

相互接続されたポーリングシステムの性能解析

滝根 哲哉、高橋 豊、長谷川 利治
京都大学工学部

1. はじめに

本稿では外部の広域ネットワークと相互接続されたポーリングシステムを取り扱う。ポーリングシステムに対する従来の研究は主に各端末でのバッファを無限として扱ったものが多く、それらは各端末がポーリングされたときの処理規範により種々の方式が提案され、解析されている。これらポーリングシステムにおける処理規範は以下に述べるように大きく3つに分けられる。1つは掃き出し方式 (Exhaustive Service Discipline) と呼ばれるもので、ポーリングされた端末は保持しているジョブがなくなるまで連続して処理を行い、処理中に到着したジョブも同じ処理期間内に処理される。もう1つはゲート方式 (Gated Service Discipline) と呼ばれるもので、各端末はポーリングされたとき保持していたジョブについてのみ処理を行い、処理中に到着したジョブは次に端末がポーリングされたときにまとめて処理される。これらの処理規範に対する最近の研究は [Rubi83]、[Ferg85] に見られる。最後は制限方式 (Limited Service Discipline) と呼ばれるもので、1回のポーリングで処理されるジョブの最大数に制限があるものである [Kueh79]。また、各端末におけるバッファが有限であるモデルはあまり研究されていないが、特にバッファサイズが1であるシステムは [Hash79]、[Taka85a]、[Taka85b] において扱われている。

このように、ポーリングシステムは数ある通信システムの中でも最も以前から研究されてきたものの1つであるが、近年、再び多くの研究がなされている背景にはLANの急激な発達がある。すなわち、LANの一方式であるToken-Passing方式がポーリングシステムで直接モデル化できるからである。

一方、数年来、LANと外部広域ネットワーク、あるいは、他の独自に構築されたLANと相互に接続したいという要求が高まっている。これら相互接続に関する問題に対しては、活発な議論が多岐にわたって行われている [Dant82]、[Hira84]。しかし、一般にその性能評価に際して相互接続された情報網全体を解析的に扱うことは、それらを構成する個々の情報網の確率的挙動が独立でないため極めて困難であり、この問題を解析的に扱ったものはほとんど見られない。そこで我々は外部の広域ネットワークと相互接続されたポーリングシステムにおいて、広域ネットワークがもたらすトラフィックがポーリングシステムに与える影響を評価するためのモデルを提案する。さらに、このモデルに対して各端末におけるスループット及び平均遅延の正確な解析を行う。

以下、2章においてモデルの提案を行い、スループット及び遅延の解析を3章において行う。4章では、この解析を用いていくつかの数値例を示す。

2. モデル

システムは外部の広域ネットワークと相互に接続されており、端末1から端末MまでのM個の同質な端末と1個の外部入力局から構成されているものとする。同質な各端末におけるジョブの到着時間間隔はパラメータ λ_S の指数分布に従い、これらのジョブは大きさ1のバッファに蓄えられる。よって、バッファに保持されているジョブが完全に処理されない限り、新たなジョブの到着を受けつけない。またこれらのジョブの処理時間は一定とし T_S で表す。一方、外部の広域ネットワークからこのシステム

へ到着するジョブの到着時間間隔はパラメータ λ_e の指数分布に従い、到着したジョブは総て外部入力局の十分に大きなバッファに集められ、呼損は起こらないものとする。さらにこれらのジョブの処理時間も一定とし、 T_e で表わす。

各端末及び外部入力局における処理規範は以下のようであるとする。まず、外部入力局がポーリングされる。もしこのときジョブがあれば掃き出し方式 (Exhaustive Service Discipline) により処理が行われる。ジョブがない場合、または処理が終了したときは次に端末1がポーリングされる。このときジョブの処理権を移動するために必要な時間を応答時間間隔と呼ぶ。端末1がポーリングされたときジョブがあれば処理を行う。処理の終了後、あるいはジョブがなかったときは端末2がポーリングされる。以下同様にして端末3・・・端末Mがポーリングされる。端末Mにおける処理が終了した後、またはジョブがなかったとき、次に再度、外部入力局がポーリングされ、上に述べた手続きが繰り返される。ここで、各端末及び外部入力局の間における各応答時間間隔は総て一定であるとし、これらの和を c_0 で記述する。

3. 解析

外部入力局がポーリングされた直後から次にポーリングされる直前までの期間をポーリング周期と呼ぶ。

新しいポーリング周期の開始時点におけるシステムの状態を $V = (V_1, \dots, V_M)$ で表わす。各 V_i は端末 i が最後のポーリング周期においてポーリングされたとき、もしジョブを保持していたならば1、保持していなければ0を取るものとする。さらに、1ポーリング周期内に処理されたジョブの個数、すなわち $|V| = \sum_{i=1}^M V_i$ で縮約された状態を定義する。

次に外部入力局がポーリングされてからジョブの処理が終了するまでの時間間隔 (もしジョブがなければ0) をサービス期間と呼ぶことにすると、定常状態におけるこのサービス期間の長さはサービス期間の開始時点におけるシステムの縮約された状態のみに依存する。システムの縮約された状態が i であるとき、サービス期間の長さの分布のラプラス・スティルチェス変換形を $F_i^*(s)$ とすると、これは以下の関数方程式を満たす。

$$\begin{aligned} F_i^*(s) &= \exp[-\lambda_e(c_0 + iT_s)(1 - B^*(s))] \\ B^*(s) &= \exp[-T_e(s + \lambda_e - \lambda_e B^*(s))] \end{aligned} \quad (1)$$

なお、任意の s の値に対する $F_i^*(s)$ の値は、適当な初期値を (3) の右辺に代入し、それより新しい値を得るという操作を繰り返すことにより得ることができる。また (3) より、縮約された状態 i が与えられたときのサービス期間の平均長、 $F_i^{(1)}$ 、は以下の式で与えられる。

$$F_i^{(1)} = \frac{\lambda_e T_e (c_0 + iT_s)}{1 - \lambda_e T_e} \quad (2)$$

次に、外部入力局におけるサービス期間が t_i であるという条件のもとで状態 V から状態 $V' = (V'_1, \dots, V'_M)$ への遷移確率を考える。この条件付き遷移確率は簡単に得ることができる。

$$\text{Prob}\{\text{next state is } V' \mid \text{state is } V \text{ and service period is } t_i\} \quad (3)$$

$$= \prod_{j=1}^M \{ \exp[-\lambda_s c(j)] q_j + V'_j (1 - 2\exp[-\lambda_s c(j)] q_j) \}$$

ただし

$$c(j) = c_0 + \left(\sum_{i=j+1}^M v_i + \sum_{i=1}^{j-1} v_i \right) T_s$$

$$q_i = \exp[-\lambda_s t_i]$$

式(3)の t_i に対する条件を取り除くために、以下ではこの条件付き遷移確率を q_i について展開する。まず、状態 V 、 V' 、及び、サービス期間の長さ t_i が与えられたとき、 P_n を以下の式で定義する。

$$P_n = \prod_{j=1}^n \{ \exp[-\lambda_s c(j)] q_i + v_j' (1 - 2 \exp[-\lambda_s c(j)] q_i) \} \quad (1 \leq n \leq M) \quad (4)$$

この定義より P_n は t_i が与えられたときの状態 V から状態 V' への条件付き遷移確率に外ならない。さらに式(4)より以下の漸化式を得る。

$$P_n = P_{n-1} \{ v_n' + (1 - 2v_n') \exp[-\lambda_s c(n)] q_i \} \quad (1 \leq n \leq M) \quad (5)$$

ただし

$$P_0 = 1$$

次に P_n を q_i について展開したときの q_i^k の項の係数を $G_n(k)$ で表わす。すなわち、

$$P_n \triangleq \sum_{k=0}^n G_n(k) q_i^k \quad (6)$$

式(5)、(6)より以下の等式が導かれる。

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n G_n(k) q_i^k &= \sum_{k=0}^{n-1} G_{n-1}(k) q_i^k \{ v_n' + (1 - 2v_n') \exp[-\lambda_s c(n)] q_i \} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} v_n' G_{n-1}(k) q_i^k + \sum_{k=1}^n (1 - 2v_n') \exp[-\lambda_s c(n)] G_{n-1}(k-1) q_i^k \end{aligned} \quad (7)$$

最終的に以下の漸化式を得る。

$$G_n(0) = v_n' G_{n-1}(0)$$

$$G_n(k) = v_n' G_{n-1}(k) + (1 - 2v_n') \exp[-\lambda_s c(n)] G_{n-1}(k-1) \quad (1 \leq k \leq n-1) \quad (8)$$

$$G_n(n) = (1 - 2v_n') \exp[-\lambda_s c(n)] G_{n-1}(n-1)$$

条件付き遷移確率である P_n は $\sum_{k=0}^M G_n(k) q_i^k$ で与えられ、各 $G_n(k)$ ($0 \leq k \leq M$) の値は $G_0(0) = 1$ を初期値として式(8)を繰り返し用いることにより得ることができる。さらに、 q_i^k はサービス期間 t_i の間に k 個の端末にジョブの到着がない確率であり、一方、 $F_i^*(k, \lambda_s)$ は、縮約された状態 i が与えられたとき、サービス期間の間に k 個の端末にジョブの到着がない確率を表わす。

以上の考察により状態 V から状態 V' への遷移確率は次の式で与えられる。

$$\text{Prob}\{\text{next state is } \mathbf{V}' \mid \text{state is } \mathbf{V}\} = \sum_{k=0}^M G_M^{(k)} F_1^*(k\lambda_s) \quad (9)$$

ただし

$$|\mathbf{V}'| = i$$

$Q(V_1, \dots, V_M)$ をポーリング周期の開始時点におけるシステムの定常状態確率とすると、これは以下の方程式の解として与えられる。

$$Q(V_1, \dots, V_M) = \sum_{\mathbf{V}} Q(V_1', \dots, V_M') \text{Prob}\{\text{next state is } \mathbf{V} \mid \text{state is } \mathbf{V}'\} \quad (10)$$

さらに、縮約された状態 i に対する定常状態確率を π_i とすると、 π_i は次の式より得られる。

$$\pi_i = \sum_{|\mathbf{V}'|=i} Q(V_1, \dots, V_M) \quad (0 \leq i \leq M) \quad (11)$$

式 (11) を用いてポーリング周期の平均長、 c 、を得る。

$$c = c_0 + \sum_{i=1}^M \pi_i (iT_s + F_i^{(1)}) \quad (12)$$

システム全体でのスループット、 S 、を以下のように定義する。

$$S = \frac{\text{mean transmission times in the polling cycle.}}{\text{mean length of the polling cycle.}} \quad (13)$$

式 (12)、(13) よりただちに次式を得る。

$$S = \frac{\sum_{i=0}^M \pi_i iT_s}{c} \quad (14)$$

続いて各端末 j におけるスループット、 S_j 、及び平均待ち時間、 w_j 、を導く。まず、端末 j がポーリングされたときジョブの処理が行われる確率、 α_j 、は次の式で与えられる。

$$\alpha_i = \sum_{\mathbf{V}, \mathbf{V}'_i=1} Q(V_1, \dots, V_M) \quad (15)$$

式 (12)、(15) を用いて、 S_i 及び w_i は以下ようになる。

$$S_i = \frac{\alpha_i T_s}{c} \quad (16)$$

$$w_i = \frac{c}{\alpha_i} - T_s - \frac{1}{\lambda_s} \quad (17)$$

4. 数値結果

図 1 に端末での到着率を固定したときの、外部入力局の到着率に対するスループットの変化を示す。

予想されるように、外部入力局の到着率の増加に伴いスループットは減少する。また応答時間間隔が大きいほどスループットは低い。なお外部入力局におけるバッファは十分に大きいと仮定しているので、スループットと外部入力局の到着率の和は1を超えることはない(点線)。図2では横軸に端末での到着率に対する外部入力局での到着率の比を取ったときのスループットの変化を示す。これより端末及び外部入力局での到着率の和が0.8を超えるあたりから(星印)、スループットの減少が激しくなることがわかる。表1では各端末におけるスループット及び遅延の特性を示す。外部入力局との相対的な位置関係は、スループット及び遅延特性に関して端末間にほとんど差が見られない。これは各端末がその相対的な位置にかかわらず、同等に扱われることを示している。図3において端末1に対する遅延-スループット特性を示した。なお各端末におけるバッファサイズは1なので、遅延が無限大に発散することはない。

5. むすび

本稿では外部の広域ネットワークと相互接続されたポーリングシステムのモデルを提案し、スループット及び遅延の正確な解析を行った。数値結果よりいくつかの興味ある結果が得られた。本稿におけるモデルは端末での処理時間等を一定としているが、端末での処理時間が一定でない場合の解析は端末間の従属性のため一般的な解法を見いだすことは困難であり、そのような、より一般的なモデルに対しては近似解法に頼らなければならないものと思われる。

参考文献

- [Dant82] A.S.Danthine, "Network Interconnection," Local Networks, pp.289-308, North-Holland, Amsterdam, 1982.
- [Ferg85] M. J. Ferguson and Y. J. Aminetzah, "Exact Results for Nonsymmetric Token Ring Systems," IEEE Trans. on Communications, Vol. COM-33, No. 3, pp. 223-231, March 1985.
- [Hash79] 橋田、川島 「端末呼源1のポーリング方式の解析」、信学論(B), Vol. J62-B, pp. 1097-1102,(昭54-11).
- [Hira84] 平松、竹中、高見 「LAN相互接続を考慮した公衆パケット交換サービスの検討」 LAN/マルチメディアの応用と分散処理シンポジウム論文集、85-92頁,(昭59-10).
- [Kueh79] P. J. Kuehn, "Multiqueue Systems with Nonexhaustive Cyclic Service," The Bell System Technical Journal, Vol. 58, No. 3, pp. 671-698, March 1979.
- [Rubi83] I. Rubin and L. F. M. de Moraes, "Message Delay Analysis for Polling and Token Multiple-Access Schemes for Local Communication Networks," IEEE Journal on Selected Areas in Communications, Vol. SAC-1, No. 5, pp. 935-947, November 1983.
- [Taka85a] H. Takagi and L. Kleinrock, "Analysis of Polling Systems," IBM JSI Research Report, TR87-0002, January 1985.
- [Taka85b] H. Takagi, "On the Analysis of a Symmetric Polling System with Single-Message Buffers," Performance Evaluation, Vol. 5, No. 3, pp. 149-158, August 1985.

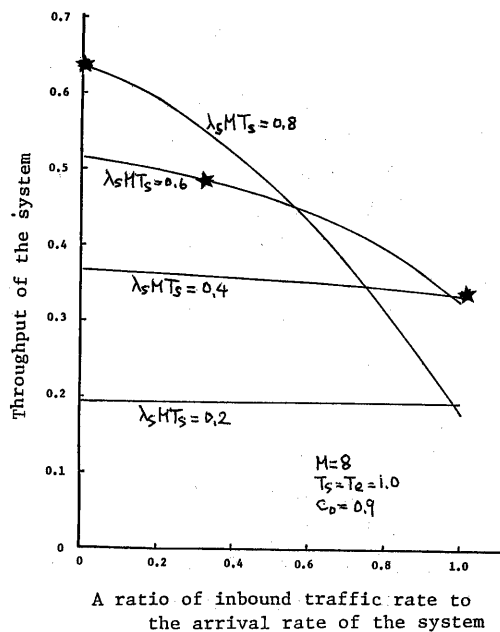
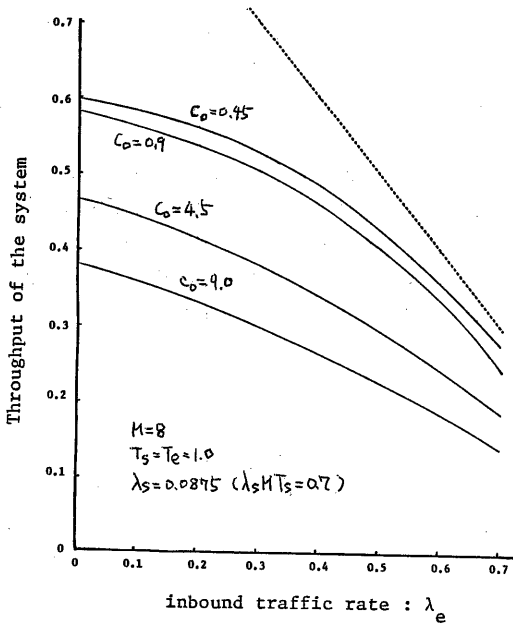


图 1. Throughput vs. inbound traffic rate.

图 2. Throughput vs. inbound traffic rate.

表 1. Throughput and mean waiting time

$M = 8, c_0 = 0.9, T_s = T_e = 1.0$

	T_i	w_i		T_i	w_i
station 1	0.044454	1.4946	station 1	0.058067	2.8879
station 2	0.044450	1.4970	station 2	0.058042	2.8953
station 3	0.044445	1.4997	station 3	0.058014	2.9036
station 4	0.044439	1.5026	station 4	0.057983	2.9129
station 5	0.044432	1.5058	station 5	0.057948	2.9233
station 6	0.044425	1.5094	station 6	0.057909	2.9349
station 7	0.044417	1.5134	station 7	0.057865	2.9481
station 8	0.044409	1.5179	station 8	0.057815	2.9630

(a) $\lambda_s M T_s = 0.4, \lambda_e = 0.2$ (b) $\lambda_s M T_s = 0.6, \lambda_e = 0.3$

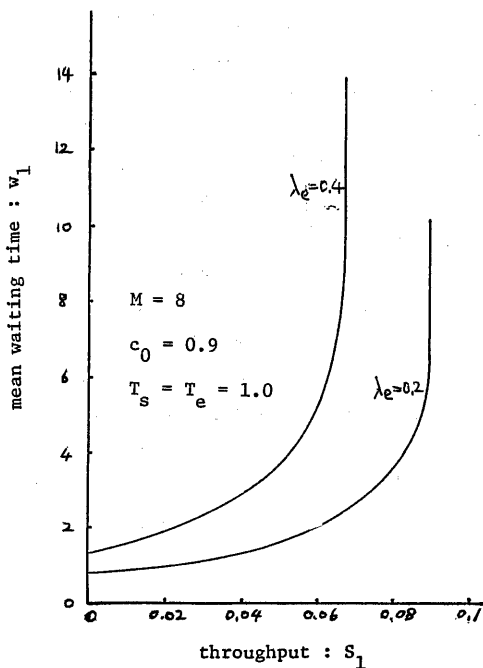


图 3. Mean waiting time vs. throughput.