，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_r$ 及び $X_1, X_2, \cdots, X_j$ は同一の分布に従う確率変数であるから，(3.31) 式はさらに次の如くになる。

(5.31)式 $= Pr\{S(j-r) \leqq c-\omega\} = F_{j-r}(c-\omega)$ （補3 証明終り）

④ 補題 4

$$\sum_\omega f_\omega g_{j,k}(c-\omega) = g_{j+1,k+1}(c) \qquad \text{----}(5.32)$$

（証明）

$$(\text{左辺}) = \sum_\omega f_\omega\{(j-k+1) - \sum_{i=k}^{j} F_i(c-\omega)\} = j-k+1 - \sum_{i=k}^{j}\sum_\omega f_\omega F_i(c-\omega)$$

，$\sum_\omega f_\omega F_i(c-\omega) = F_{i+1}(c)$ より

$$= j-k+1 - \sum_{i=k}^{j} F_{i+1}(c) = g_{j+1,k+1}(c)$$

（補4 証明終り）

⑤ (4.12) 式の証明

補題 1, 2, 3 を用いて，次式を得る。

$$E\{W_j(\omega)\} = \begin{cases} k\{F_1(c)g_{j,1}(c-\omega) - \sum_{k=2}^{j} F_k(c)g_{j,k}(c-\omega)/k(k-1) & , j \geqq 2 \\ kF_1(c)g_{1,1}(c-\omega) & , j = 1 \end{cases} \qquad \text{----}(5.33)$$

上式及び，$j \geqq m+1$ に対して $F_j(c-\omega) = 0$ を用い，(4.12) の左辺は次の如くになる。

$$E\{W(\omega)\}/k = F_1(c)g_{1,1}(c-\omega)P(1) + \sum_{j=2}^{m}\{F_1(c)g_{j,1}(c-\omega) - \sum_{k=2}^{j} F_k(c)g_{j,k}(c-\omega)/(k-1)k\}P(j)$$

$$+ \sum_{j=m+1}^{\infty}\{F_1(c)g_{j,1}(c-\omega) - \sum_{k=2}^{m} F_k(c)g_{j,k}(c-\omega)/(k-1)k\}P(j) \qquad \text{----}(5.34)$$

ここで，$g_{j,k}(c-\omega) = g_{m,k}(c-\omega) + (j-m)$ ---- (5.35)

および，$\sum_{l=1}^{\infty} P(m+l) = aP(m)/\{u_m(c) - a\}$ ，$\sum_{l=1}^{\infty} lP(m+l) = au_m(c)P(m)/\{u_m(c) - a\}^2$ ---- (5.36)

なる関係を用い，(5.34) 式中の無限級数の部分を表現しなおすと次の如くになる。

$$(5.34)\text{式} = F_1(c)g_{1,1}(c-\omega)P(1) + \sum_{j=2}^{m}\{F_1(c)g_{j,1}(c-\omega) - \sum_{k=2}^{j} F_k(c)g_{j,k}(c-\omega)/(k-1)k\}P(j)$$

$$+ F_1(c)[ag_{m,1}(c-\omega)/\{u_m(c) - a\} + au_m(c)/\{u_m(c) - a\}^2]P(m)$$

$$- \sum_{k=2}^{m}\{F_k(c)/(k-1)k\}[ag_{m,k}(c-\omega)/\{u_m(c) - a\} + au_m(c)/\{u_m(c) - a\}^2]P(m)$$

これを整理する事により，(4.12) 式の左辺を得る。 (4.12)式の証明終り。

⑥ (4.11) 式の証明 $E(W) = \sum_\omega f_\omega E\{W(\omega)\}$ と補題 4 を用いる。 （詳細略）

## 6. 簡単な数値例

理解の一助のため，図7に示す如くの極めて簡単なモデルについての数値例を作ってみた。このモデルでは資源数 c は3個であり，切り出し要求1個，2個，3個を持つ呼の到着率 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は全て等しく，全到着率 $\lambda$ の 1/3 であるとする。

呼の平均資源保留時間は $R = 1$ 秒としておく。

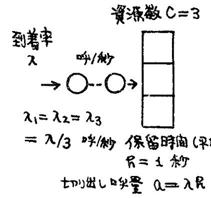


図7 数値例のモデル

この時，定常分布が存在するための条件は，

$a < 37/27 \fallingdotseq 1.37$ アーラン である。

また，切り出し呼量 a と切り出し待ち時間 E(W) の関係を図8に，また，a = 1.0 アーランの時の被保留資源数 z の分布例を図9に示す。

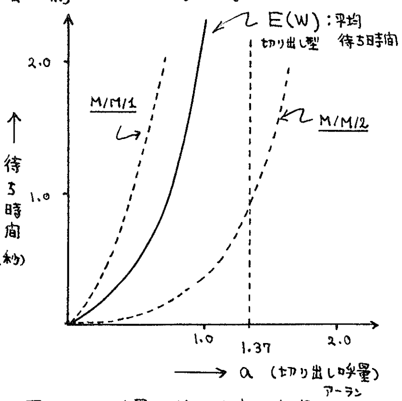


図8 呼量と待ち時間の関係

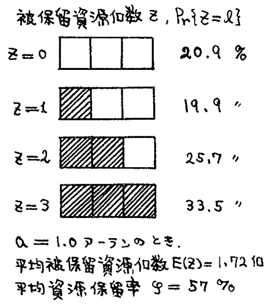


図9 被保留資源数 z の分布例

## 7. まとめ

本モデルは ω が一定の場合には M/M/S モデルに合致するが，4章の諸式において ω を一定とした場合に，既存の M/M/S の諸公式に一致することが確認されている。

以上の解析で，"資源切り出し型待ち行列" に関する理論的な諸問題のうち，基本的な事項については解明できたと考えてよいであろう。

しかし，一般に，この種のモデルの解析の意義は，解決を迫られている性能評価上の現実問題にいかに有効に役立ち得るかによって最終的に計られるものであろう。　従って，今後は本解析を種々の現実問題に適応し，応用面での蓄積を豊富にしていく事が当面の課題と考えている。

また，理論解析としての発展方向では，入線有限タイプモデルへの拡張，割り付け方式を FIFO 以外のものに拡張していくこと，などが考えられる。

最後に，本検討を開始する機会を与え，終了まで継続すべく種々の援助を与えていただいた，当社産業システム営業本部　新田課長，伊達主任，また，この発表を奨めて下さった中央研究所　三上課長，並びに有益な助言をいただいた関係各位に感謝の意を表します。

## 【参考文献】


(1) 関野 陽：バーチャルメモリを持つ大型計算機システムの性能評価，社内資料，1974
(2) 新田,伊達,紀：TSSにおける性能評価のためのソフトウェア・メータリング，電気学会研究会資料(IP-73-19)，1973
(3) W.フェラー　：確率論とその応用 上,下，紀伊国屋，1961
(4) T.SAATY　：ELEMENTS OF QUEUEING THEORY，McGraw-Hill，1961
(5) 本間 鶴千代：待ち行列の理論，理工学社，1966
(6) ホーエル・ポート・ストーン：確率過程入門，東京図書，1974
(7) 魚返 正：確率論，朝倉書店，1973
(8) 鈴木 武次：待ち行列，裳華房，1972
(9) 細川 考行：待ち行列理論入門，社内資料，1972
(10) 北川敏男 編：マルコフ過程，共立出版，1967