

待ち行列網における待ち時間について

川島 武 (防衛大学校)

1. はじめに

計算機網の評価という需要により、近年待ち行列網の研究がさかんになり、理論も大いに発展した。中でも Baake et al. [1], Kelly [9] 等の結果により、かなり広範な待ち行列網について、平衡状態分布を知る事ができるようになった。平衡状態分布は、任意の一時点における、待ち行列網が取る状態の確率分布であり、これから平均系内客数、各ノードの利用率、単位時間当りの平均退出数であるスループットなどが体系的に求まる。これはすべて、例えばシステム側にとって興味のある量であるが、別の立場、すなわち個々の客にとって興味のある特性量、例えば待ち時間や滞在時間のモーメントなどであるが、これらを評価することも必要であるが、平衡状態分布からは直接には結びつかない。待ち時間の分布などは、(任意時点ではなく)客の到着時点における状態分布、及びその特定の時間後の推移状態の分布に関連して求めるが、Little の公式のような他の理論を応用するかして求めることはならない。然しながら推移状態の分布の計算は困難な事が多く、Little の公式は滞在時間の期待値を求めるのみに有効であり、滞在時間、待ち時間の分布に関わる研究は少ない。ここでは、少々なりながらも、また決して網羅的でもないが、この方面の研究の紹介を行う。

2. 滞在時間分布について

ここでは待ち時間とは一つのノードでサービスを受けるとの待ち時間を意味し、ノード(またはネットワーク)に到着してからそのノード(ネットワーク)を退出する迄の時間を(系)滞在時間と呼ぶ。さて、滞在時間の分布を考えるとき、特定の客、例えばサービス操作が始まって最初に到着する客、二番目に到着する客、 n 番目の客等の滞在時間を問題にするのではなく、一般の客の滞在時間の性質として、 $n \rightarrow \infty$ としたときの極限分布を考察している。従って、 $-\infty$ 時に操作が始まって、時刻0では極限状態、もしくは平衡状態にあると仮定して解析を進めている事が多い。然し、この仮定の仕方に色々あり、これについて $M/M/1$ (到着率 λ , サービス率 μ , $\rho = \lambda/\mu < 1$) で考察してみる。仮定の仕方は時刻0の定め方であり、まず任意の時点と時刻0と定めれば、 $q(t)$ を時刻 t での列の長さとし、

$$(2.1) \quad P(q(0) = k) = P(q(t) = k) = (1-\rho)\rho^k \quad (\text{for any } t, k=0,1,2,\dots)$$

となる。つまり時刻0で平衡状態にある。また時刻0は任意に選んだ時点であるから、客がそこに丁度到着することではなく、ある経過後 $t_1 \geq 0$ に到着する。この客の待ち時間を W_1 とし、 $W_1 = 0$ となる確率を考える。もし $q(0) = 0$ ならば、必ず $W_1 = 0$ となり、また $q(0) \neq 0$ でも $(0, t_1)$ 間に $q(0)$ 人の客がすべてサービスされてしまうならば $W_1 = 0$ となるので、次が成立する。

$$(2.2) \quad P(W_1 = 0) > 1 - \rho$$

また、時刻0以後 n 番目に到着する客の待ち時間を W_n とすれば $P(W_n = 0)$ は

n による 2 値が異なる。(等しくなる保証はない)。しかし多くの待ち行列論の本には $P(W_n=0)=1-p$ ($n=0,1,2,\dots$) と書いてあり、(2.2) と一致しない。これは A :「任意の客の到着した時点をとし、その直前の列の長さ $q(0-)$ の分布が (2.1) の右辺である」と仮定した場合の事で、 t_n を n 番目の客の到着時刻とすれば ($t_1=0$)、このとき次が成立する。

$$(2.3) \quad P_A(q(t_n-0)=k) = (1-p)p^k \quad \text{for all } n$$

前記の $P(W_n=0)=1-p$ も $P_A(W_n=0)=1-p$ ($n=0,1,2,\dots$) と書いて正確になる。つまり P_A は A の条件付きのものと確率測度であり、 P_A のもとでは、すべての客が確率的に同じ行動をとり、 P のもとでは、どの時点をとってもシステムの確率分布は同一と云える。このことより、 P は連続時刻に関して定常、 P_A は到着時点列 $\{t_n\}$ に関して定常とも呼ばれる。 A と同様に D :「一人の客の退去時点をとし、 $q(0+)$ の分布が (2.1) の右辺である」という条件の下での確率測度 P_D も考えられる。 $d_1, d_2, d_3, \dots$ を退去時点列とすれば P_D のもとでは $d_1=0$ であり、 W_n を d_n に退去する客の待ち時とすれば

$$(2.4) \quad P_D(q(d_n+0)=k) = (1-p)p^k \quad \text{for all } n, \quad P_D(W'_0 \leq x) = P_D(W'_n \leq x) \quad \text{for all } n$$

等が成立する。また、 a_n に到着する客の滞在時間を S_n 、退去時刻を d'_n とすると $P_A(q(d'_n+0)) (= P_A(q(d_n+S_n+0)))$ はやはり n によらず、 $P_D(q(d_n))$ とは別の概念であり、 $P_A(q(d'_n))$ と $P_D(q(d_n))$ が等しいことは証明を要する。これに関しては次の事が一般に示されている。[8] 証明はエルゴード性を利用している。なお、確率変数 X と確率測度 P に対し $P(X)$ は P の下での X の分布を意味している。

$$(2.5) \quad P_A(q(d'_n)) = P_D(q(d_n)), \quad P_A(W_n) = P_D(W'_n) \quad \text{for all } n, n'$$

(2.5) は $M/M/1$ 以外のシステムについても成立する。客同士の違いが生ずる場合には $d'_0 \leq d'_1 \leq d'_2 \leq \dots$ となるとは限らない。

以上より、客に直接結ぶく量を計算をする時は P_A もしくは P_D で評価するのが適切であり、実際にもそうされている。 P, P_A, P_D の違いは図 2.1 のようにも示され、また次のような極限分布としても表わげられる。

$$(2.6) \quad P(q(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} P_r\{q(t)\}, \quad P_A(q(0-)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_r\{q(t_n-0)\}, \quad P_D(q(0+)) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_r\{q(d_n+0)\}$$

ここで $P_r\{\}$ は任意の初期条件で定義されるものとする。

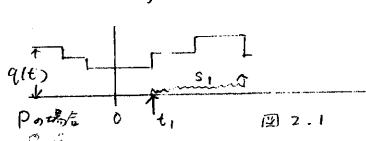
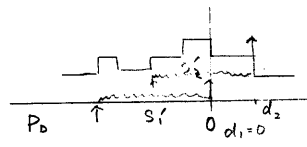
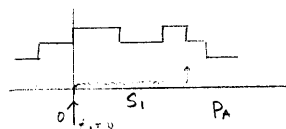


図 2.1



Jackson 型ネットワークについて、以上の事について結果を整理しておく。ノードは $1, 2, \dots, M$ であり、ノード i への到着時刻列、退去時点列をそれぞれ $\{t_{in}^i\}, \{d_{in}^i\}$ 、 C_{in}, C'_{in} を t_{in}, d_{in} を惹き起す客、 $S_i(C_{in})$ 等 (C_{in} のノード) での滞在時間等を表わすものとする。 $Q(t) = (q_1(t), q_2(t), \dots, q_M(t))$ を時刻 t における各列の長さを示すものとする。また簡便のため、 $t = t_{in}, d_{in}$ では $Q(t)$ は C_{in} は勘定しないものとする。こうすると「直前」「直後」の説明が省ける。 P は

時刻 t に関し定常, P_{Ai} , P_{Di} はそれぞれ $\{t_{im}\}$, $\{d_{im}\}$ に関し定常な測度とする。
 P_{ij} は routing 確率とする。まず開放系については次が成立する。

$$(2.7) \quad P(Q(0)) = P_{Ai}(Q(0)) = P_{Di}(Q(0)) = \prod_{i=1}^M f_i(q_i) \quad (Q = (q_1, q_2, \dots, q_M) \text{ の場合}),$$

系内数 N の閉鎖系については

$$(2.8) \quad P(Q(0)) = C_N \prod f_i(q_i), \quad P_{Ai}(Q(0)) = P_{Di}(Q(0)) = C_{N-1} \prod f_i(q_i) \quad (\sum q_i = N-1),$$

ここで $f_i(q_i)$ はノード i の種形式であり, C_N は N の場合の正規化定数である。

(2.7), (2.8) については [7], [10], [17] 等を参照。また (2.5) に相等する式として開放系, 閉鎖系いずれについても次が成立する。[8]

$$(2.9) \quad P_{Ai}(Q(t_{im} + S_i(C_{im}))) = P_{Di}(Q(d_{im})) \quad \text{for all } m, m'.$$

3. 期待値の計算

前節の後半に引き続き, Jackson 型について考察する。一つのノード i での平均列長 L_i と i への平均到着率 λ_i がわかれば, Little の公式により, i での滞在時間の期待値 λ_i が $\lambda_i = L_i / \lambda_i$ として求まる。この公式は応用範囲が広く, 例えば客にタイプがあり, タイプ毎の平均列長, 到着率がわかれば, そのタイプの客の平均滞在時間も求まり, またシステム全体に適用すれば, 系滞在時間の期待値, 一つのノードの待ち列の長さ(サービス中の客は含まず)に適用すれば待ち時間の期待値が求まる。なお L_i , λ_i は測度 P , S_i は P_{Ai} での期待値であり

$$E_P(q_i(t)) = \lambda_i E_{P_{Ai}}(S_i(C_{im})), \quad \lambda_i = E_P(N_i(0, 1)) = 1 / E_{P_{Ai}}(t_{im} - t_{im-1}),$$

のように表現される。ここで $N_i(0, 1)$ は単位時間 Δt 隔 $(0, 1)$ にノード i に到着する人数, E_P , $E_{P_{Ai}}$ はそれぞれ P , P_{Ai} に関する期待値を意味する。

次に, ノード i に到着した客の, その時点から系を退出する迄の残余滞在時間の期待値 R_i について考察する。定義により

$$R_i = E_{P_{Ai}}(S_i(C_{im}) + Z_i(C_{im})) = E_{P_{Ai}}(S_i(C_{im})) + E_{P_{Ai}}(Z_i(C_{im})).$$

ここで $Z_i(C_{im})$ は C_{im} のノード i と離れた後の滞在時間であるものとする。前項で述べた如く $\lambda_i = E_{P_{Ai}}(S_i(C_{im}))$ は Little の公式により求まり, (2.8), (2.9) より

$$\begin{aligned} E_{P_{Ai}}(Z_i(C_{im})) &= \sum P_{ij} E_{P_{Ai}}(S_j(C_{im}) + Z_j(C_{im})) \\ &= \sum P_{ij} E(S_j + Z_j | Q(0) = (q_1, q_2, \dots, q_M)) P_{Ai}(Q(t_{im} + S_i(C_{im})) = (q_1, q_2, \dots, q_M)) \\ &= \sum P_{ij} R_j \end{aligned}$$

となり, $R_1, R_2, \dots, R_M$ に関する連立一次方程式

$$R_i = \lambda_i + \sum P_{ij} R_j \quad (i=1, 2, \dots, M)$$

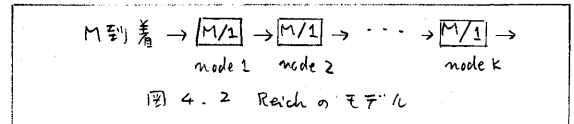
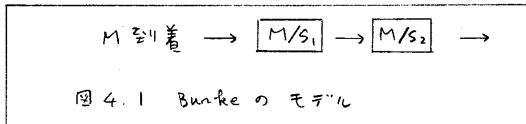
を得る。なお, これは BCMP モデルにも応用できる。

4. 滞在時間の独立性

Jackson型またはB.C.M.P型のモデル内の、ある性質を持ったパスを客が通過するとき、その客の各ノードでの滞在時間が互いに独立となることが知られている。これを簡単なモデルから順に追って説明する。

- Bunke [3] の結果 図4.1のモデルについて次が成立する。

$$(4.1) \quad P_{A_2}(S_1(C_m), S_2(C_m)) = P_{A_2}(S_1(C_m)) P_{A_2}(S_2(C_m))$$



(4.1) は ノード2に到着する時点列 (ノード1を退出する時点列と一致) に関して定常な測度の下では、すなわち、時刻0に1人の客がノード1からノード2に移り、その時点でのノード1, 2の列の長さが独立である ((2.7) の特別な場合) という条件の下では、その客のノード1, 2の滞在時間は独立であることと意味している。証明は P_{A_2} で $q_1(t_m)$ と $q_2(t_m)$ が独立であることと、 $S_2(C_m)$ は $q_2(t_m)$ 、 $S_1(C_m)$ は $q_1(t_m)$ にのみ依存していることから導かれる。この最終の事実 *Reversibility* から証明される。また (4.1) から (2.9) を利用し次が導かれる。[8] (4.1) と (4.2) の違いは図4.3でも示される。

$$(4.2) \quad P_{A_1}(S_1(C_m), S_2(C_m)) = P_{A_1}(S_1(C_m)) P_{A_1}(S_2(C_m))$$

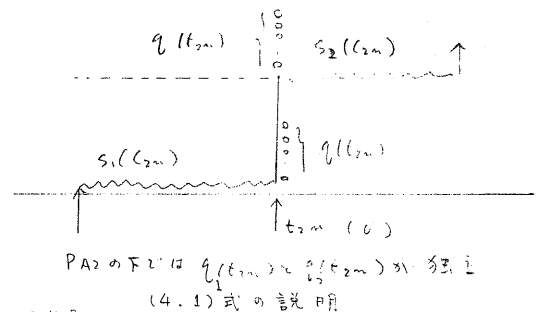
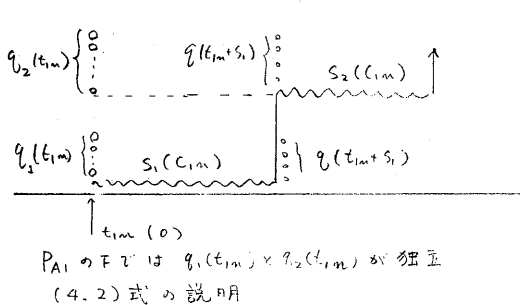


図4.3 (4.1) と (4.2) について

- Reich [13] の結果 図4.2のモデルについて次が成立する。

$$(4.3) \quad P_{A_2}(S_1(C_m), S_2(C_m), \dots, S_K(C_m)) = P_{A_2}(S_1(C_m)) \cdot P_{A_2}(S_2(C_m), \dots, S_K(C_m))$$

これも Bunke の結果と殆ど同じ方法で証明される。図4.1のモデルでは成立しない性質として、 $S_3(C_m), \dots, S_K(C_m)$ は $q_1(t_m)$ と独立であることを用いている。もし node 2 が複数窓口ならば、追いつきが生ずることもあるので、 $q_1(t_m) \times S_3(C_m)$ 等とは独立にはならない。(4.3) から (2.9) を用いるか、次に述べる Lemoine の結果から (4.4) が得られる。

$$(4.4) \quad P_{A_1}(S_1(C_m), S_2(C_m), \dots, S_K(C_m)) = \prod_{i=1}^K P_{A_1}(S_i(C_m))$$

• Lemoine [11] の方法 $M/M/1$ で P_A のもとで S_1 が与えられたとき、 S_1 の間隔に退去する客の流れは到着と同じポアソン流になることを導いている。すなわち Bayes の定理を用いて次式を導き、

$$P_A(N(0, y] = k \mid S_1 = 0) = e^{-\lambda y} (\lambda y)^k / k! \quad (k = 0, 1, 2, \dots, y \leq \infty)$$

Remy の定理 (任意の y について $P(N(0, y] = k) = e^{-\lambda y} (\lambda y)^k / k!$ ならば $N(0, t]$ はポアソン過程である) を引用して証明している。これにより (4.4) の他に $M/1$ なるノードが tree 状に連結している場合の独立性を導いた。

• Moving bottleneck さて、Jackson 型、B.C.M.P 型で、 $M/1$ (FIFO) 型のノードのみを移動するバスで、追いつ越しが生じないならば、そこでの滞在時間が独立になるという研究が知られている。(Melamed [12], Walrand and Varaiya [17])
追いつ越しが生じないシステムとしては直列型システムもそうであるが、もう少し複雑でもよい。この条件を数式で示するのは複雑になるが Melamed [12] は moving bottleneck という言葉を使って説明している。すなわち、注目している客 C が moving bottleneck ならば、 C の各ノードでの滞在時間は互いに独立となるのであるが、図 4.4 でノード 1, 3 (どの node も $M/1$ FIFO 型) と進むとき、破線のバス 1, 2, 3 と進む客もいるが、 C がノード 1 から 3 に移ったとき、ノード 1 に C より後に到着した客は 1, 2, 3 と進んでも追いつくことはない。 C は moving bottleneck であり、従って C の 1, 3 での滞在時間は独立となる。同様に図 4.5 についてもノード 1, 2, 3, 4, 6 と進む客は moving bottleneck であり、各ノードでの滞在時間は独立となる。なお他には 1, 2, 3, 3, 4, 2, 5 と進むバスしかないものとしている。

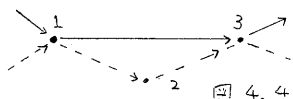


図 4.4

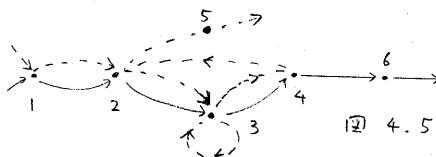


図 4.5

• Exit and ノードの集合 V があり、そのノードから他のノードに移動する客は決して V のどのノードにも戻らないような構造になっているとき、 V から他のノードに行くアークを Exit arc と呼び、Jackson 型、B.C.M.P 型では、exit arc での客の流れはポアソンになっている。([3] [10] など) Tandem では従って、どのノードでもポアソン到着になっている。

5. 閉鎖系について、random walk の応用

閉鎖系については、滞在時間の分布について知られていることはもっと少ない。次の random walk の理論を利用した Chow [4], [5] の方法を紹介する。5.1 図のようなサイクリック系を考察する。この系では系滞在時間をサイクルタイムと呼び、ノード 1 とノード 2 の滞在時間の和である。ノード 1 に到着した時、 $q_1 = j$, $q_2 = i$ ならば、 S_1 は j 個の指数分布の和として表わされるが、 S_2 については、 S_1 後に i から推移した列の長さに依り、この推移確率を計算しなければならない。
 $M/M/1$ の記述 $A(t)$, $D(t)$ をそれぞれパラメータ λ , μ の互いに独立なポ

アソシエーション過程とする。 $X(t) = A(t) - D(t)$, $Y(t) = \inf_{0 \leq u \leq t} X(u)$ とすると、 $M/M/1$ の $q(t)$ は $X(t) + \max\{q(0), -Y(t)\}$ と記述できる。 $q(t) = 0$ の状態では、仮のサービスが行なわれるとみなしても、指数分布の性質から矛盾が生じないからである。 t を固定して、 $A(t) = m$, $D(t) = n$ の条件の下では $m+n$ 個の点は $(0, t)$ に一様に分布しているから $X(t) = m-n$ になる (± 1 だけの) 変化の仕方は $m+n C m$ だけあり、それらの一つが等確率で起る。(図 5.2) またこのパスの中で、 $Y(t) \leq -k$

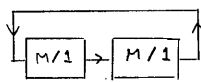


図 5.1 系内数は N



図 5.2

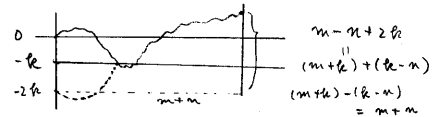


図 5.3

となるものの数は鏡像の原理(図 5.3)により $m+n C m+k$ である。従って $X(t) = m-n$ のもとでは $P\{Y(t) > -k\} = 1 - m+n C m+k / m+n C m$ で表わせる。また (2.8) より $P_{A_1}(q(0) = N-i-1, q_2(0) = i) = (1-p)/(1-p^N) \cdot p^i$ ($p = \mu_1/\mu_2$) であるから、

$$P_{ij}(t) = \sum_m P_{A_1}(q_2(t) = j | N_2(t) = N-i-1, q_2(0) = i, D_2(t) = m) = \sum_i \left\{ 1 - \frac{N! m!}{(m+j+1)! (n-j-1)!} \right\},$$

$$P_{A_1}(S_1 + S_2 \leq t) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_0^t \sum_{j=0}^{N-1} P(S_2 \leq t-x | q_2(0) = i, S_1 = x, q_2(t) = j) P_{ij}(t) dP(S_1 \leq x) g_i$$

となり、整理すると $S_1 + S_2$ の密度関数は次のようになる。

$$\frac{\mu_2^N}{\mu_2^N - \mu_1^N} \mu_1 e^{-\mu_1 t} \frac{(\mu_1 t)^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{\mu_1^N}{\mu_1^N - \mu_2^N} \mu_2 e^{-\mu_2 t} \frac{(\mu_2 t)^{N-1}}{(N-1)!}$$

簡単な $N=2$ の場合には、1, 2 ノードのサービスは必ず同時に始まるから、直接に、サイクルタイムは $W_1 + \max(X_1, Y_1) + Y_2$ と表わせる。ここで、 X_1, Y_1 はパラメータ μ_1, μ_2 の独立な指数分布に従う確率変数であり、 W_1 は確率 $\mu_2^2/(\mu_1 + \mu_2)$ で 0, $\mu_1/(\mu_1 + \mu_2)$, X_2 となる確率変数である。

右図のような Central processor Model に対しても、上記の理論は適用できる。ノードから来た宛先ノード ($i \neq 2$) に他へは独立に P_{ik} で移動するから、 (t, S_1) 間の到着はポアソンになるからである。然し表式は $\mu_2 = \dots = \mu_k$, $P_{11} = \dots = P_{1k}$ の場合でも簡単にならず、小さな N, K について数値計算できる程度である。[4]

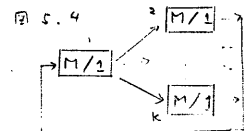


図 5.4

なお、図 5.1 で検討した循環系について、サイクルタイムのラプラス変換が Schassberger, Dudum [15] にあると Reiser [16] に紹介してあるが、このような理論が使われたのか入手できないので不明である。

6. その他の系について

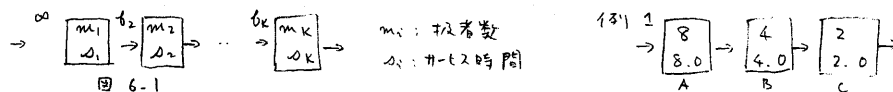
滞在時間の分布について、以上で扱ったケースは、積和式が成立し、Bunde の結果以外では、すべて $M/M/1$, FIFO 型のノードに関連したもののばかりであった。仮者が 1, 規律が FIFO であるノードでは、客同士の追い越しが生じない。このことが、待ち時間、滞在時間の解析を容易にする一つの理由になっている。また追い越しが生ずる場合とは (ネットワークではなく) 一つだけの窓口の滞在時間についてもあまり解析は行なわれていない。ネットワークについてはなおさざである。しかし、追い越しが生じないネットワークの一つに、図 6.1 のような定数サービスの直列型待ち行列についてはある程度の解析法 [16] が知られている。

これを以下簡単に紹介する。

図 6.1 で b_i は中間スペースの大きさであり、 $0 \leq b_i \leq \infty$ 。ロード 1 の前には待つスペースが無限にあるものとする。 $b_i = \infty$ ならばブロッキングは生じないことになる。さて、時刻 0 では系内は空であり、客の到着時刻を $t_1, t_2, \dots$ とすると、各客の退出時刻 $d_1, d_2, \dots$ は次のように決定される。

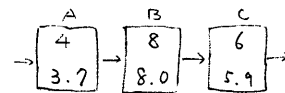
$$(6.1) \quad d_k = \max \left\{ d_{k-1} - m_i + \Delta_i \quad (i=1, 2, \dots, K), t_k + \sum_{i=1}^K a_i \right\} \quad (k=1, 2, 3, \dots, d_k=0 \text{ for } k \leq 0)$$

これは、客の番号とロードの数の二重の帰納法により示される。(6.1) から、退出時点列は各客の大きさ、ロードの並ぶるに依存しないことがわかる。従って各客の系滞在時間 $d_k - t_k$ 、及び $k \rightarrow \infty$ の極限分布が存在すれば、これも b_i やロードの順序によらない。すなわち図 6.1 のモデルに対しては、適当な順序の変更をし、 $b_i = \infty \quad (i=1, 2, \dots, K)$ として解析できる。以下例で説明する。



例 1 このモデルについては $C \rightarrow B \rightarrow A$ と並べかえると、B, A ではどんな到着の仕るに対しても待ちが生じない。従って、到着がポアソンならば、例 1 の滞在時間は $M/D/2$ の滞在時間 + $8.0 + 4.0$ と同じになる。

例 2 右図の場合には A B C とどう並べかえても ∞ まで待ちが生じ得る。然し、B, C の扱者数を ∞ とすれば B, C では待ちが生じない。こうすれば滞在時間は短くなるので、組合せを変えてみる。により、次の下限を得る。



例 2

$$\max \{ M/D/4 + 8.5 + 5.9, M/D/8 + 3.7 + 5.9, M/D/6 + 3.7 + 8.0 \} \leq \text{系滞在時間}$$

また、A の前に仮のロード 扱者数、サービス時間がそれぞれ 1, 1.0 か 2, 2.0 であるものを置くと A, B, C の前には待ちが生じない。余計なものをつけば滞在時間は長くなるので、次の上限を得る。

$$\text{系滞在時間} \leq \min \{ M/D/1 + 3.7 + 8.0 + 5.9 - 1.0, M/D/2 + 3.7 + 8.0 + 5.9 - 2.0 \}$$

以上の理論は、一定サービスという条件のため、あまり有用ではないかも知れないが、計算機網において、ジョブをジョブのままではなく、マイクロプロセッサのサイクルタイムに比較し得るぐらいの単位に分割して考察できるように解析があれば 応用できるのではないかとと思われる。

References

- [1] Baskett, F., K.M.Chandy, R.R.Muntz and F.Palacios, "Open, Closed and Mixed Network of Queues with Different Classes of Customers," JACM, Vol.22, 1975, pp.248-260
- [2] Beutler, F.J., B.Melamed, "Decomposition and Customer Streams of Feedback Networks of Queues in Equilibrium," Opn.Res. Vol.26, 1978, pp.1059-1072
- [3] Burke, P., J., "The Output Process of a Stationary M/M/S Queueing System,"

- A.M.S. Vol.39,1968,pp.1144-1152
- [4] Chow, We-Min, "The cycle time of a class of closed queueing network models," AFIPS Proc., 1978 Vol.47, pp.489-494
 - [5] Chow, We-Min, "The Cycle Time Distribution of Exponential Cyclic Queues," ACM, Vol.27, 1980, pp.281-286
 - [6] Jackson, J.R., "Jobshop-Like Queueing Systems," Manag.Sci., Vol.10, 1963, pp.131-142
 - [7] Kawashima, T., "Turnaround Time Equations in Queueing Networks," J.Opn.Res.J., Vol.21, 1978, pp.131-142
 - [8] Kawashima, T., "A Property of Two Palm Measures in Queueing Networks and its Applications," J.Opn.Res.J., Vol.21, 1978, pp.477-485
 - [9] Kelly, F.P., "Networks of Queues," Adv.Appl.Prob., Vol.8, 1978, pp.416-432
 - [10] Lavenberg, S.S., M. Reiser, "Stationary State Probabilities at Arrival Instants for Closed Queueing Networks with Multiple Type Customers," J.Appl.Prob., Vol.17, 1980, pp.1048-1061
 - [11] Lemoine, A.J., "Total Sojourn Time in Networks of Queues," Tech.Rep.No.79-020 -1, 1979, Systems Control, Inc., Palo Alto, Calif.
 - [12] Melamed, B., "Sojourn Times in Queueing Networks," Math.O.R. Vol.7, 1982 pp.223-244.
 - [13] Reich, E., "Note on Queues in Tandem," A.M.S., Vol.34, 1963, pp.338-341
 - [14] Reiser, M., "Calculation of Response-Time Distributions in Cyclic Exponential Queues," Perf.Eval. Vol.1, 1981, pp.331-333
 - [15] Schassberger, R., H.Daduna, "The time for a round trip in a cycle of exponential Queues," Proc. ORSA-TIMS Conf. FL, 1981
 - [16] Suzuki, T., T.Kawashima, "Reduction Methods for Tandem Queueing Systems," J.Opn.Res.J., Vol.17, 1974, pp.133-144
 - [17] Walrand, J., R.Varaiya, "Sojourn Times and the Overtaking Condition in Jacksonian Networks," Adv.Appl. Prob. Vol.12, 1980, pp.1000-1018
 - [18] Walrand, J., R.Varaiya, "Flows in Queueing Networks: A Martingale Approach," Math.O.R., Vol.6, 1981, pp.387-404