計算機アーキテクチャ　98－6
設　計　自　動　化　65－6
(1993. 1. 21)

論理関数のＬＰ特徴ベクトルとその ＡＮＤ－ＥＸＯＲ論理式簡単化への応用

神田　徳夫
徳山工業高等専門学校
情報電子工学科
〒745　徳山市久米高城3538

笹尾　勤
九州工業大学情報工学部
電子情報工学科
〒820　飯塚市大字川津680-4

あらまし　本論文は，与えられた関数のＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式（ＭＥＳＯＰ）を求める方法について述べている．まず，ＭＥＳＯＰを効率良く求めるために，ＬＰ同値関係を導入する．次に，論理関数のＬＰ特徴ベクトルを定義し，これが$n \leqq 5$の場合，ＬＰ同値関係のinvariantであることを示す．次に，ＬＰ特徴ベクトルを用いて，与えられた関数のＬＰ同値類の代表元を高速に決定する方法を示す．次に，これらの性質を用いたＥＳＯＰの最小化アルゴリズムを示す．５変数関数をＥＳＯＰと，ＳＯＰ（ＡＮＤ－ＯＲ二段論理式）で実現する際に必要な積項数を比較した結果，ＥＳＯＰの方が平均すると，ＳＯＰより少ない積項数で実現出来ることが明らかになった．５変数関数のＭＥＳＯＰは６変数以上の関数の簡単化に有用である．

和文キーワード　組み合わせ論理回路　排他的論理和　論理式簡単化　同値類

LP characteristic Vector of Logic Functions and its Application to the Minimization of AND-EXOR Expressions

Norio KODA
Department of Computer Science
and Electronic Engineering
Tokuyama College of Technology
Tokuyama 745, Japan

Tsutomu SASAO
Faculty of Computer
and Systems Engineering
Kyushu Institute of Technology
Iizuka 820, Japan

Abstract　This paper presents a method to obtain a minimum AND-EXOR expression(MESOP) of a given function of 5 variables. First, we introduce LP-equivalence relation, which is useful for the minimization of ESOPs. Next, the LP-characteristic vector, which is useful for the decision of the LP-equivalence class of a given function, is introduced. Next, an algorithm to obtain a MESOP of a given function is given. We compared the number of products in ESOPs and Sum-Of-Products expressions(SOPs) for the randomly generated functions of 5 variables. On the average, ESOPs require fewer products than SOPs. 5-variable MESOPs are useful for the simplification of ESOPs with six or more variables.

英文 key words　combinational circuit, Exclusive-Or sum-of-products, logic minimization, Equivalence class

1．まえがき

ＬＳＩが複雑になるにつれて，論理回路を人手で設計することが極めて困難となっており，論理回路の設計を自動的に行うシステム（論理自動合成システム）が必須となっている．現在使用されている論理自動合成システムは，AND,OR及びNOTを基本論理素子とした設計に基づいて開発されている．しかし，算術演算回路や誤り訂正回路などでは，AND,OR,NOTのみで構成するよりも，EXORゲートを併用するとゲート数を大幅に削減できる．そのため，これらの回路を自動合成するには，AND, OR, NOTの他にEXORを効果的に活用した論理回路の設計法を確立する必要がある．

EXORゲートを用いた論理式の表現法は種々提案されているが[1],[2],[11],[12],[16]，ESOP論理式が最も一般的な表現であり，最も少ない積項数で実現できる[13]．しかし，ESOPの最小化問題はきわめて困難である．入力変数の個数が少ない場合は網羅的あるいはそれに近い方法により最小解が得られるが[5],[10]，一般には最小化は困難であり，発見的方法によって簡単化を行う[4],[14]．また，与えられた関数の最小ESOPの積項数の下界を評価した簡単化法が提案されている[6],[8]．

さて，ESOPの簡単化の過程で，与えられたESOPをある変数で展開すると，より少ない変数の部分関数のESOPが得られる．この部分関数のESOPの最小解が得られているならば，これらを利用することにより，効率のよい簡単化が可能となる．現在まで，４変数以下の関数の最小ESOPが網羅的方法によって得られている[5]．しかし，５変数以上の関数の場合，考慮すべき組合せの数が非常に多いので，網羅的方法によって最小解を得ることは困難である．

任意のｎ変数関数の最小ESOPを求めるとき，関数をＬＰ同値類に分類すると，対象とすべき関数の個数を大幅に削減できる[1],[15]．筆者らは，先に５変数関数のＬＰ同値類代表関数を与えた[7]．本論文は，与えられた関数の最小ESOPを効率よく得るための方法について検討している．まず，ＬＰ同値関係の性質を用いてＬＰ同値類代表関数の最小ESOPを効率よく求める方法を示す．次に，ＬＰ特徴ベクトルを定義し，それがｎ変数関数（$n \leqq 5$）のinvariantであることを示している．ＬＰ同値類代表関数の最小ESOPをESOPの最小化あるいは簡単化プログラムで利用するためには，与えられた関数がどの同値類に属するかを高速に判定する必要がある．この操作を代表関数の定義に基づいて素直に行うと，ｎ変数の場合，$n!6^n$に比例する手数が必要であり，時間がかかる．しかし，ＬＰ特徴ベクトルを用いると，この操作を$O(n3^n)$で実行できる．

本方法を５変数関数に適用し，任意の５変数関数の最小ESOPが高速に得られることを示す．また，任意の５変数関数を最小ESOPとAND-OR二段論理式で実現した場合，ESOPの方が，平均するとより少ない積項数で実現できることを示す．

本稿の方法により，５変数関数の最小ESOPが高速に得られる．５変数関数の最小ESOPは６変数以上の関数の簡単化に利用出来る．

2．定義

本章では，諸定義及びＬＰ同値関係について述べる．

［定義１］xと$\bar{x}$を変数xのリテラルという．

［定義２］$S_i \subseteq \{0,1\}$，$S_i \neq \phi$ $(i=1,2,\cdots,n)$のとき，

$T=x_1^{S_1} x_2^{S_2} \cdots x_n^{S_n}$ を積項という．ここで，

$x_i^{\{0\}}=\bar{x}_i$，$x_i^{\{1\}}=x_i$，$x_i^{\{0,1\}}=1$，$x_i^{\phi}=0$ である．

$x_i^{\{0\}}=x_i^0$，$x_i^{\{1\}}=x_i^1$，$x_i^{\{0,1\}}=x_i^2$ と略記することがある．

［定義３］積項をORで結合した式をAND-OR形論理和形（SOP）という．また，積項をEXORで結合した式をAND-EXOR形論理和形（ESOP）という．

［定義４］関数fを表現する積項数最小のSOPをfの最小SOP（MSOP）という．また，関数fを表現する積項数最小のESOPをfの最小ESOP（MESOP）という．

［定義５］ESOP論理式Fの積項数を$\tau(F)$，fのMESOPの積項数を$\tau(f)$で表す．

［定義６］ｎ変数関数のMESOPの積項数の最大値を$\Psi(n)$で表す．

［定義７］ｎ変数論理関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ を最小項展開し，$f=p_\eta \cdot x_1 x_2 \cdots x_n \vee p_{\eta-1} \cdot x_1 x_2 \cdots \bar{x}_n \vee \cdots \vee p_0 \cdot \bar{x}_1 \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_n$ その係数の列$p_\eta p_{\eta-1} \cdots p_0$を$2^n$ビット２進数とみたとき，これを論理関数fの２進表現という．また，２進表現を16進に変換したものを論理関数fの16進表現という．ここで，$\eta=2^n-1$ である．

［補題１］[15]論理関数fを$f=\bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1$と展開したとき，部分関数の組［$f_0, f_1$］を２次正則行列Mによって［$g_0, g_1$］に変換する．$g=\bar{x}_i g_0 \oplus x_i g_1$とおく．このとき，fを表現する任意のESOPをFとし，Fの変数x_iのリテラルをMで変換して得られるESOPをGとすると，Gは関数gを表現する．

［定理１］[15]関数fを$f=\bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1$と展開したとき，部分関数の組$[f_0, f_1]$を２次正則行列Ｍによって［$g_0$, g_1］に変換する．$g=\bar{x}_i g_0 \oplus x_i g_1$ とするとき，$\tau(f)=\tau(g)$が成立する．

［定義8］２値論理関数において次の条件を満足する関係 ～ をＬＰ同値関係[7]という．

(i) $f \sim f$.

(ii) $f_1=f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots)$,

$f_2=f(\cdots, x_j, \cdots, x_i, \cdots)$

ならば $f_1 \sim f_2$ （入力変数の置換）．

(iii) $f=f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$において変数$x_i$について

$f=\bar{x}_i f_0 \oplus x_i f_1$ と展開したとき，部分関数の組 $[f_0, f_1]$ を2次正則行列によって $[g_0, g_1]$ に変換する．$g=\bar{x}_i g_0 \oplus x_i g_1$ とするとき，$g \sim f$.

［定義9］関数fとＬＰ同値な関数のうち，その2進表現の値が最小の関数をＬＰ同値類の代表関数といい，$lp(f)$で表す．

［定義10］ｎ変数ＬＰ同値類の代表関数の集合を$LP(n)$で表す．また，MESOPの積項数がtのｎ変数代表関数の集合を$LP(n,t)$で表す．

［定義11］ESOP Fの表現する関数を$r(F)$で表す．

［定義12］論理関数fを表現するMESOPを$Fm(f)$で表す．

［定義13］$LP(n,t)$の各関数を表現するMESOPの集合を$M(n,t)$で表す．$M(n,t)=\{Fm(f)\mid f\in LP(n,t)\}$と表せる．

［定義14］ｎ変数の全ての積項の集合を$PT(n)$で表す．

3．ＬＰ同値類代表関数のＭＥＳＯＰ

本章では，ＬＰ同値類代表関数のＭＥＳＯＰを効率よく求める方法について検討する．

［補題2］関数fのＭＥＳＯＰをFとする．Fの積項の1つをpとし，Fからpを除いて得られるESOPをGとすると，GはＭＥＳＯＰである．

（証明）$\tau(F)=t$とする．GがＭＥＳＯＰではないと仮定する．このとき，Gは簡単化可能である．Gを簡単化したESOPをG'とすると，$\tau(G')\leqq t-2$ である．$H=G'\oplus p$ とすると，$\tau(H)\leqq t-1$ が成立する．しかし，Hは関数fを表現するので，fは積項数が高々t-1のESOPで表現できたことになる．これはFがMESOPであるという仮定に反する．これより補題を得る．（証明終）

［補題3］Fを積項数tのMESOPとし，pを積項とする．$G=F\oplus p$，$g=r(G)$とするとき，$t-1\leqq\tau(g)\leqq t+1$ が成立する．

（証明）(i)題意より，$\tau(g)\leqq t+1$ は明らかである．

(ii)$\tau(g)\leqq t-2$ であると仮定する．GのMESOPをG'とすると，仮定より，$\tau(G')\leqq t-2$ である．次に，ESOP $H=G'\oplus p$ を考えると，

$$\tau(H)\leqq t-1 \tag{1}$$

が成立する．HはFと同じ関数を表現し，FはMESOPなので，

$$\tau(H)\geqq t \tag{2}$$

が成立する．(1)と(2)は矛盾する．これより，

$\tau(g)\geqq t-1$ である．

(i)，(ii)より，補題が成立する．（証明終）

［補題4］$H=\{F\oplus q\mid F\in M(n,t), q\in PT(n)\}$，$R=\{lp(f)\mid f=r(F), F\in H\}$ とするとき，$LP(n,t+1)\subseteq R$ が成立する．

（証明）$g\in LP(n,t+1)$とし，gを表現するＭＥＳＯＰをGとする．Gの積項の1つをpとし，Gから積項pを除いたESOPをKとすると，$G=K\oplus p$と表せる．このとき，補題2より，KはMESOPである．Kの表現する関数をkとし，kから$lp(k)$を得る手順をαとする．Kに変換αを施して得られるESOPをK'，pに変換αを施して得られる積項をp'とすると，$K'\in M(n,t)$，$p'\in PT(n)$である．$G'=K'\oplus P'$とすると，明らかに$G'\in H$である．G'の表現する関数をg'とすると，g'にαの逆変換を施すことにより，代表関数gが得られる．これより，$g\in R$となり，補題を得る．（証明終）

3.1 M(n,t)を求めるアルゴリズム

前節で議論したＭＥＳＯＰの性質を用いて，ＬＰ同値類代表関数のＭＥＳＯＰを求める方法を示す．

アルゴリズム3.1　(M(n,t)の計算)

$LP(n)$および$M(n,1)$は既知とする．

1) $t\leftarrow 1$とする．

2) $M(n,t)$の各MESOPに1つの積項をＥＸＯＲして得られるESOPの集合を生成する．

3) 2)の各ESOPの表現する関数のＬＰ同値類代表関数の集合を求める．

4) 3)で得られた代表関数の集合に集合 $\{LP(n,s)\mid s\leqq t\}$の要素が含まれていれば，これを削除する．

5) 得られた代表関数の集合が$LP(n,t+1)$である．代表関数の得られたESOPから，$M(n,t+1)$を得る．

6) 全ての代表関数のＭＥＳＯＰが求まればアルゴリズムを終了する．

7) $t\leftarrow t+1$として2)へ行く．

<アルゴリズムの説明>

1)$M(n,1)$はn変数の積項を表し，全部で3^n個存在する．

2)補題4より，$M(n,t+1)$は，$M(n,t)$に全ての1積項をEXORしたESOPを考慮すれば充分である．

4)補題3より，2)で得られたESOPは，MESOPではないことがあるので，これを除去する．

アルゴリズム3.1を用いて$M(n,t)$を求めるときに考慮すべき組合せの個数の上界は，$m=U_n\cdot 3^n\cdot\Psi(n)$ となる．ここで，$U_n=|LP(n)|$である．

$U_n\approx 2^{2^n}/(n!\cdot 6^n)$，$\Psi(n)\leqq 2^{n-2}(n\geqq 6)$であるので[7]，$m\leqq 2^{2^n-2}/n!\ (n\geqq 6)$と表せる．

$n=5$のとき，$U_n=6936$，$\Psi(5)\leqq 9$であるので[7]，$m\leqq 1.5\times 10^7$ となる．一方，網羅的方法による場合に考慮すべき積項の組合せの数は

$s=\sum_{k=1}^{\Psi(n)} {}_{3^n}C_k$ である．$n=5$のとき，$s\approx 7\times 10^{15}$となる．本方法による方が組合せの数が少ない．

4．ＬＰ特徴ベクトルとその応用

本章では，与えられた関数のＬＰ同値類を能率良く決定する方法について検討する．

4.1　ＬＰ特徴ベクトルの性質

［定理2］（展開定理）任意のｎ変数論理関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$は変数x_iについて

$$f=\ f_0\oplus x_i f_2 \tag{3}$$

$$f=\bar{x}_i f_2\oplus\ f_1 \tag{4}$$

$$f=\bar{x}_i f_0\oplus x_i f_1 \tag{5}$$

の形で展開可能である．ここで，$f_0=f(x_i=0)$，$f_1=f(x_i=1)$，$f_2=f_0\oplus f_1$ である．

（証明）(5)式はシャノン展開式である．(5)に $\bar{x}_i=1\oplus x_i$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
f&=(1\oplus x_i)f_0\oplus x_i f_1\\
&=f_0\oplus x_i(f_0\oplus f_1)\\
&=f_0\oplus x_i f_2
\end{aligned}
$$

が得られる．また，(5)式に $x_i=1\oplus\bar{x}_i$ を代入すると，

$$
\begin{aligned}
f&=\bar{x}_i f_0\oplus(1\oplus\bar{x}_i)f_1\\
&=\bar{x}_i(f_0\oplus f_1)\oplus f_1\\
&=\bar{x}_i f_2\oplus f_1
\end{aligned}
$$

が得られる．これより，定理を得る．（証明終）

[定義15]与えられた関数を論理式で表現するとき，定理２における式(3)，式(4)，式(5)による展開をそれぞれ，展開０，展開１，展開２と呼ぶ．

[定義16] n 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ をベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$a_i\in\{0,1,2\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ で展開するとは，変数 x_i に対して，

$a_i=0$ のとき，展開０，

$a_i=1$ のとき，展開１，

$a_i=2$ のとき，展開２，$(i=1,2,\cdots,n)$

の方法で展開することを示す．このとき，ベクトル $\mathbf{a}$ を<u>展開ベクトル</u>という．

[補題５] n 変数関数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ を展開ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ で展開したとき，出現可能な積項の集合は，

$\{x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n} \mid b\in\{0,1,2\}, b_i\neq a_i\ (i=1,2,\cdots,n)\}$

である．

（証明）定義16より明らかである．（証明終）

定理２より，n 変数関数 f を展開するとき，一つの変数で展開すると３個の部分関数が得られる．これを n 回繰り返すと 3^n 個の係数が得られる．

[定義17] n 変数論理関数を $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ とする．

このとき，次のような 3^n 個の要素からなる表ＥＴＴ(f)を<u>拡張真理値表</u>(Extended Truth Table)という．また，ＥＴＴ(f)の要素の添字アドレスを表す３進 n 項ベクトルを，<u>添字ベクトル</u>といい，$\mathbf{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$c_i\in\{0,1,2\}$ $(i=1,2,\cdots,n)$ で表す．f を展開ベクトル $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ で展開したときに出現する積項 $x_1^{b_1}x_2^{b_2}\cdots x_n^{b_n}$ の係数は，ＥＴＴ$(f)_{\mathbf{c}}$ に格納される．ここで，c_i は，a_i, b_i に対して表１のように定める．

表１　a_i，b_i，c_i の関係

a_i	b_i	c_i
0	1	2
0	2	0
1	0	2
1	2	1
2	0	0
2	1	1

[例題１] ２変数関数 $f(x_1,x_2)$ の真理値表は一般に表２のように表される．

表２　２変数関数の真理値表

x_1	x_2	f
0	0	f_0
0	1	f_1
1	0	f_2
1	1	f_3

f の展開ベクトル $\mathbf{a}$ による展開は次のようになる．

$\mathbf{a}=(2,2)$ のとき

$f=f_0\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus f_1\bar{x}_1x_2\oplus f_2x_1\bar{x}_2\oplus f_3x_1x_2$

$\mathbf{a}=(2,1)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1)\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_2\oplus f_3)x_1\bar{x}_2\oplus f_1\bar{x}_1\oplus f_3x_1$

$\mathbf{a}=(2,0)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1)\bar{x}_1x_2\oplus(f_2\oplus f_3)x_1x_2\oplus f_0\bar{x}_1\oplus f_2x_1$

$\mathbf{a}=(1,2)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_2)\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_1\oplus f_3)\bar{x}_1x_2\oplus f_2\bar{x}_2\oplus f_3x_2$

$\mathbf{a}=(1,1)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)\bar{x}_1\bar{x}_2\oplus(f_1\oplus f_3)\bar{x}_1\oplus(f_2\oplus f_3)\bar{x}_2\oplus f_3$

$\mathbf{a}=(1,0)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)\bar{x}_1x_2\oplus(f_1\oplus f_2)\bar{x}_1\oplus(f_2\oplus f_3)x_2\oplus f_2$

$\mathbf{a}=(0,2)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_2)x_1\bar{x}_2\oplus(f_1\oplus f_3)x_1x_2\oplus f_0\bar{x}_2\oplus f_1x_2$

$\mathbf{a}=(0,1)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)x_1\bar{x}_2\oplus(f_1\oplus f_3)x_1\oplus(f_0\oplus f_1)\bar{x}_2\oplus f_1$

$\mathbf{a}=(0,0)$ のとき

$f=(f_0\oplus f_1\oplus f_2\oplus f_3)x_1x_2\oplus(f_0\oplus f_2)x_1\oplus(f_0\oplus f_1)x_2\oplus f_0$

これより，ＥＴＴ(f)は表３のようになる．

例えば，**a**=(0,1)のとき，積項$x_1^1 x_2^2$の係数($f_1 \oplus f_3$)は，表1のa_i, b_i, c_iの関係により，**c**=(2,1)に格納される．

表3　2変数関数の拡張真理値表

c	ETT(f)
00	f_0
01	f_1
02	$f_0 \oplus f_1$
10	f_2
11	f_3
12	$f_2 \oplus f_3$
20	$f_0 \oplus f_2$
21	$f_1 \oplus f_3$
22	$f_0 \oplus f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$

（例題終）

拡張真理値表を求める具体的方法はアルゴリズム4.2.1で示す．

[定義18]n変数関数fを展開ベクトル**a**で展開したときの積項数を$w(f, \mathbf{a})$で表す．ここで，$0 \leq w \leq 2^n$．

[定義19]n変数論理関数を$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$とする．このとき，次のような3^n個の要素からなる表EWT(f)を，拡張重み表(Extended Weight Table)という．ここで，EWT(f)の要素の添字を表すベクトルを$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$a_i \in \{0, 1, 2\}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$とすると，$EWT(f)_{\mathbf{a}} = w(f, \mathbf{a})$である．ここで，$EWT(f)_{\mathbf{a}}$は，EWT(f)の**a**番目の要素を示す．

[例題2]表2において，$f_0=1$，$f_1=0$，$f_2=1$，$f_3=0$のときの拡張重み表を表4に示す．例えば，**a**=(2,0)のとき，例題1より，積項数=4であるから，EWT(f)の(2,0)番目の要素の値は4となる．

表4　2変数関数の拡張重み表

c	EWV(f)
00	2
01	1
02	1
10	2
11	1
12	1
20	4
21	2
22	2

（例題終）

拡張重み表を求める具体的方法はアルゴリズム4.2.2で示す．

[定義20]n変数論理関数をfとする．EWT(f)を昇順にソートしたものを，fのLP特徴ベクトル(LP characteristic vector)といい，LPV(f)で表す．

[補題6]n変数論理関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$において，変数$\bar{x}_i$と$x_i$を交換して得られる関数をgとする．このとき，LPV(f)＝LPV(g)が成立する．

（証明）$f=\bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$，$g=x_i f_{i0} \oplus \bar{x}_i f_{i1}$ $=\bar{x}_i g_{i0} \oplus x_i g_{i1}$ と表現できる．これより，$g_{i0}=f_{i1}$，$g_{i1}=f_{i0}$，$g_{i2}=f_{i2}=f_{i0} \oplus f_{i1}$ を得る．つまり，gはfの展開において展開0と展開1を置換した関数である．

従って，$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$，

$\mathbf{b}=(a_1, a_2, \cdots, b_i, \cdots, a_n)$，

$$b_i = \begin{cases} 1-a_i & (a_i=0,\ 1\text{のとき}) \\ a_i & (a_i=2\text{のとき}) \end{cases}$$

とおくと，$w(f, \mathbf{a})=w(g, \mathbf{b})$ を得る．これより，EWT(f)の要素を置換したものがEWT(g)であることがわかる．これより，補題を得る．（証明終）

[補題7]n変数論理関数を$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$とする．fを表現するESOPにおいて，リテラル$\bar{x}_i$と1を交換して得られるESOPが表現する関数をgとする．このとき，LPV(f)＝LPV(g)　が成立する．

（証明）$f=\bar{x}_i f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$，$g=1 \cdot f_{i0} \oplus x_i f_{i1}$ $=\bar{x}_i g_{i0} \oplus x_i g_{i1}$ と表現できる．これより，$g_{i0}=f_{i0}$，$g_{i2}=f_{i1}$，$g_{i1}=f_{i2}$ を得る．つまり，gはfの展開において展開0と展開2を置換した関数である．

従って，$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_i, \cdots, a_n)$，

$\mathbf{b}=(a_1, a_2, \cdots, b_i, \cdots, a_n)$，

$$b_i = \begin{cases} 2-a_i & (a_i=0\text{または}2\text{のとき}) \\ a_i & (a_i=1\text{のとき}) \end{cases}$$

とおくと，$w(f, \mathbf{a})=w(g, \mathbf{b})$ を得る．これより，EWT(f)の要素を置換したものがEWT(g)であることがわかる．これより，補題を得る．（証明終）

[補題8]n変数論理関数を$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$とする．fを表現するESOPにおいて，リテラルx_iと1を交換して得られるESOPが表現する関数をgとする．このとき，LPV(f)＝LPV(g)　が成立する．

（証明）補題7と同様にして証明できる．（証明終）

[補題9]n変数関数$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$において，変数x_iとx_jを置換して得られる関数をgとする．このとき，LPV(f)=LPV(g)が成立する．

（証明）fを展開ベクトル$\mathbf{a}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$で展開した式をF，Fにおいて，$x_i$と$x_j$を置換して得られる式をGとすると，Gは関数gを表現する．このとき，

$\tau(F)=\tau(G)$が成立する．従って，
$\mathbf{a}=(\cdots,a_i,\cdots,a_j,\cdots)$，$\mathbf{b}=(\cdots,a_j,\cdots,a_i,\cdots)$
とすると，

$$w(g,\mathbf{a})=w(f,\mathbf{b}) \tag{6}$$

を得る．(6)は全ての$\mathbf{a}$について成立するので，
$EWT(g)_{\mathbf{a}}=EWT(f)_{\mathbf{b}}$ が成立する．これより，
補題を得る．（証明終）

［補題10］ $f\sim g \rightarrow LPV(f)=LPV(g)$.
（証明）補題６～９により，リテラルの変換，及び，変数の置換によって，ＬＰ特徴ベクトルは変化しない．これより，補題が成立する．（証明終）

［補題11］ $LPV(f)=LPV(g) \rightarrow f\sim g \quad (n\leqq 5)$.
（証明）$f\nsim g \rightarrow LPV(f)\neq LPV(g)$を証明する．５変数以下のＬＰ同値類代表関数のＬＰＶを計算機によって求め，これらが全て異なることを確認した．これより，補題を得る．（証明終）

［定理４］５変数以下の論理関数に対して，
$f\sim g \rightleftarrows LPV(f)=LPV(g)$.
（証明）補題10，補題11より，定理を得る．（証明終）

定理４より，ＬＰ特徴ベクトルは，$n\leqq 5$の場合，ＬＰ同値関係のinvariant[3]となる．従って，与えられた関数のＬＰ特徴ベクトルを求めることにより，与えられた関数の属するＬＰ同値類を決定できる．

4.2 ＬＰ特徴ベクトルの求め方

与えられた関数のＬＰ特徴ベクトルを求める手順は，
1)与えられた関数の真理値表より，拡張真理値表を得る．
2)拡張真理値表より，拡張重み表を得る．
3)拡張重み表を昇順にソートして，ＬＰ特徴ベクトルを得る．
である．

ｎ変数関数の真理値表をf，拡張真理値表をE_f，拡張重み表をW_fとする．fの要素を表す添字はnビットベクトル，E_f及びW_fの要素を表す添字はn桁の3進ベクトルで表現できる．

アルゴリズム 4.2.1 （拡張真理値表）

1)添字ベクトルの要素が0または1のとき：

$$E_f(a_1,a_2,\cdots,a_n) \leftarrow f(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

ここで，$a_k\in\{0,1\}\ (k=1,2,\cdots,n)$である．

2)添字ベクトルの要素の１個のみが2であるとき：
例えば，i番目が2であるとすると，

$$E_f(a_1,\cdots,2,\cdots,a_n) \leftarrow E_f(a_1,\cdots,0,\cdots,a_n)\oplus E_f(a_1,\cdots,1,\cdots,a_n)$$

ここで，$a_k=\{0,1\}\ (k=1,2,\cdots,n,k\neq i)$，$\oplus$は，ビット毎の排他的論理和である．

3)添字ベクトルの要素のうち，2個が2であるとき：
たとえば，i番目とj番目が2であるとすると，

$$\begin{aligned}&E_f(a_1,\cdots,\underset{i}{2},\cdots,\underset{j}{2},\cdots,a_n)\\ &\leftarrow E_f(a_1,\cdots,\underset{i}{0},\cdots,\underset{j}{2},\cdots,a_n)\\ &\quad\oplus E_f(a_1,\cdots,\underset{i}{1},\cdots,\underset{j}{2},\cdots,a_n)\end{aligned}$$

ここで，$a=\{0,1\}\ (k=1,2,\cdots,n,k\neq i,k\neq j)$である．
4)添字ベクトルの要素の値が2となる個数が3以上の場合についても，3)と同様にする．

アルゴリズム 4.2.2 （拡張重み表）

```
for i=0 to 3^n do
  {if(E_f(i)=0) then W_f(i)←0 else W_f(i)←1}
for k=1 to n do {
  for j=0 to 3^(k-1)-1 do {
    for i=0 to 3^(n-k)-1 do {
        i_0←3^(n-k)(3j+0)+i;
        i_1←3^(n-k)(3j+1)+i;
        i_2←3^(n-k)(3j+2)+i;
        w_1(i_0)←W_f(i_0)+W_f(i_2);
        w_1(i_1)←W_f(i_1)+W_f(i_2);
        w_1(i_2)←W_f(i_0)+W_f(i_1);
    }
    for i=0 to 3^n do {W_f(i)←w_1(i)}
  }
}
```

以上より，各テーブルを求める手数は以下のようになる．

[補題12]拡張真理値表を求める手数は，$O(3^n)$である．
(証明)アルゴリズム4.2.1より明らかである．（証明終）

[補題13]拡張重み表を求める手数は，$O(n3^n)$である．
(証明)アルゴリズム4.2.2より明らかである．（証明終）

[定理５]ＬＰ特徴ベクトルを求める手数は，$O(n3^n)$である．
（証明）ＬＰ特徴ベクトルは，拡張重み表を昇順にソートして得られる．これより，定理を得る．（証明終）

与えられた関数がどの同値類に属するかを判定するには，ＬＰ同値関係の定義に基づいて素直に行うと，$n!6^n$に比例する手数が必要であるが，ＬＰ特徴ベクトルを用いると$n3^n$に比例する手数で決定できる．

4.3 関数のMESOPを求めるアルゴリズム

ｎ変数関数のＬＰ同値類代表関数のＭＥＳＯＰが与えられている場合，前節で議論した性質を用いると，与えられたｎ変数関数のＭＥＳＯＰを効率よく求める方法が得られる．

アルゴリズム4.3　(MESOPの求め方)

1)与えられた関数fの特徴ベクトルLPV(f)を求める.

2)LPV(f)を用いて, fの属するLP同値類を決定する.

3)2)で求めた同値類の代表関数のMESOPの積項数τ(f)をn変数代表関数のMESOP表より得る[7].

4)fをEXMIN2[18]で簡単化する. 簡単化結果のESOPの積項数texmin(f)を得る.

5)τ(f)=texmin(f) ならばEXMIN2で簡単化した結果は最小解である. τ(f)<texmin(f) ならば代表関数のMESOPを逆変換して最小解を得る.

<アルゴリズムの説明>

1)定理4より, 5変数以下の関数に対して, LP特徴ベクトルはLP同値類に1対1に対応している.

3)与えられた関数のMESOPの積項数を得る.

5)EXMIN2は, ヒューリスティックなアルゴリズムに基づくESOPの簡単化プログラムであり, 高速に簡単化できるが, 簡単化結果の最小性は保証できない. EXMIN2の簡単化結果の積項数が3.で求めた積項数と一致すれば, 最小解が得られたことになる. 一致しないときは, 最小解ではないので, 代表関数のMESOPを逆変換して与えられた関数のMESOPを得る.

5. 実験結果及び検討

現在迄, 5変数以下のLP同値類代表関数とそのESOPの表が得られている[7]. そこで, アルゴリズム3.1を用いて, 5変数関数のLP同値類代表関数のMESOPを求め, MESOPの積項数とそれによって実現出来る関数の個数を調べた結果, 文献7の表5と一致した. これより, 文献7の表5のESOPは, すべて最小解であることが証明できた. また, 乱数を用いて発生した5変数関数のESOPをアルゴリズム4.3を用いて最小化した際, EXMIN2の簡単化結果がMESOPとなるときの処理時間は, 約90ミリ秒/関数であるが, EXMIN2の簡単化によりMESOPが得られないで, 代表関数のMESOPを逆変換してMESOPを求めるときの処理時間は約7秒/関数となった(HP9000/720による). 平均すると, LP特徴ベクトルを用いることにより, 与えられた5変数関数のMESOPが高速に得られるといえる.

従来から, 任意の論理関数を表現するときに必要な積項数は, 平均すると, ESOPの方がSOPよりも少なくてよいと推測されている. このことを5変数関数について実証するために, 任意の5変数関数をMESOP及びMSOPで表現するための積項数およびその平均値を検討した. 5変数関数をLP同値類に分類すると考慮すべき関数の個数が少なくてよい. しかし, LP同値関係によって分類したとき, 同一の同値類に属する関数のMESOPの積項数は同一であるが, MSOPの積項数は一般に異なる. 従って, 論理関数をMESOP及びMSOPで表現するために必要な積項数の比較はLP同値関係を用いて検討することはできない. さて, n変数関数は最小項の個数により2^n+1個のクラスに分けることができる. そこで, 乱数を用いて各クラスについて1000個の5変数関数を発生し, これらをMESOP及びMSOPで表現したときの積項数の平均を求めたものを図1に示す. MSOPはQuine-McCluskey法を用いて求めた. これより, 任意の5変数関数を表現するために必要なMESOPの積項数は平均するとMSOPよりも少ないといえる. また, 任意の5変数関数を実現するために必要な積項数はMESOPの場合は9[7], MSOPの場合は16であることが知られている. このことより, 上記の推測が5変数関数の場合に成立するといえる.

なお, アルゴリズム3.1を6変数関数に適用する場合, LP(6)を求める必要がある. しかし, |LP(6)|≧5.5×10^{11}となり非常に大きいので[7], 本アルゴリズムを6変数関数に適用することは困難である.

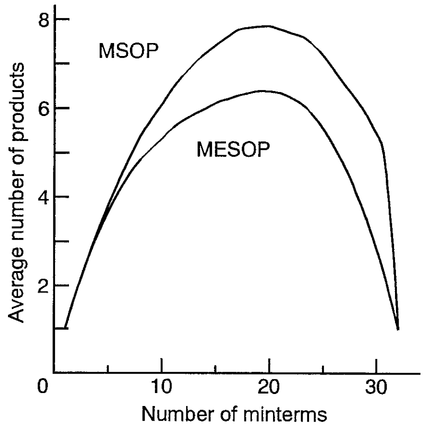

図1　5変数関数のMSOP及びMESOPの平均積項数

6. むすび

本論文では, 論理関数のLP特徴ベクトルを定義し, それがn変数論理関数(n≦5)のLP同値類のinvariantになることを示した. また, この性質を用いて, 任意の関数のMESOPを高速に得る方法を提案した. これらの方法を5変数関数に適用し, その有用性を確認した. 5変数以下のESOPは本方法によって高速に最小化できる. 6変数以上の関数の場合は, 簡単化の過程で与えられたESOPを変数で展開すると5変数ESOPが得られる. これに5変数MESOPを代入することにより, 高速で品質の良い簡単化が可能となる. 今後の課題と

しては，６変数以上の関数のMESOPを効率よく求める方法の開発が考えられる．また，論理関数のＬＰ特徴ベクトルは，n≦14の場合，通常の計算機で容易に求められるため，他の応用も期待できる．

謝辞
本研究は一部，文部省科学研究費補助金による．

文献

(1) Bioul G., Davio M. and Deschamps J.P.: "Minimization of ring-sum expansion of Boolean functions", Philips Res. Rpts., vol.28, pp.17-36(1973).
(2) Davio M., Deschamps J.P. and Thayse A.: Discrete and Switching Functions, McGraw-Hill International(1978).
(3) Harrison M.A.: Introduction to Switching and Automata Theory, McGraw Hill, 1965.
(4) Helliwell M. and Perkowski M.:"A fast algorithm to minimize multi-output mixed-polarity generalized Reed-Muller forms", Proc. of the 25th Design Automation Conference, pp.427-432(June 1988).
(5) 神田徳夫, 笹尾勤:"４変数ＡＮＤ－ＥＸＯＲ最小論理式とその性質", 信学論(D-I), J74-D-I, 11, pp.765-773 (1991-11).
(6) 神田徳夫, 笹尾勤:"５変数ＡＮＤ-ＥＸＯＲ論理式の簡単化について", 1990信学秋季全大, SA-3-3, pp.1-288(1990).
(7) 神田徳夫, 笹尾勤:"ＡＮＤ-ＥＸＯＲ最小論理式の積項数の上界について", 信学論(D-I), J75-D-I, 3, pp.135-142(1992-3).
(8) 神田徳夫, 笹尾勤:"下界定理を用いたAND-EXOR論理式の簡単化法", 信学論（採録決定）.
(9) 室賀三郎, 笹尾勤訳:論理設計とスイッチング理論, 共立出版(1981).
(10) Perkowski M. and Chrzanowska-Jeske M.: "An exact algorithm to minimize mixed-radix exclusive sums of products for incompletely specified Boolean functions", Proc. International Sympo. on Circuits and Systems, pp.1652-1655(May 1990).
(11) Muller D.E.:"Application of Boolean algebra to switching circuit design and to error detection", IRE Trans. Electron. Compt., EC-3, pp.6-12(1954).
(12) Reed I.S.:"A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme", IRE Trans. Information Theory, PGIT-4, pp.38-49(1954).
(13) Sasao T., Besslich P.W.:"On the complexity of MOD-2 SUM PLA's", IEEE Trans. on Compt., vol.39, No.2, pp.262-266(Feb. 1990).
(14) Sasao T.:"EXMIN: A Simplification Algorithm for Exclusive-OR-Sum-of-Products Expressions for Multiple-Valued Input Two-Valued Output Functions", ISMVL-90, pp.128-135(May 1990).
(15) Sasao T.:"A transformation of multiple-valued input two-valued output functions and its application to simplification of exclusive-or sum-of-products expressions", Proc. of the 21th International Symposium on Multiple-Valued Logic, pp.270-279(1991).
(16) 笹尾勤:"種々のAND-EXOR論理式の複雑度について", 信学技報, FTS91-35(1991-10).
(17) Sasao T.:"Optimization of multiple-valued AND-EXOR expressions using multiple-placed decision diagrams", ISMVL-92, pp.451-458 (May 1992).
(18) Sasao T.:"EXMIN2: A simplification algorithm for Exclusive-Or-Sum of products expressions for multiple-valued input two-valued output functions", IEEE Trans. on CAD (to be published).
(19) Savage, J, E: The Complexity of Computing, New York, Wiley(1976).