

## ネットワークにおける 多重化と並列化の比較

坂本康治、鈴木基史、濱崎陽一、岡田義邦  
電子技術総合研究所

マルチプロセッサ・システムの相互接続ネットワークとして使用する放送型光バス・システムを高速化するものとして、マルチバス方式が期待される。そのデータ転送形態としては、並列型と多重型が考えられる。見かけの性能は並列型の方が優れるが、オーバーヘッド分を除いた実効的な性能については必ずしもこのことは成立しない。本論文では、まず、オーバーヘッドの要因について検討し、その値を計算する。次に、ネットワークを待ち行列でモデル化する。最後に上の結果と待ち行列解析により並列型と多重型の性能比較、並列型が多重型に対して優位性を保つための許容オーバーヘッドの算出を行う。

### A PERFORMANCE COMPARISON BETWEEN MULTIPLE AND PARALLEL BUSES FOR A NETWORK

Koji Sakamoto, Motohiro Suzuki, Yoichi Hamazaki  
and Yoshikuni Okada

Electrotechnical Laboratory

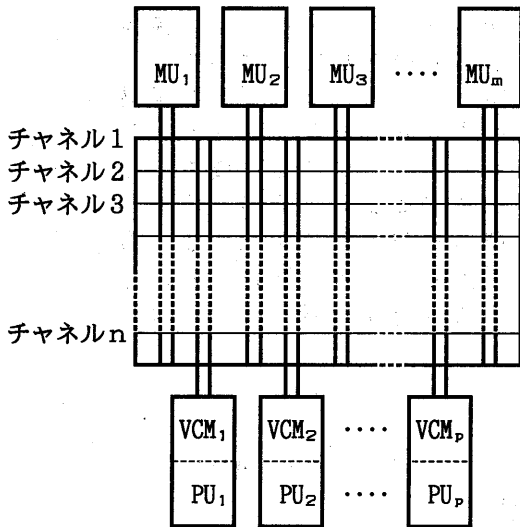
Umezono 1-1-4, Tsukuba 305, Japan

A multi-bus network is a key factor for the speed-up of a broadcast optical-bus system used for a multi-processor system. For this network, we compare two types of data-transfer methods, i.e. parallel and multiple. The former seems superior to the latter. But, this is not necessarily true, because of overheads. We clarify the critical overhead which determines the overhead-limit of the parallel type for keeping the superiority over the multiple type.

First, we consider and calculate a overhead factor, then model the parallel and multiple types as queueing system, and lastly compare the performance of the two types and obtain the critical overhead.

## 1 はじめに

ネットワークの性能を向上させる手段として、複数のバスを使用する方式がある<sup>(1)</sup>。その構成例を図1に示す。データの転送形態としては、各バスを独立したものとして使用する多重型と、複数のバスを束ねて同時に使用する並列型が考えられる。ここでは、当所で開発中の放送型光バスをモデルとして多重型と並列型の性能上の得失を論ずる。



- PU : プロセッサ・ユニット  
VCM : 仮想共有メモリ  
MU : メモリ・ユニット (共有メモリ)  
m : メモリ・ユニット数  
n : 光バスのチャンネル数  
p : プロセッサ数

図1 光バスの構成例

チャンネル数が $n$ のとき、それぞれ $n$ -並列型と $n$ -多重型とよぶことにする。これらはそれぞれ処理速度が $n$ 倍の単一サーバ・単一キュー、および処理速度が1倍の $n$ サーバ・単一キューでモデル化することができる。待ち行列の理論によれば、オーバーヘッドがないときには一般に並列型の方が性能的に優れる。しかし、オーバーヘッドがある場合には必ずしもそうはならない。パケットのフィールドの中にはプリアンブルなど並列化できないものがあるため、オーバーヘッドの比率が並列度とともに高くなるからである。そこで本論文では

- ①並列型が多重型に比べて何倍の性能を実現できるか？
- ②並列型が多重型に対して性能の上で優位性を

保つための許容オーバーヘッドはどの程度か？という観点から光バス・システムについて考察を行う。

以下では、まずオーバーヘッドに影響を与える要因を明らかにする。次にパケット形式としてFDDIフォーマットを用い、バス調停法として1進多段法<sup>(2)</sup>を用いるとし、転送データの平均長を512バイトとして、チャンネル数とオーバーヘッドの関係を求める。続いて、以上の結果と待ち行列解析により、並列型と多重型の性能比較を行う。最後に、FDDIフォーマットに限らず一般の場合について、許容オーバーヘッドの臨界値を求める。

## 2 オーバヘッドに影響を与える要因

オーバーヘッドに影響を与える要因としては、フレーム形式、バス調停方式、およびチャンネルの割当て方式がある。

### 2.1 フレーム形式

データを送信する場合、データ以外に同期をとるためのプリアンブル、データの始り/終りを示す制御文字、およびエラー検出のためのコードなども必要である。これらは転送の際にオーバーヘッドを形成し、そのビット数はフレーム・フォーマットによって定まる。オーバーヘッドの相対比率は送るべきデータ量が大きいほど小さくなる。

並列型では一つのパケットをチャンネルに分割して送るため、転送すべきデータ量がチャンネル数に反比例して少なくなる。一方、オーバーヘッドはプリアンブルなどチャンネル数によらない固定成分を含む。このため、オーバーヘッドの相対比率が並列度とともに高くなるのは前述のとおりである。

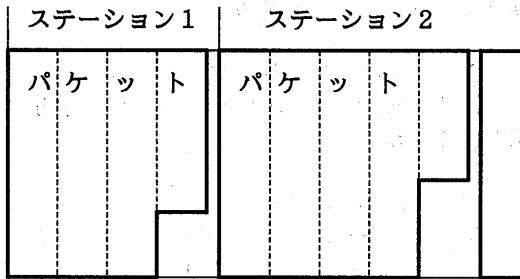
### 2.2 バス調停方式

バス調停(アービトレーション)は、バス競合が生じた際にアクセス権を付与すべきノードを決定するものである。これをデータ・バス上で行うものをインチャンネル型(付加型)、別のライン上で行うものを独立型とよぶ。前者の場合はオーバーヘッドの比率がさらに大きくなる。

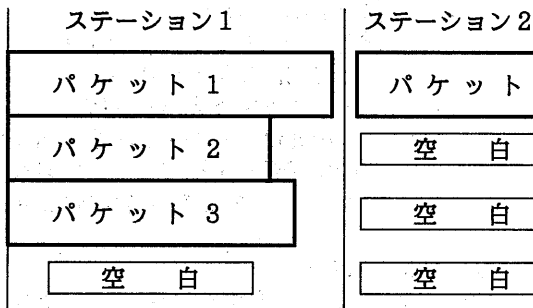
### 2.3 チャンネルの割当て方式

チャンネルの割当て方式としては、一つのパケットに全てのチャンネルの使用権を与える一括割当て方式と、一つのチャンネルの使用権のみを与える個別割当て方式がある。1メッセージ当たりのバス調停の回数は、一括割当て方式の方が少ないので有利であるが、これを多重型に適用すると見かけのオーバーヘッドが大きくなる(図2参照)。した

がって、並列型には一括割当て方式を使用し、多重型には個別割当て方式を使用することとする。



(a) 並列型への適用



(b) 多重型への適用

図2 一括割当て方式

## 2.4 転送形態

データ転送方式とバス調停方式の対により、多重バス・システムを次のように分類する。

- ①タイプⅠ：＜並列型、独立型＞
- ②タイプⅡ：＜並列型、付加型＞
- ③タイプⅢ：＜多重型、独立型＞
- ④タイプⅣ：＜多重型、付加型＞

各タイプのチャンネル割当て状況を図3に示す。

以下では、アクセス制御をインチャンネル型（付加型）とする。すなわち、性能比較の対象としてタイプⅡとタイプⅣをとりあげる。

## 2.5 制御のフローチャート

局数を $m$ とすると、並列型では1局に全チャンネルを割り当てるので、チャンネル割当ての様子を図4(a)で示すことができる。また、多重型は1チャンネルのみを割り当てるので図4(b)で表すことができる。図中、スイッチはアービタを等価的に示したものである。この場合、制御の流れは図5のようになる。図中、破線は個別割当てのときのみ使用するブロックである。

### ＜タイプⅠ＞ ＜並列型、独立型＞

チャネル1  DT:P<sub>i</sub>  DT:P<sub>k</sub>

チャネル2  DT:P<sub>i</sub>  DT:P<sub>k</sub>

チャネルn  DT:P<sub>i</sub>  DT:P<sub>k</sub>

### ＜タイプⅡ＞ ＜並列型、付加型＞

チャネル1  DT:P<sub>i</sub>  AC  DT:P<sub>k</sub>

チャネル2  DT:P<sub>i</sub>  AC  DT:P<sub>k</sub>

チャネルn  DT:P<sub>i</sub>  AC  DT:P<sub>k</sub>

### ＜タイプⅢ＞ ＜多重型、独立型＞

チャネル1  DT:P<sub>i</sub>  DT  DT

チャネル2  DT  DT  DT:P<sub>i</sub>

チャネルn  DT  DT  DT:P<sub>i</sub>  D

### ＜タイプⅣ＞ ＜多重型、付加型＞

チャネル1  AC  DT:P<sub>i</sub>  AC  DT

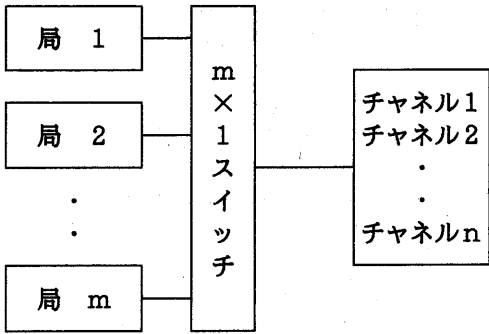
チャネル2  AC  DT  AC  DT:

チャネルn  DT  AC  DT:P<sub>i</sub>  A

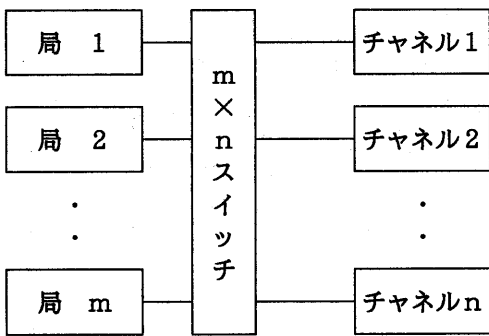
図3 各転送形態におけるチャンネルの割当て状況  
P<sub>i</sub>: ノード名, AC: アクセス制御,  
DT: データ転送

各局は次の①～⑦の動作を繰り返す。

- ①自局(局 $i$ )内のバッファにパケットがあれば
- ②まず、バッファ内パケット数 $q_i$ を-1して、
- ③プロセスがforkされ、一つは元に戻り一つは次に進む（個別割当て方式のときのみ使用）
- ④バスが空くまで待つ。なお、forkされたプロセスは元のプロセスとは別のバスを待つ
- ⑤空いたら送信要求を出す
- ⑥チャンネルを獲得できたら次に進み、できなかったら④に戻る
- ⑦パケットを1コ送信して①に戻る



(a) 並列型



(b) 多重型

図4 局とチャンネル間の接続  
m: 局数、n: チャンネル数

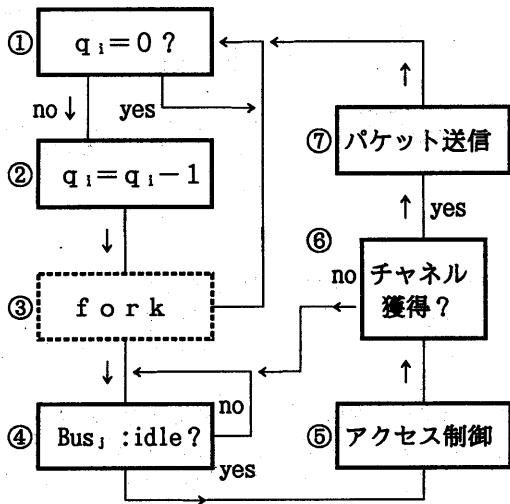


図5 チャンネル割当て方式の制御フロー  
q<sub>i</sub>: 局iのバッファ内パケット数  
Bus<sub>j</sub>: バスj

### 3 オーバヘッドについて

ここでは、アービトレーションとして1進多段法<sup>(2)</sup>を、またフレーム形式としてFDDIを用いた場合のオーバヘッドを求める。

#### 3.1 アービトレーションのオーバヘッド

1進多段法によるアービトレーション時間T<sub>A</sub>は次式となる<sup>(3)</sup>。

$$T_A = \left\lceil \frac{\log N}{\log(ni+1)} \right\rceil \cdot (iw+d)$$

≒ 200 nsec → 20 bit (100MHz駆動時)  
..... (1)

ただし、N: 優先度総数(局数) = 1000

n: 調停に使用するチャンネル数 = 4

i: 1段の調停で1チャンネルに

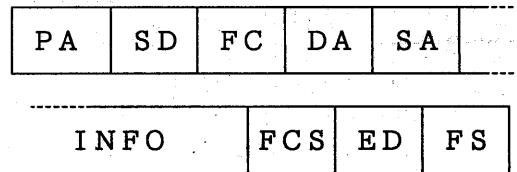
送信する光パルス数 = 4

w: 1つの光信号に要する時間 = 4nsec

d: 光の伝播遅延 + 送受信アンプ遅れ  
+ 1段の判定時間 = 40nsec

#### 3.2 フレームのオーバヘッド

FDDIのフレーム形式を図6に示す<sup>(4)</sup>。プリアンプルは電子回路が安定するまでの時間であるから、並列型の場合でも各チャンネルに必要である。また、他の制御文字や機能文字については各チャンネルにシンボル単位(4ビット単位)で割り当てる。チャンネル数をn、制御文字をDビットとしたとき、1チャンネル当たりのビット数は、4B5Bコードを使っているので、 $[D/n]_4 \times 5/4$ となる。



- PA : Preamble(16 or more symbols)
- SD : Starting Delimiter(2 symbols)
- FC : Frame Control(2 symbols)
- DA : Destination Address(12 symbols)
- SA : Source Address(12 symbols)
- INFO : Information(0 or more)
- FCS : Frame Check Sequence(8 symbols)
- ED : Ending Delimiter(1 symbol)
- FS : Frame Status(3 or more symbols)

図6 FDDIのフレーム形式(4b5bコード)

ここで、 $[x]_4$  は  $x$  以上の 4 の倍数のうち最小のものである。

各フィールド (図 6 参照) のビット数は

$$\begin{aligned} PA+SD &= 72 \times 5/4, & FC &= [8/c]_4 \times 5/4, \\ DA+SA &= [48/c]_4 \times 5/4, & FCS &= [32/c]_4 \times 5/4, \\ ED &= [4/c]_4 \times 5/4, & FS &= [12/c]_4 \times 5/4 \end{aligned}$$

となる。これをチャンネル数  $c=1\sim 32$  について計算すると表 1 のようになる。ただしバス調停時間  $T_A$  の等価ビット数を 20 とした ((1) 式参照)。この表から、平均ブロック長が  $L$  ビットのときのオーバーヘッド係数を計算すると表 2 のようになる。

表 1 オーバヘッド  $\Sigma_{ovh}$  [ビット] ( $c$ : チャンネル数)

c	PA+SD	FC	DA+SA	FCS	ED	FS	$T_A$	$\Sigma_{ovh}$
1	90	10	2·60	40	5	15	20	300
2	90	5	2·30	20	5	10	20	210
4	90	5	2·15	10	5	5	20	165
8	90	5	2·10	5	5	5	20	150
16	90	5	2·5	5	5	5	20	140
32	90	5	2·5	5	5	5	20	140

表 2 オーバヘッド係数  
( $c$ : チャンネル数,  $L$  [ビット]: 平均ブロック長)

c	オーバヘッド係数
1	$300 / ([L/1]_4 \cdot 5/4)$
2	$210 / ([L/2]_4 \cdot 5/4)$
4	$165 / ([L/4]_4 \cdot 5/4)$
8	$150 / ([L/8]_4 \cdot 5/4)$
16	$140 / ([L/16]_4 \cdot 5/4)$
32	$140 / ([L/32]_4 \cdot 5/4)$

#### 4 待ち行列によるモデル化

##### 4.1 モデル化

並列型/多重型光バス・システムを待ち行列でモデル化する。

ネットワークで転送すべきパケットを客に、バスをサーバに、全ての局のバッファを待ち行列に対応させると、到着率は単位時間にネットワークに到着するパケットの数となる。また、サービス率は単位時間に転送可能なパケットの数である。

到着率を  $\lambda$  とし、またチャンネル当たりの実質的なサービス率を  $\mu$  (オーバーヘッドも含んだ見かけのサービス率を  $\mu'$ ) で示す。なお、この場合客数は一つの局のバッファ内にあるパケット数でなく、全ての局のパケットの総和である。

図 4 のスイッチの切換え時間は、式 (1) のアービトレーション時間  $T_A$  としてオーバーヘッドに含めているので、無視することができる。したがって、局全体が等価的に単一の待ち行列を形成する。一方、サーバについては、並列型では一つのパケットに対してすべてのチャンネルが割り当てられるので、チャンネル全体はサービス率  $n\mu'$  ( $n$ : チャンネル数) の単一サーバを形成する。一方、多重型では一つのパケット送信のために一つのチャンネルのみが使用されるので、チャンネル全体はサービス率  $\mu'$  のキュー  $n$  個から成る集合体 (多重キュー) を形成する。

したがって、並列型は単一サーバ/単一キューの待ち行列として、また多重型は多重サーバ/単一キューの待ち行列としてモデル化することができる。

##### 4.2 到着時間分布とサービス時間分布

ここでは、待ち行列解析で重要な、到着時間とサービス時間分布について考察する。

到着時間分布はパケットの転送要求の生起間隔の分布で、アプリケーションによって異なる。ここでは一般に行われているように個別到着、履歴なし、到着の定常性を仮定する。すなわち指数分布とする。

サービス時間分布はチャンネルが一つのパケットを転送するのに要する時間の分布で、パケット長に依存する。パケットにはデータの他にも、プリアンブルや制御文字などアプリケーションには直接関係ない情報も含まれ、その処理のための時間も必要となる。

実際のデータ転送に要する時間  $t_s$  を“正味のサービス時間”とし、そのほかの転送に要する時間をオーバーヘッド時間  $t_{ovh}$  とする。インチャンネル型ではバス調停の間はデータを転送することができないので、この時間もオーバーヘッドとなる。チャンネルは、“正味のサービス時間”とオーバーヘッド時間の和の間専有されるので、これが見かけのサービス時間  $t_s'$  となる。

$$t_s' = t_s + t_{ovh} \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $t_s$ : 実際のサービス時間  
 $t_{ovh}$ : オーバヘッド時間

オーバーヘッド時間  $t_{ovh}$  とサービス時間  $t_s$  の期待値の比をオーバーヘッド係数とよび、 $ovh$  で表す。

$$ovh = E(t_{ovh}) / E(t_s)$$

正味のサービス時間  $t_s$  は、到着時間分布と同様に指数分布とする。オーバーヘッド時間  $t_{ovh}$  は一定分布であるが、多重型ではこれが小さいので、計算を簡単にするために指数分布で近似する。

#### 4.3 システム待ち時間

パケット転送要求を出してからサービスが終了して退去までの時間が、見かけの待ち時間  $t_q$  である。この期待値  $E(t_q)$  を性能の目安とする。行列待ち時間を  $t_w$  で示すと、 $t_q$  は  $t_w$  と見かけのサービス時間  $t_s$  の和であるから、(2) 式より

$$E(t_q) = E(t_s) + E(t_w) \\ = E(t_s) + E(t_{ovh}) + E(t_w)$$

以下では、並列型と多重型について  $E(t_q) / E(t_s)$  を計算するが、並列型と多重型の諸量にはそれぞれサフィックス  $p$  と  $m$  を付ける。

並列型では単一サーバで、サービス時間とオーバーヘッド時間の分布が異なるので、 $M/G/1$  モデルとなる。これについて  $E(t_{qp}) / E(t_{sp})$  を計算すると、付録1より次式が得られる。

$$E(t_{qp}) / E(t_{sp}) \\ = [1 + ovh_p] \\ + \rho_p \cdot \{ (1 + ovh_p)^2 + c_{var}^2 \} \\ / \{ 2 \cdot [1 - \rho_p \cdot (1 + ovh_p)] \} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\rho_p = \lambda / \mu_p$   
 $\mu_p = 1 / E(t_{sp})$   
 $ovh_p = E(t_{ovhp}) / E(t_{sp})$   
 $c_{var}$  : サービス時間の変動係数

多重型についてはサーバ数を  $n$ 、サービス時間とオーバーヘッド時間の分布を指数分布としているので、 $M/M/n$  モデルを使うことができる。これについて  $E(t_{qm}) / E(t_{sm})$  を計算すると付録2より次式となる。

$$E(t_{qm}) / E(t_{sm}) \\ = (1 + ovh_m) \\ + P(B) \cdot (1 + ovh_m) \\ / [n - (1 + ovh_m) \cdot \rho_m] \quad \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 $\rho_m = \lambda / \mu_m$   
 $ovh_m = E(t_{ovhm}) / E(t_{sm})$   
 $P(B)$  : 全サーバが稼働中の確率

#### 4.4 待ち行列の過渡現象について

待ち行列解析では、通常複雑さを避けるために、定常解析を行う。しかしながら、解析結果を正しく適用するためには定常状態に達するまでの時間を求めておく必要がある。ここでは過渡解析の手段としてシミュレーションを用いる。

待ち行列のモデルは  $M/M/1$  とする。到着率  $\lambda$  とサービス率  $\mu$  の比  $\lambda / \mu$  (ネットワーク負荷  $\rho$ ) は、時定数に直接効く重要な量である。ここでは負荷がかなり重い場合を想定して、 $\rho = 0.9$  とする。この場合、待ち行列の初期長  $q_{l0}$  を設定する必要があるが、これはネットワークが動作を開始するまでに全ての局のバッファ上に蓄積されたパケットの総数である。転送要求が出た瞬間にパケット転送を開始する場合には  $q_{l0} = 0$  である。この値が定常状態での平均長(この場合は10)に近いほど時定数が短くなる傾向を示すことが知られている<sup>(5)</sup>。 $\rho = 0.9$  では  $q_{l0} = 9$  が最適だが、ここでは余裕をみて  $q_{l0} = 40$  と大きめにとる。

シミュレーションの結果を図7に示す。図から1000単位時間が経過するとほぼ定常と見なせることが分る。

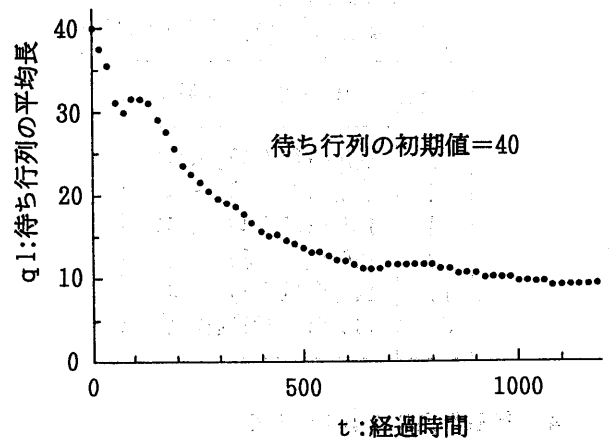


図7 過渡状態における待ち行列長の変化の様子

### 5 並列型と多重型の性能比較

#### 5.1 並列型と多重型の待ち時間比

性能比較の指標としては平均待ち時間  $E(t_q)$  の比を用いる。待ち時間は、多重転送方式について

は  $E(t_{qm})$ 、並列転送方式については  $E(t_{qp})$  である。

システム待ち時間は行列待ち時間とサービス待ち時間の和である。いまオーバーヘッドが無視できるとする。軽負荷時にはシステム待ち時間の大半がサービス待ち時間となるので、並列型の待ち時間は多重型のほぼ  $1/n$  ( $n$ :チャンネル数)となる。すなわち、多重型と並列型との待ち時間の比は

$$E(t_{qm})/E(t_{qp}) > 1$$

となる。しかしながら、ネットワークの負荷  $\rho$  を重くすると行列待ち時間の比率が大きくなり、 $\rho \rightarrow 1$  の極限では両者は等しくなる。

このように、一般的にオーバーヘッドが小さいときには並列型が性能的に優れているといえる。しかしながら、3.2でも述べたように並列型では多重型に比べてオーバーヘッドが大きくなる傾向にある。そこで以下では、待ち時間比と  $\rho$  の関係について考察する。ここで  $\rho$  の範囲は

$$0 < \rho < 1$$

である。

$E(t_{qm})/E(t_{qp})$  と  $\rho$  の関係を図8に示す。これより、待ち時間比がネットワークの負荷  $\rho$  と共に減少し、ある値で1となることが分る。このとき両者の性能が等しくなるので、そのオーバーヘッド係数比  $ovh_p/ovh_m$  を臨界係数比とよび  $ovh_c$  で示すことにする。

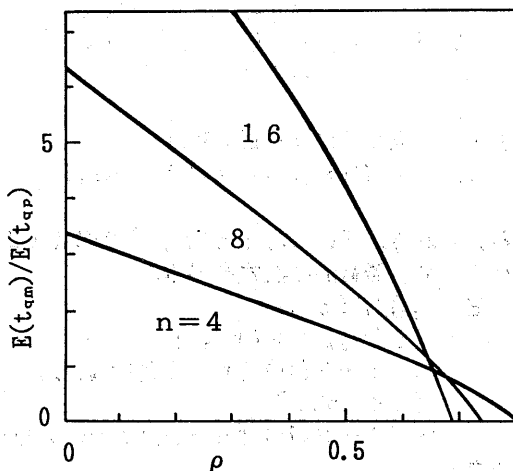


図8 ネットワーク負荷  $\rho$  と待ち時間比  $E(t_{qm})/E(t_{qp})$  の関係.  $n$ :チャンネル数

## 5.2 オーバヘッド係数比の臨界値

臨界オーバーヘッド係数  $ovh_c$  と  $\rho$  の関係を図9に示す。これより、ネットワークの負荷が一定のとき、チャンネル数  $n$  が大きいほど許容オーバーヘッド係数比が大きいることが分る。しかし実際は、表2に示すようにチャンネル数とともにオーバーヘッド係数が大きくなるので、その分裕度が増えるわけではない。

ネットワークの負荷の目安を  $\rho=0.5$  にとると、チャンネル数  $n$  が4のときには  $ovh_c \approx 8$ 、 $n=8$  のときには  $ovh_c \approx 10$ 、また  $n=16$  のときには  $ovh_c \approx 12$  である。

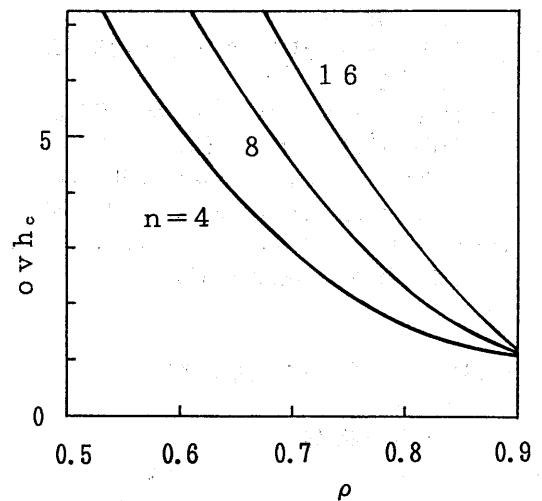


図9 ネットワーク負荷  $\rho$  と臨界オーバーヘッド係数比  $ovh_c$  の関係.  $n$ :チャンネル数

## 6 まとめ

光バスを例にして、並列転送方式と多重転送方式の性能について考察を行った。一般に前者の方が性能的に優れるが、その程度がオーバーヘッドとともにどのように変化するか、またその優位性を保つための許容オーバーヘッドを明らかにした。

ネットワーク負荷  $\rho \approx 0.5$  における並列型の性能は、多重型に対して次のようになる。

- ①チャンネル数 4で約1.7倍
- ②チャンネル数 8で約2.5倍
- ③チャンネル数16で約4.5倍

また、並列型の許容オーバーヘッドは、多重型に比べて

- ①チャンネル数 4で約 8倍

- ②チャンネル数 8で約10倍
- ③チャンネル数16で約12倍

となる。

最後に、本研究の機会を与えて頂いた棟上情報アーキテクチャ部長、ならびにご討論頂いた分散システム研究室の諸氏に感謝致します。

[参考文献]

- (1) Virkam V.Karmarkar and Jon G.Kuhl: IEEE Trans. Comput., Vol.38, No.5, 679(1989)
- (2) 岡田, 田島, 田村, 濱崎: 情報処理23全大, 5D-4(1981)
- (3) 鈴木, 田島, 濱崎, 岡田: 信学総全大, 1672(1987)
- (4) International Standard ISO 9314-3 (FDDI PMD), Sep 11, 1989
- (5) W.David Kelton and Averill M. Law: Oper.Res., Vol.33, No.2, 378(1985)
- (6) L. Kleinrock: "Queueing Systems", Vol.1, John Wiley & Sons (1975)

[付録1] M/G/1 (並列型)

待ち時間の期待値

$$E(t_{qp}) = E(t_{wp}) + E(t_{sp}) \quad \dots\dots\dots (a1)$$

の第2項はポラツェック・ヒンチンの公式により

$$E(t_{wp}) = \lambda [E(t_{sp})]^2 \times \{1 + \text{VAR}(t_{sp}) / [E(t_{sp})]^2\} / \{2 [1 - \lambda E(t_{sp})]\}$$

で与えられる<sup>(6)</sup>。ここで、 $t_{sp}$ の期待値は

$$E(t_{sp}) = E(t_{sp}) + E(t_{ovhp}) = E(t_{sp}) [1 + \text{ovh}_p] = (1/\mu_p) [1 + \text{ovh}_p]$$

ただし、 $\text{ovh}_p = E(t_{ovhp}) / E(t_{sp})$   
 $\mu_p = 1 / E(t_{sp})$

となる。また、正味のサービス時間とオーバーヘッド時間は独立で、一定分布の分散は0となるから  
 $\text{VAR}(t_{sp}) = \text{VAR}(t_{sp}) + \text{VAR}(t_{ovhp}) = \text{VAR}(t_{sp})$

正味のサービス時間の変動係数を  $C_{var}$  で示すと  
 $C_{var}^2 = \text{VAR}(t_{sp}) / E^2(t_{sp})$

これらを (a1) 式に代入して、次式を得る。

$$E(t_{qp}) / E(t_{sp}) = [1 + \text{ovh}_p] + \rho_p \times \{(1 + \text{ovh}_p)^2 + C_{var}^2\} / \{2 [1 - \rho_p \times (1 + \text{ovh}_p)]\}$$

ただし、

$$\rho_p = \lambda / \mu_p$$

$$\mu_p = 1 / E(t_{sp})$$

$$\text{ovh}_p = E(t_{ovhp}) / E(t_{sp})$$

$C_{var}$ : 正味のサービス時間の変動係数

[付録2] M/M/n (多重型)

待ち時間の期待値

$$E(t_{qm}) = E(t_{sm}) + E(t_{wm}) \quad \dots\dots\dots (a2)$$

の第2項は次式で与えられる<sup>(6)</sup>。

$$E(t_{wm}) = P(B) E(t_{sm}) / \{n - \lambda E(t_{sm})\}$$

$P(B)$ : すべての窓口が稼働中である確率  
 $= \sum_n [\lambda E(t_{sm})]^n / k! - \sum_{n-1} [\lambda E(t_{sm})]^n / k! / \{\sum_n [\lambda E(t_{sm})]^n / k! - (\lambda E(t_{sm})/m) \cdot \sum_{n-1} [\lambda E(t_{sm})]^n / k!\}$

ただし、 $\sum_n$ :  $k=0 \sim n$ までの和を表す

また、見かけのサービス時間  $t_{sm}$  は次式となる。

$$E(t_{sm}) = E(t_{sm}) + E(t_{ovhm}) = E(t_{sm}) [1 + \text{ovh}_m] = (1/\mu_m) [1 + \text{ovh}_m]$$

ただし、 $\text{ovh}_m = E(t_{ovhm}) / E(t_{sm})$   
 $\mu_m = 1 / E(t_{sm})$

上式より、見かけのサービス率は

$$\mu_m = 1 / E(t_{sm}) = \mu_m / (1 + \text{ovh}_m)$$

で与えられる。 $E(t_{wm})$ と $E(t_{sm})$ を式(a2)に代入して、最終的に次式を得る。

$$E(t_{qm}) / E(t_{sm}) = [E(t_{sm}) / E(t_{sm})] \times \{1 + P(B) / [n - \lambda E(t_{sm})]\} = [1 + \text{ovh}_m] \times \{1 + P(B) / [n - \rho_m (1 + \text{ovh}_m)]\}$$

ただし、

$$\rho_m = \lambda / \mu_m$$

$$\text{ovh}_m = E(t_{ovhm}) / E(t_{sm})$$

$P(B)$ : すべての窓口が稼働中である確率