タイム・シェア処理における多重度の効果

山崎源治（工学院大），逆瀬川浩孝（筑波大）

1. はじめに

待ち行列ネットワークを用いた計算機の性能評価などでは，各ノードでよくProcessor Sharing（PS）規律が仮定されてきている。この規律は，解析の簡単化のため，通常のタイムシェア処理方式の1つの理想化されたものとなっている。すなわち，現実のタイムシェア処理では，システムの処理能力は一定のもとで，その能力を各ジョブにシェアする際，同時に処理することができるジョブ数（多重度）には制限があるが，上述のPS規律ではその制限はない。そして，この多重度に制限のあるタイム・シェア処理方式で，多重度の増加がシステム効率にどのような影響を与えるか，についての定性的・定量的研究はほとんどないように思われる。これは，多重度の効果について定量的に評価するためには，結局複数サーバの待ち行列システムの解析が必要となることに起因していると考えられる。通常の待ち行列システムでは，多重度はサーバ数とほぼ対応している。この場合，同じ利用率のもとで，単一サーバシステムが有効か，複数サーバシステムが有効か，という問題は従来幾つか議論されてきている（その詳細については[2]，[3]）。

我々は，上述の多重度に制限のあるタイム・シェア処理方式を，LiPS（Limited Processor Sharing）規律として定式化し，多重度がシステム効率に及ぼす影響について，若干の定性的・定量的評価を[2]，[3]で与えてきた。特に[3]では，理論的，数値的結果から次の「予想」を与えている。

予想： ジョブのサービス要求量の変動係数をC_sとする。このとき，$C_s<1$なら，多重度が増加するにつれシステム効率は減少し，$C_s>1$のときはその逆となる。

[3]では，ジョブのシステムへの到着過程が任意のもとで，ジョブのサービス要求量の分布が，NWUかErlangの場合上の予想が成立することを示した。本稿ではジョブのシステムへの到着過程がPoissonの場合に的を絞り，サービス要求量の分布がより広いクラス（すなわち，NWUE，NBUE）でも上の予想が成立することを証明する。さらに，任意の多重度・ジョブの要求量分布での平均系内ジョブ数（等価的に，平均系内滞留時間）の近似式を与える。これらはすべて，点過程での保存則から得られる‘平衡式’から導かれる。さらに，ここで得られた近似式の精度がきわめてよいことを，幾つかの数値例で明らかにする。

2. モデル・記号

本稿では，次の待ち行列システムを扱う。システム内のスペースを適当に分割して，前から順にpositions 1, 2, 3, … と番号をつける。各positionには1度に1ジョブのみ入ることができる。システム内にnジョブが存在するとき，(a) 到着したジョブはposition $n+1$へ入る，(b) position j ($j=1,2,\cdots,n$)のジョブのサービスが完了したなら，positions $j+1, j+2, \cdots, n$のジョブは順にpositions $j, j+1, \cdots, n-1$へ移る。mをある自然数とし，このmに対して$\{r_j(n;m),\ j=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots\}$を次のように

定義する。

(i) $0 \leq r_j(n;m)$ $(\forall j, n)$, (ii) $\sum_j r_j(n;m)=1$ $(\forall n)$,

(iii) $r_j(n;m)=0$ $(n>m)$.

このとき，次のサービス規律を設定し，この規律を以下で m-LiPS 規律と呼び，この規律を持つ待ち行列システムを m-LiPS システムと呼ぶ。

(1) システムにはサーバが1人いてその能力はレート1； (2) システムに n ジョブいるとき，そのサーバは position j にその能力を $r_j(n;m)$ ふり向ける。

m-LiPSシステムで，ジョブの到着過程，サービス要求量 の分布を明示したいときは通常の記号を用いて $A/B/1$ (m-LiPS) で表わす。そこで'G'を用いて一般分布を表すことにするが，その際，例えば到着過程に用いたとき，到着間隔の独立性などは仮定しない。もし，ジョブのサービス要求量が i.i.d. r.v.'s で，その共通分布がGのときは'GI'を用いる。

従来，よく取扱われている待ち行列システムの幾つかは，この m-LiPSシステムの特別な場合とみなすことができる。例えば 1-LiPSシステムは通常の単一サーバシステムとなり，∞-LiPS システムで $r_j(n;\infty)=1/n$ $(j=1,2,\cdots,n;\forall n)$ とすると積形式解を持つ待ち行列ネットワークでよく用いられているPS規律となる(上の定義では m を自然数としていたが便宜上 $m=\infty$ も用いることにする)。多重度 m の実際の計算機システムでの処理方式は，$r_j(n;m)=1/n$ $(j=1,2,\cdots,n;\ n=1,2,\cdots,m)$, $r_j(n;m)=1/m$ $(n>m)$ の m-LiPS システムとなる。また，通常の m-サーバシステムで，'ジョブがシステム内に1つでも存在するときは，手空きのサーバを許さない'という場合も，$r_j(n;m)$ を適当に設定することにより m-LiPSシステムとみなすことができる。

以下では次の記号を用いる。

$L(t;m)$: m-LiPS システムでの時刻 t でのシステム内ジョブ数，

$L(m)$: 〃 定常状態 〃，

$U(t;m)$: 〃 残り仕事量の総和，

X, Y を確率変数としたとき，

$X \overset{st}{=} Y$: XとYは確率的に等しい，$X \overset{st}{\leq} Y$: XはYより確率的に小さい，すなわち，$Pr(X>x) \leq Pr(Y>x)$.

$F(x)$ を確率分布関数としたとき(ただし $F(0-)=0$)，次の分布関数のクラスを導入する。

NBU (New Better than Used): すべての $x, y (>0)$ に対して

$$\bar{F}(x)\bar{F}(y) \geq \bar{F}(x+y), \quad \bar{F}=1-F.$$

NBUでの不等号が逆になったとき，FはNWU (New Worse than Used) であるという。

NBUE (New Better than Used in Expectation): すべての x に対して，

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)\,dt \leq \bar{F}(x) \cdot \int_0^\infty \bar{F}(t)\,dt.$$

NBUEでの不等号が逆になったとき，FはNWUE (New Worse than Used in Expectation) であるという。

NBUとNBUEの間には，$NBU \subset NBUE$ の関係があり，また $NWU \subset NWUE$ となる。もし，FがNBUE (NWUE) なら，その変動係数は1より小さい(大きい)。

3. 基礎的結果

本節では，[2]，[3] で得られたm-LiPSシステムについての結果のみ示す。以下では，$L(0-;m)=0$ とする。

定理1： G/G/1 (m-LiPS) で，任意の t，mに対して
(1) $U(t;m) \overset{st}{\leq} U(t;1)$.

この定理から直ちに次の2つの系を得ることができる.

系1： m-LiPSシステムでの平衡条件は1-LiPSシステム（単一サーバシステム）のそれと同じである.

系2： m-LiPSシステムでの稼動期間及びアイドル期間の分布は1-LiPSシステムのそれらと一致する.

上の結果は直接§1での予想に関連したものではない。次の2つの結果はその予想を支持するものである.

定理2： G/GI/1 (m-LiPS) で，サービス要求量の分布がNWUなら，
(2) $L(t;1) \overset{st}{\leq} L(t;m)$.

サービス要求量の分布がNBUのとき，定理2と対をなす結果は残念ながら得ることができなかったが，NBUのサブクラスであるErlang分布について次の結果が成立する。

定理3： G/E_k/1 (m-LiPS) で，任意のkに対して
(3) $L(t;1) \overset{st}{\geq} L(t;m)$，　等号は$k=1$で成立.

4. M/GI/1 (m-LiPS)

本節では，ジョブのシステムへの到着間隔がi.i.d. r.v.'sで，その分布が指数分布（到着率λ）の場合を考える。そして，$E(L(m))$ と$E(L(1))$の関係，及び$E(L(m))$の近似式を与える。すなわち定常状態のシステムのみを扱う。この条件は，ジョブの要求量の期待値を$E(S)$としたとき，上の系1から $\rho \triangleq \lambda E(S) < 1$ であり，本節ではこの場合のみを扱う。通常のM/GI/mの平均系内ジョブ数に関する近似式は，多くの研究者により提案されているが，それらの大部分は，経験，直感により，未知パラメータを含む形を想定し，数値実験によりそれらのパラメータを決定，という手順で得られている。しかし，本節では，M/GI/1 (m-LiPS) に対して点過程の保存則からシステム内ジョブ数に関する一種の'平衡式'をたて，ジョブ数分布に関する厳密解を未知量を含んだ形で解き，その後ある種の条件を設けて$E(L(m))$の近似式を得る。また，$E(L(m))$と$E(L(1))$の順序関係も，その厳密解から直接導かれる。

4.1 基礎式の誘導

ここでは，M/GI/1 (m-LiPS) の $L(m)$ に関する'平衡式'をたて，その厳密解を導く．そのために次の記号を必要とする．

P：任意時点での確率（E(・) その期待値），　P_0：時刻 0 にジョブの到着があったという条件のもとでの期待値（E_0(・) その期待値），　P_1：時刻 0 にジョブの退去があったという条件のもとでの確率（E_1(・) その期待値），S：ジョブのサービス要求量，

$$p_n = P(L(0;m)=n),\quad p_n^0 = P_0(L(0-;m)=n),\quad p_n^* = P_1(L(0+);m),$$

$$\tilde{G}(\theta) = E(e^{-\theta S}),\quad \Phi_n(\theta) = E(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0;m)=n),$$

$$\Phi_n^0(\theta) = E_0(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0-;m)=n),\quad \Phi_n^*(\theta) = E_1(e^{-\theta U(0;m)} \mid L(0+;m)=n).$$

以上の準備のもとで平衡式をたてるが，その出発点は Miyazawa [1] による次の結果である．

補助定理1：$\{X(t)\}_{t=-\infty}^{+\infty}$ を任意時点で右微分可能でその不連続点が有限区間で有限個であるような標本関数をもつ定常過程とする。このとき $\{X(t)\}$ の不連続点からなる定常過程を V，その Palm 分布を P_V とし，P_V に関する $X(0-)$ の期待値 $E_V\{X(0-)\}$ が有限ならば，

$$E\{X'(0)\} = \nu[E_V\{X(0-)\} - E_V\{X(0+)\}], \tag{4}$$

が成立する。ここで，$\nu = E\{V(0,1]\}$，$X'(0) = \frac{d^+}{dt}X(t)\big|_{t=0}$.

我々が考えている M/GI/1 (m-LiPS) に関して $X_n(t)$ を次のように定義する。

$$X_n(t) \triangleq I_{\{L(t;m)=n\}} \exp\{-\theta U(t;m)\},$$

ここで I_A：集合Aの指示関数.

このとき，$X_n(t)$ は補助定理1の条件をみたす．さらに，V を到着と退去の2種類に分けると，$\nu = 2\lambda$ となる。詳細は省略するが，m-LiPS では $\sum_j \gamma_j(n;m)=1$ であることから，$U(t;m)$ はシステム内にジョブが存在すれば常にレート1で減ること，M 到着のため $p_n = p_n^0 = p_n^*$，$\Phi_n(\theta) = \Phi_n^0(\theta)$ であることを用いると，上の補助定理から直ちに次の結果を得ることができる。

定理4：M/GI/1 (m-LiPS) では，

$$\left\{\begin{array}{l} \theta\Phi_1(\theta)p_1 = \lambda(1-\tilde{G}(\theta))p_0 + \lambda(\Phi_1(\theta) - \Phi_1^*(\theta))p_1, \\ \theta\Phi_n(\theta)p_n = \lambda[\Phi_{n-1}^*(\theta) - \tilde{G}(\theta)\Phi_{n-1}(\theta)]p_{n-1} + \lambda[\Phi_n(\theta) - \Phi_n^*(\theta)]p_n \\ \qquad n=2,3,\cdots. \end{array}\right. \tag{5}$$

$\Psi(\theta,x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n(\theta)p_n x^j$，$\Psi^*(\theta,x) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n^*(\theta)p_j x^j$　$(|x|<1)$，とすると，(5)式から通常の母関数を導く方法により次の結果を得る。

系3：M/GI/1 (m-LiPS) では，

(6) $$\Psi(\theta_1,x)=\frac{-\theta_1\Psi^*(\theta_1,x)+\lambda x[1-\tilde{G}(\theta_1)]p_0}{\theta_1+\lambda x\tilde{G}(\theta_1)-\lambda},$$

ここで, $\theta_1 \triangleq \lambda(1-x)$.

(6)式の両辺をxで微分し$x\to1$（すなわち, $\theta_1\to0$）とすることにより, $L(m)$を得ることができる。例えば,

$$\frac{d}{dx}\Psi(\theta_1,x)=-\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n'(\theta_1)p_n x^n+\sum_{n=1}^{\infty}n\phi_n(\theta_1)p_n x^{n-1}$$

より,

(7) $$\lim_{x\to1}\frac{d}{dx}\Psi(\theta_1,x)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}E\{U(0;m)\,|\,L(0;m)=n\}p_n+L(m)$$

を得ることができる。(7)式の右辺の第一項は, 定理1から次のようになる。

$$\sum_{n=1}^{\infty}E\{U(0;m)\,|\,L(0;m)\}p_n=E[\text{残り仕事量}]=E[M/GI/1\text{での仮待ち時間}]$$
$$=E[M/GI/1\text{での待ち時間}(\triangleq W_q(1))].$$

この事実と, 系2よりM/GI/1(m-LiPS)では $p_0=1-\rho$ となることを用いると直ちに次の結果を得る。

<u>系4:</u> M/GI/1(m-LiPS)では,

(8) $$L(m)=\frac{\rho\{2+\rho(1+C_s^2)\}}{2(1-\rho)}+\frac{\rho L_q(1)-L_q^*(m)}{1-\rho},$$

ここで, $L_q(1)=\lambda W_q(1)$, $L_q^*(m)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}E_1\{U(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\}p_n$.

<u>4.2 L(1)とL(m)の比較</u>

(8)式の右辺の未知量は, サービス要求量の分布（B(·)で表わす）が与えられたとき, $L_q^*(m)$ のみである。あるジョブの退去直後のposition j のジョブの残りサービス要求量を（退去直後のジョブ数をnとして）u_jで表わし, そのなかで以前より何んらかのサービスを受けていたジョブのサービスを受けた量をx_jとし, $\bar{x}_n=(x_1,x_2,\cdots,x_{n\wedge(m-1)})$, その同時分布を$G_n(\bar{x}_n)$とする。ここで, $a\wedge b=\min(a,b)$.。このとき, B∈NBUEとすると, E_1の定義から次の不等式を得る。

(9) $$E_1\{U(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\}=\sum_{j=1}^{n}E(u_j)=\int\sum_{j=1}^{n\wedge(m-1)}\frac{\int_0^\infty\bar{B}(t+x_j)dt}{\bar{B}(x_j)}dG_n(\bar{x}_n)$$
$$+\{n-n\wedge(m-1)\}E(S)\le nE(S)\qquad(\because B\in NBUE).$$

B∈NWUEのときは(9)の不等号が逆になる。これと(8)から直ちに次の結果を得る。

<u>定理5:</u> M/GI/1(m-LiPS)で, サービス要求量の分布がNBUE(NWUE)なら,

(10) $$L(1)\underset{(\ge)}{\le}L(m).$$

(10)は, §1での予想が, 到着がMのときに限られてはいるが, [2], [3]で証明された場合よりもより広いクラスのサービス要求量分布に関して成立することを示

している。

Table, $L(m)/L(1)$ for $M/E_k/1$(m-LiPS) and $M/H_2/1$(m-LiPS) ($\rho = 0.9$)

m	c_s^2	$M/E_k/1$(m-LiPS) 1/6	1/4	1/2	$M/H_2/1$(m-LiPS) 3	5	7
2	Exact	1.060	1.051	1.029	0.951	0.933	0.924
	Approx.	1.060	1.051	1.029	0.953	0.936	0.927
4	Exact		1.137	1.079	0.868	0.820	0.794
	Approx.		1.138	1.079	0.872	0.826	0.802
6	Exact		1.208	1.119	0.801	0.729	0.691
	Approx.		1.209	1.119	0.806	0.737	0.701
8	Exact			1.151	0.748	0.656	0.608
	Approx.			1.152	0.753	0.665	0.619
∞	Exact	1.600	1.509	1.290	0.526	0.357	0.270

4.3 L(m)の近似式

前節までの議論で注意しなければならないことは，$r_j(n;m)$について何んの指定もせず，§2での条件(i)～(iii)を満たせば十分ということである。それ故，L(m)に関して得られる結論は，主に定性的性質に限られることになる。L(m)の定性的性質と並行して，L(m)の定量的評価，すなわちそれがmによりどの程度変わるか，という情報を得ることは大きなメリットを持つ。これは，例えば通常の計算機システムの評価で，タイム・シェア処理のモデル化で仮定されるPS規律(m=∞の場合，引をみよ)が，実際の待ちをどの程度過小(過大)評価をしているかの目安となる。それ故，本節では，(8)式を基にしてL(m)の1つの近似式を求めてみる。L(m)は，$r_j(n;m)$の設定によりかなり異なると思われる。例えば，$r_j(n;m) > r_{j+1}(n;m)$(これは古いジョブにより能力をふり向ける規律)と$r_j(n;m) < r_{j+1}(n;m)$ではかなりL(m)は差があるように思われる。本節では，タイムシェア処理で最もよく見受られる場合，すなわち，$r_j(n;m)=1/n$ ($j=1,2,\cdots,n$, $n=1,2,\cdots,m$)，$r_j(n;m)=1/m$ ($n>m$)のM/GI/1(m-LiPS)のL(m)の近似式を次の仮定から導く。［仮定1］：$E(u_j) = E_1(u_j)$ for $1 \le j \le m-1$, $n \le m-1$，［仮定2］：$E\{U(0;m)\,|\,L(0-;m)=n\} - E_1\{U(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\} = E(S^2)/2E(S) - E(S)$ for $n \ge m$. ［仮定1］は多少便宜的のような気がするが，［仮定2］は次のように解釈できる。あるジョブの退去直後にn ($\ge m$)ジョブ残っているとき，position mのジョブは初めてそのサービスに入り(その期待値がE(S))，以前からサービスを受けているジョブは，positions $1,2,\cdots,m-1$に移る。一方，任意時点では$n \ge m$のとき，positions $1,2,\cdots,m$のジョブが以前よりサービスを受けている。それ故，［仮定2］の$E(\cdot) - E_1(\cdot)$の差は，残りサービス要求量の平均(positionに関する，上述のr_jの設定はある意味で各postionに公平さを持たせる規律であることから，それを'residualサービス要求量'の平均$E(S^2)/2E(S)$としている)と新しいサービス要求量の平均の差である。［仮定2］から直ちに次式を得る。

$$L_q(1) - L_q^*(m) = \frac{\rho(C_s^2-1)}{2}\sum_{n=m}^{\infty} p_n. \tag{11}$$

(5)式で$n=1,2,\cdots,m-1$の場合について両辺をθで割り，$\theta \to 0$とし［仮定1］を適用することにより$p_n = \rho p_{n-1}$ ($n=1,2,\cdots,m-1$)が得られ，従って$\sum_{n=m}^{\infty} p_n = \rho^m$となる。これと，(11)を(8)へ代入することにより，次のL(m)の近似式$L_{app.}(m)$が得られる。

$$L_{app.}(m) = \frac{\rho}{2(1-\rho)}\{2+\rho^m(C_s^2-1)\}. \tag{12}$$

$m=\infty$のときは，［仮定1］は常に成立することから，(12)はexactとなり，紙面の都合で省略するが$M/E_2/1$(2-LiPS)でも(12)はexactとなる。(12)の精度をTableに示すが，$C_s^2 \le 1$のときは非常によい結果を与える。［文献］

[1] Miyazawa (1983). Adv. Appl. Prob. 15.
[2] 山崎，逆瀬川 (1983). 当研究会資料 No.20. [3] Yamazaki, Sakasegawa (1984). Discussion Paper Series. No.(246), University of Tsukuba.