

カタストロフィー理論による ネットワークシステムの性能評価

小野里 好邦、片山 研 野口 正一

電気通信大学 東北大学電気通信研究所

あらまし ネットワークシステムの性能評価において、ダイナミカル・システムの手法とカタストロフィー理論を用いることにより、システムの定常的な振舞いを容易に見通すことができる。本論文では、Slotted アロハシステムを具体的な考察の対象として、その性能評価のためのツールを作成した。システムの平衡状態は、三次元空間上に表示され、応用性が高い。システム設計問題の一つである、コントロールパラメータの設定について検討する。

1 はじめに

計算機技術及び通信技術の進展により、ネットワークシステムは大規模かつ複雑になり、システム全体の動作を正確に把握するのが困難になってきている。情報処理システムをそのまま数理的モデル化したのでは、解析は、不可能に近い。また、計算機シミュレーション等による実験では、現実により近いモデルについて考えることが出来るが、対象とするシステムが複雑でシステムの状態を記述するパラメータが多いため、各パラメータのシステム全体に及ぼす影響は、不明確である。そこで全く新しい視野にたった巨大システムの設計理論やシステム性能評価、及び制御の理論等を開発する事が急務になってきている。

従来、ネットワークシステムの性能評価に関しては、待ち行列理論や確率過程論を用いて研究されてきた。それらの手法だけでは、ネットワークシステムが複雑化し大規模になったとき対処できない。つまり、システムで起きている急激な変化や質的な変化は解釈できない。

例えば、システムの処理量を増加させるとシステムの性能に急激な変化を生じる非線形現象(いわゆるスラッシング現象)は説明できない。

そこで、本論文では、ダイナミカル・システム [1] の手法を導入する。ここで、ダイナミカル・システムは、ネットワークシステムの状態と各状態に対応するパケット(情報の処理単位)のフローにより構成される。ネットワークシステムを一つのダイナミカル・システムとして大局的にとらえ、負荷の変動あるいはシステムの制御を変えることによるネットワークシステムの変化をダイナミカル・システムの変化として記述し、カタストロフィー理論 [2] [3] の成果を援用して情報処理システムの定常的な振舞いを明確にする。

本手法は、システム解析の見通しがたてやすく、簡単でしかも種々の情報処理システムを統一的に扱える解析手法である。そして、本手法を用いれば情報処理で起こっている急激な変化や質的な変化は、ダイナミカル・システムの構造が変化することで生じると考えられる。これらの変化の途中

で現れる構造不安定なダイナミカル・システムは、いくつかのタイプに分類され現象の本質が解明できる。

現在、国内および国外でカタストロフィー理論によるシステムの性能評価に関する研究が行われている。[4] ~ [10]

R. Nelson は、拡散過程にもとずいて Slotted アロハ方式、多重プログラミング計算機システム、計算機ネットワークにおけるフロー制御において、観測されるカタストロフィー現象について解析している。横平らは、同様な手法で、P - Persistent CSMA/CD 方式について解析している。[5]

小野里、野口は、アロハ方式、CSMA 方式、CSMA/CD 方式、Assigned - Slot Listen-Before-Transmission 方式、再送方式を用いた計算機ネットワークにおけるカタストロフィー現象の存在を証明し、分岐集合を求めている。[6] ~ [10]

本論文では、Slotted アロハシステムを具体的な考察の対象として、カタストロフィー理論による性能評価の具体例を示す。文献 [8] の結果を用いて、システムの状態変数とコントロールパラメータから構成される三次元空間上に平衡点を描く。この平衡点の表示によりコントロールパラメータによるシステムの状態変化が、視覚的に理解でき、また実際のシステム設計時にツールとして用いることにより、コントロールパラメータの設定の考察が容易となる。

2 Slotted アロハシステムの解析

2.1 モデル

Slotted アロハ方式のチャンネルを持つ、有限ユーザのシステムを図1のようにモデル化する。M人のユーザが競合して1つのチャンネルを使用する。各ユーザは、生起モードまたは再送モードにある。生起モードのユーザは新しいパケットを確率 q で生起し、もし、そのパケットが他のパケットに衝突した場合は再送モードに入り確率 r で再送する。(q , r) をコントロールパラメータと

呼ぶ。 $0 < q < 1$, $0 < r < 1$ であり、実際には、 $q < r$ であると仮定する。バケット生起間隔、再送間隔は、独立で、同一のパラメータを持つ指数分布であるとする。再送モードにあるユーザをバックログユーザとよぶ。システムの状態はこのバックログユーザ数により表現される。

2.2 状態方程式と平衡点

Slotted アロハシステムを Birth-Death モデル (BD モデル) を用いて解析する。バックログユーザ数は、実際には正の整数であるが有理数 (x) として扱うことにする。ここで、 $0 < x < M$ で、システムの状態はバックログユーザ数 (x) で表現できる。

コントロールパラメータ (q, r) の下でのバックログユーザ数に関する定常確率分布を $P(x, q, r)$ であらわす。[8]

$$P(x, q, r) = C_0 \prod_{i=1}^x \lambda_{i-1} / \mu_i \quad (1)$$

$$\text{但し、} \mu_i = i r (1-r)^{i-1} (1-q)^{M-i} \\ \lambda_i = (M-i) q \{1 - (1-q)^{M-i-1} (1-r)^i\}$$

ここで、 C_0 は、正規化定数である。

カタストロフィー理論を用いるとシステムがとりうる平衡状態について解明できる。BD モデルをダイナミカルシステムとしてとらえ、カタストロフィー理論を適用する [8]。システムの状態が x のとき、入力フローは、 λ_{x-1} 、出力フローは、 μ_x となる。システムのポテンシャル関数を $f_F(x, q, r)$ で定義する。

$$f_F(x, q, r) = \int F(x, q, r) dx \\ \text{ここで、} \\ F(x, q, r) = \mu_x - \lambda_{x-1} \quad (2)$$

システムは、ポテンシャル関数が最小な状態に到達しようとする。システムドリフトは、ポテンシャル関数の微分で与えられる。 $\partial f_F / \partial x$ は、ドリフトの方向と大きさを示す。システムドリフトが 0 のときシステムは平衡状態であると定める。平衡状態をポテンシャル関数の x に関する 2 階偏微分係数の符号により、次のように安定平衡点と不安定平衡点に分類する。

コントロールパラメータが与えられたとき、ポテンシャル関数が極小値 (極大値) をとる状態を安定平衡点 (不安定平衡点) と呼ぶ。つまり、 $F(x, q, r) = 0$ となる $x = x_0$ は入力フロー、出力フローが等しい状態で、平衡状態である。そのうち、 $x = x_0$ で、 $F(x, q, r)$ が x に関して増加関数であるとき、安定平衡点、減少関数である時は不安定平衡点という。

図 2 の入出力フローの交点では、 $F(x, q, r) = 0$ であり、 x_1, x_2 が安定平衡点となる。コントロールパラメータ (q, r) が与えられたとき、 $F(x, q, r) = 0$ をみたす x の数とその値からシステムの状態を考察できる。

カタストロフィー理論を用いるとシステムがとりうる平衡状態について解明できる。BD モデルをダイナミカルシステムとしてとらえ、カタストロフィー理論を適用する [8]。文献 [8] の結果より BD モデルでは、カスプカタストロフィーが存在する。従って Slotted アロハシステムの平衡状態は、 x, q, r で張られる 3 次元空間において、 $F(x, q, r) = 0$ を満たす解曲面で表示できる。

2.3 平衡状態の表現

(a) 三次元表示

$M = 100$ の時、三次元空間 (x, q, r) で $F(x, q, r) = 0$ を満たす解曲面を図 3 に示す。

平衡点の三次元表示で、解曲面を見る視点を換えられるようにすれば、視点を変化させることにより解曲面の形状を視覚的に理解することが容易となる。図 3 において曲面を表している線は r を一定にし、 q を変化させ、 $F(x, q, r) = 0$ なる時の x の値を表示したものである。カスプカタストロフィーとその折り目の存在 [8] が確認できる。曲面を折り畳んだ様な部分があり、この折り畳んだ曲面の上下の面は、安定平衡点を表し、間にはさまれた面は、不安定平衡点を表している。従って、この曲面を折り畳んだ部分に、コントロールパラメータ設定すると、 x の急激な増加が起こってしまう可能性がある。

平衡点の三次元表示は平衡状態の端的な表現として用いることが出来るが、コントロールパラメータの値を読み取る事ができない。そのため以下のグラフを導出する。

(b) 分岐集合

図 3 の折り畳みの曲面の端の線条部分を折り目 (fold line) と呼ぶ。折り目を $q-r$ 平面に射影したものを分岐集合といい、図 4 に示す。分岐集合は、

$B_f = \{(q, r) \mid F = \partial F / \partial X = 0\}$ で定義される。分岐集合はカスプ状の曲線を描き、カスプカタストロフィーの存在を示す。分岐集合の内側は双安定領域、外側は単安定領域である。カスプ状の曲線の先端の尖った部分がくさびの点である。 $M = 100, r = 0.05$ において、 q が (a) $q = 0.003$, (b) $q = 0.0038$, (c) $q = 0.005$ の時の分岐集合の点を

図4に示す。(a)の場合は単安定である。(b)の場合は双安定で、図2より2つの確率分布のピークが存在する。(c)の場合は単安定であるが、オーバーロードとなる。

(c) 折り目の $q-x$, $r-x$ 平面への射影
 図3の折り目の $q-x$ 平面への射影を図5, $r-x$ 平面への射影を図6に示す。単安定と双安定領域の境界での x の値がわかる。矢印は各ユーザ数ごとのくさびの点を示す。くさびの点の近傍では x が急激に増大することがわかる。また、分岐集合近傍にコントロールパラメータを設定した場合、コントロールパラメータが変化した時、バックログユーザ数の急激な増大が予測される。

(d) 解曲面の断面(1)

解曲面を $q-x$ 平面に平行な r 一定の平面で切断した曲線で、 q に対する平衡点の数と x の値がわかる。図4の分岐集合の数値例と同じ $r=0.05$ でこれを図7に示す。図7の(a)では単安定であり、 $x=3$ である。(b)では双安定となる。(c)では単安定であるが、 $x=93$ でオーバーロードである。図7の矢印はドリフトを表す。

(e) 解曲面の断面(2)

$M=100$ での解曲面を $q-r$ 平面に平行な x 一定の平面で切断した曲線を図8に示す。 q の変化に対し、 x を一定に保つように r を設定する制御の考察に役立つ。

2.4 Slotted アロハシステムの評価基準

Slotted アロハシステムのスループット S , 平均ディレー DL , 平均バックログユーザ数 B を次のように定める。[8, 11, 12]

$$B = \sum_{x=0}^M x P(x, q, r) \quad (3)$$

$$S = \sum_{x=0}^M P(x, q, r) \{ (M-x) q(1-q)^{M-x-1}(1-r)^x + xr(1-r)^{x-1}(1-q)^{M-x} \} \quad (4)$$

$$DL = B/S \quad (5)$$

$M=100$ での数値例を図9, 10, 11に示す。

単安定領域においてスループットが最大となる (q, r) の値を導出する。チャンネルトラヒック G を

$$G = (M-x)q + xr \quad (6)$$

と定義する。多数ユーザのもとでのスループット

は,

$$S = G \exp(-G) \quad (7)$$

と近似される。 $\partial S/\partial G = 0$ を満たす $G=1$ の時, スループットは最大値

$$S_{max} = 1/e = 0.368 \quad (8)$$

となる。入力フロー I を

$$I = (M-x)q \quad (9)$$

と定義する。

スループットが最大となる $G=1$ のときバックログユーザ数 X_{max} は(6)式より

$$X_{max} = (1-Mq) / (r-q) \quad (10)$$

(8)~(10)式より S の最大値を与える q , r の関係式は

$$r = (e-1)q / (Meq-1) \quad (11)$$

となる。

双安定領域においては、(4)式を用いて算出する。

$M=100$ のときのスループット最大曲線を図12に示す。

2.5 コントロールパラメータの設定

コントロールパラメータを選定する際、本来スループット、ディレー、安定性は競合する事を念頭に置かなければならない。[11]実際のパケット生起に関する q には、システム設計上制約を受ける。そこで、次ぎに上げる2つの場合を仮定する。

1) q, r を自由に定められる。

2) q が定まっていて、 r を決定する。

また、チャンネルの状態を安定性の観点からみると、次の2つの場合がある。

A) q, r を小さく設定した単安定チャンネル。

B) q, r を比較的大きく設定した双安定チャンネル。

A)は単安定領域で x が小さくなる点を選定した場合である。 q, r が非常に小さい場合は、入力フローが少ないためチャンネルの有効利用は望めない。B)は双安定領域を選定した場合で、 X が増大し、スループットが低下する可能性がある。

システム設計において希望するスループット、ディレーを定常状態において得るためのコントロールパラメータの設定手順を次ぎに示す。

1 平均スループット、ディレー曲線(図9~11)より望むスループット、ディレーを達成する q, r を一応決める。

2 q, r で決まる x の値の位置を三次元空間(図3)で確認する。パラメータの変化に対する状態変化を考察する。

3 分岐集合の表示(図4)より単安定領域か双安定領域かを確認する。

4 $q-x$ 切断面 (図5) より x を求める。双安定のばあい、 x が増大する可能性があるのでバックログユーザ数の確率分布を求め、 x の大きい方に分布が寄っている等の満足の行かない結果の場合、 q 、 r を設定しなおす。ここで、 x の増加の様子は文献 [8] のシステムバロメータを用いて推定できる。

実際に $M=100$ 、 $q=0.003$ に定まっている場合に r を設定する手順を行う。 $S=0.27$ 以上、 $DL=15$ 以下に望むとする。

1 図9~11より S 、 DL の条件を満たす $r=0.003\sim 0.005$ を一応決める。

2 図3において $q=0.003$ では r を大きく取ると、 X が増大する可能性があることがわかる。

3 チャンネルをこのコントロールパラメータの値で十分安定に使用する事を望む場合、図4の単安定領域に r を設定するが、図10より、 DL を下げるために r を分岐集合の近傍 (図4)、 $r=0.05$ とする。

4 図7より (a) $q=0.003$ 、 $\gamma=0.005$ のとき、 $x=3$ で十分小さい。 q が少しでも増加し、(b) $q=0.0038$ となると、双安定で $x=8$ または 88 となる。なおも増加し、(c) $q=0.005$ のとき、 $x=93$ となり、急激にバックログ数の増加によって、スループット、デイレイの悪化が起こる。

以上より $r=0.05$ に設定する。しかし、 q が変動して大きくなる場合には双安定領域に入る恐れがある。

3 結論

本論文では、Slotted Alohaシステムを例にとり、カタストロフィー理論によるネットワークシステムの性能評価について考察した。平衡点の三次元表示により、システムの平衡状態を端的に表現することができた。チャンネル設計においては、本論中のグラフをツールとして用いれば設定したコントロールパラメータに対する状態や性能を簡単に導出することができる。また、ツールの使用によりカスプカタストロフィーの存在を考慮しながらチャンネルに対するフロー制御法を考案することも容易となろう。

参考文献

- [1] M.W.Hirish and S.Smale, "Differential Equations Dynamical Systems and Linear Algebra", Academic press, 1970.
- [2] R.Thom, "Structural Stability and Morphogenesis", Benjamin, 1975
- [3] M.Golubitsky, "An Introduction to catastrophe theory and its applications", SIAM Rev., vol.20, pp.352-387
- [4] R.Nelson, "Stochastic Catastrophe Theory in Computer Performance Modeling", IBM Research Report, RC10406, March 1984
- [5] 横平, 西田, 宮原, 高島, "カタストロフィー理論を用いた p-persistent CSMA/CD 方式の性能評価", 電子通信学会, 情報ネットワーク研究会資料, IN 85-36, 1985
- [6] 小野里, 野口, "アロハ型マルチアクセス方式の双安定性の解析", 電子通信学会論文誌(D), vol. J65-D, No.2, pp.290-297, 1982
- [7] 小野里, 野口, "ランダムアクセス型通信方式における双安定性の解析", 電子通信学会論文誌(D), vol. J67-D, No.2, pp.169-176, 1984
- [8] Y.Onozato and S.Noguchi, "Thrashing Cusp in Slotted aloha systems", IEEE.Trans. Commun., vol.COM-33, No.11, pp.1171-1182, Nov.1985
- [9] Y.Onozato and S.Noguchi, "A unified analysis of steady state behavior in random access schemes", Computer Networks and ISDN Systems, vol.10, p111-122, 1985
- [10] Y.Onozato, K.Katayama and S.Noguchi, "An Analytical method of thrashing phenomena of retransmit model in computer networks", Proceedings of Computer Networking and Performance Evaluation, Tokyo, (North - Holland) 1985
- [11] S.S.Lam, "Packet switching in multiaccess broadcast channel with application to satellite communication in a computer networks", Ph.D.dissertation, Dep.Comput. sci., Univ.Carifornia, Los Angeles, Mar. 1974
- [12] A.B.Carleial and M.E.Hallman, "Bistable behavior of ALOHA-type system", IEEE Trans Commun., vol COM-23, pp1306-1311, Nov.1975

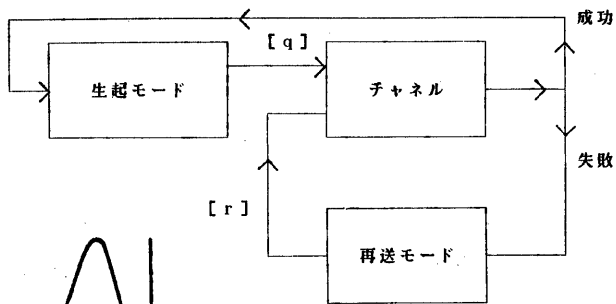


図1 Slotted aloha 方式のモデル

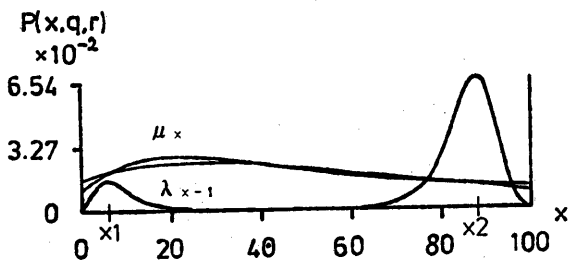


図2 定常確率分布 ($q=0.0038, r=0.05, M=100$)

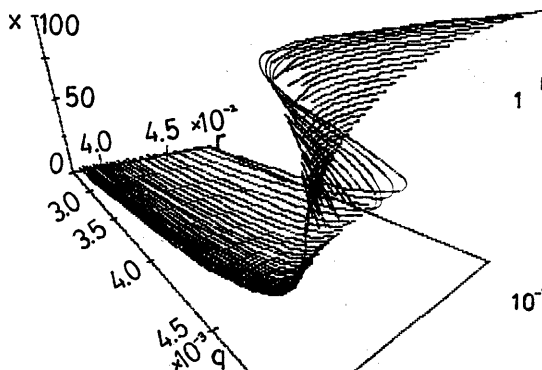


図3 平衡点の三次元表示 ($M=100$)

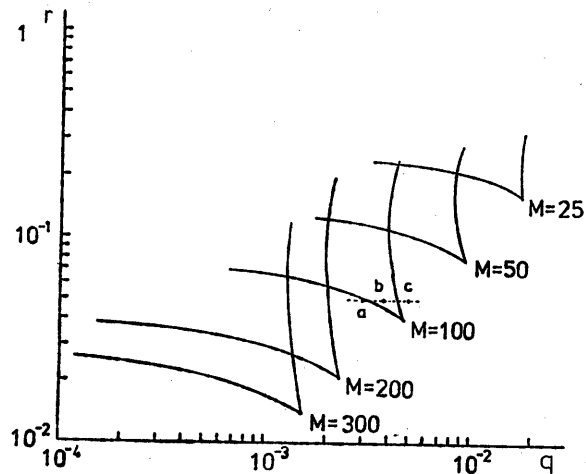


図4 分岐集合

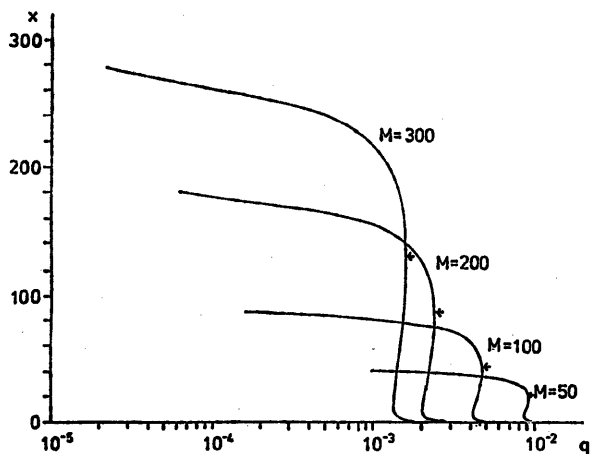


図5 折り目の $q-x$ 平面への射影

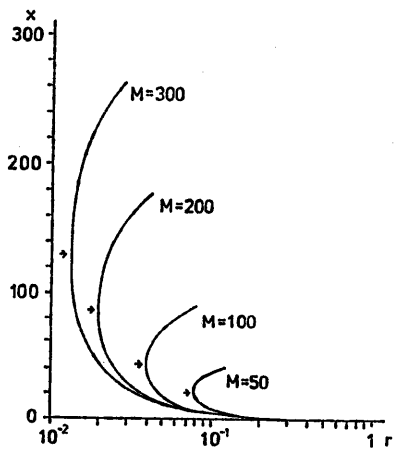


図6 折り目の $r-x$ 平面への射影

