

## ダクト内電磁流体解析の並列化

松尾 哲司 島崎 眞昭

京都大学大学院工学研究科

弱電離プラズマの超音速ダクト流れの解析に対して MPI を用いた並列計算を適用した。電磁流体を解析するために流体力学と電磁気学の連成問題を取扱っている。解析領域は流体解析と電磁界解析の両方の並列処理に適した形に分割される。分散メモリ型並列計算機・日立 SR2201 を用いて、パルス MHD 発電機内の燃焼ガスプラズマの 2 次元解析を行った。512 および 1024PE 使用時、16PE 使用時と比較してそれぞれ 18 倍および 23 倍の計算速度向上が得られた。

### Parallelization of Magnetohydrodynamic Duct-Flow Analysis

Tetsuji Matsuo and Masaaki Shimasaki

Graduate School of Engineering, Kyoto University

Parallel computations using MPI are applied to an analysis of supersonic duct flow of weakly ionized plasma. A coupled problem of gasdynamics and electromagnetics is treated to perform a magnetohydrodynamic analysis. The analyzed duct area is divided into appropriate subdomains for parallel processing of both gasdynamic and electromagnetic calculations. Two-dimensional analyses are performed for a combustion-gas plasma in a pulsed MHD generator by using Hitachi SR2201 with distributed memory. The parallel computation using 512 or 1024 PEs achieves the analysis 18 or 23 times as fast as the computation with 16 PEs.

#### 1. はじめに

電磁流体力学は、エネルギー変換・宇宙物理学などの広い応用分野を持っており、核融合炉、高効率直接発電、宇宙開発などへの貢献を目指した研究が世界的に進められている。電磁流体の解析の際には電磁界と流体の連成問題を取扱う必要があり、大規模な数値計算を要することが多いため、高速数値解析手法の開発が強く求められている。

例えば、弱電離プラズマの高速ダクト流は、MHD 発電による直接エネルギー変換に用いられ、数百 MW<sup>3</sup> に達する出力密度を実現している<sup>[1,2]</sup>。この高速ダクト流においては、強いローレンツ力が、しばしば衝撃波や境界層剥離を引き起こし、発電出力や電流出力の飽和の要因となることが実験のおよび理論的に示唆されている。しかし、発電機内の諸量の計測が容易でないこと、現在の計算機能力の制限もあって、発電機内におけるプラズマの衝撃波-境界層剥離相互作用の詳細は未だ明らかにされていない。

境界層剥離を含む圧縮性乱流の解析には、微細な空間格子が要求され、それに応じて小さな時間

刻みが要求される。例えば、筆者らが行った  $k$ - $\omega$  乱流モデル<sup>[3]</sup>を用いた MHD 発電機の数値解析<sup>[4]</sup>では、流体の計算格子は壁付近で 3~5 $\mu$ m となり、これに応じて、最低 20nsec 以下の時間刻み幅が必要であった。他方で、発電機サイズは 2m あるいはそれ以上であるので、定常解析には 2msec 以上の時間依存計算が要求され、従って、流体解析だけで最低 10 万ステップ以上の計算が必要となる。実際の解析では、電極端における電流集中現象の解析を安定に行うために、さらに小さい時間刻みが流体解析に要求されることがしばしばである。従って、境界層剥離が MHD 発電機の定常特性に及ぼす影響を調べるためには、非常に高い性能を持つ計算機を用いるか、あるいは、精度を犠牲にして少ない計算格子を用いる必要があった。

電磁流体の解析は、前述のように流体と電磁界の連成問題となるが、両者の解析に適したメモリ分散法や計算格子および時間刻み幅が異なることがあり、個々の解析の並列化手法を単に結合しても、一般には並列化効率の向上は容易ではない。

本論文では、流体解析と電磁界解析が比較的独

立に行える、MHD 発電機内の弱電離プラズマを取扱い、1000 台規模の分散メモリ型並列計算機による、電磁流体の超音速ダクト流れ解析の高速化を行うことにより、電磁流体解析の並列処理の可能性を示す。並列化には、分散メモリ型並列計算機に対して、現在最も標準的な通信ライブラリの一つである MPI<sup>[5]</sup>を用いた。

## 2. 解析対象と解析モデル

### 2.1 解析対象

本論文で解析対象とする MHD 発電機は、ロシアで開発されたパルス MHD 発電機 Pamir-3U である。パルス MHD 発電機は、短時間ながら大電力を始動性よく発生することができるため、地殻研究や地下資源探査などに用いられてきた<sup>[1]</sup>。Pamir-3U は固体ロケット燃料を用いた可搬形自励式の MHD 発電機であり、発電試験では 15MW の電気出力、300MW<sup>3</sup> に達する出力密度を実現している<sup>[2]</sup>。Pamir-3U で用いられる発電チャンネルは連続電極ファラデー形であり、その流路形状を図 1 に示す。本論文では、流れ方向およびファラデー方向の  $x$ - $y$  2次元解析を行う。

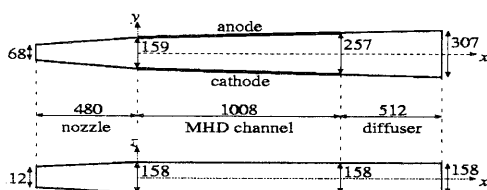


図 1 発電機ダクト (単位:mm)

### 2.2 弱電離プラズマ

パルス MHD 発電機内の作動流体は、ロケット燃料の燃焼ガス弱電離プラズマである。燃焼器総圧は 2.9~5.1MPa、総温は 3950K、質量流量は 16~26kg/s である。シード剤としてセシウムが用いられており、発電機内の導電率は 70~120S/m 程度である。また、発電機内の磁束密度は 3~5T 程度、ホールパラメータは 0.4~1 程度である。発電機内の流れは、流速が 1000~2000m/sec、マッハ数が 1~2 程度の超音速流となっている。

MHD 発電機内の弱電離プラズマの解析の際には、以下を仮定する：(1) 磁気レイノルズは小さ

く、誘導磁界は印加磁界と比べて無視できる；(2) 変位電流は伝導電流と比較して無視できる；(3) 磁界の時間変化は無視できる。

### 2.3 流体諸量の解析手法

流体諸量の支配方程式としては、圧縮性時間依存ナビエ・ストークス方程式を用いる。ただし、発電機ダクト内の流れはレイノルズ数が  $10^7$  程度の乱流であるので、適当な乱流モデルを用いる必要がある。本解析では、発電機の運転条件によって大きな境界層剥離が生じることを考慮して、乱流モデルとして Wilcox による修正  $k$ - $\omega$ モデル<sup>[3]</sup>を用いる。これらの方程式を付録 A に示す。

流体方程式の数値解法としては Harten-Yee 風上型 TVD スキーム<sup>[6]</sup>を用いる。ただし、付録の式 (2)(3)(4)の左辺に現れる電界および電流密度は、次節で述べる電磁界解析によって決定される。

この流体解析には、2341( $x$  方向) $\times$ 301( $y$  方向)の不等間隔格子を用いる。境界層剥離部を含む流れに対する  $k$ - $\omega$ 乱流モデルによる解析精度を考慮して、壁付近の無次元距離が 1 程度となるように壁に隣接する部分の  $y$  方向格子幅を 3~5 $\mu$ m とする。これに対して、主流部分および  $x$  方向の格子幅は 1mm 程度である。従って、壁付近の格子間隔に適した時間刻み幅は、主流部分で必要な刻み幅と比較してかなり小さい。そこで、解析領域を  $y$  方向に幾つかの領域に分割して、それぞれの領域における格子間隔に応じた時間刻み幅を用いて流体方程式の時間積分を行う。

本論文では、チャンネルを図 2 に示すように 3 種類の領域に分割し、主流部(領域 1)の時間刻み幅  $\Delta t$ (=25nsec)に対して、領域 2 で時間刻み幅を  $\Delta t/4$ 、領域 3 で  $\Delta t/16$  とする。各領域の計算の際には、他領域の流体諸量の値は固定されているとする。

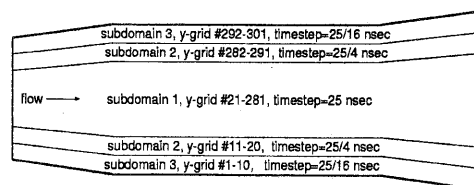


図 2 複数時間刻み幅方式

時間刻み幅は主に  $y$  方向の格子間隔で決まっており、 $y$  方向の対流項・粘性項(式(1)-(6)左辺の  $\partial_y$  の項)は毎時間ステップで計算するが、時間刻み幅の小さい領域 2,3 では、 $x$  方向の対流項・粘性項(同じく  $\partial_x$  の項)が影響する速度は時間刻み幅と比較して小さく、必ずしも毎回計算する必要はない。そこで、本解析では、 $x$  方向の対流項・粘性項は全領域で主流部と同じ時間刻み幅( $\Delta t$ )にて計算(値を更新)することにより計算量を削減する。

#### 2. 4 電磁界諸量の解析手法

電磁界諸量の関係式としては、電界に関するマクスウェル方程式と電流に関する連続の式および一般化されたオームの法則を用いる(付録 B 参照)。付録の式(8)中の流速は流体解析により決定される。また、導電率およびホールパラメータは、流体解析により得られる作動流体の温度と圧力の関数である。式(7)(8)から電位に関する 2 階の偏微分方程式を導出して、これを 3 角形 1 次接点要素ガラキン有限要素法にて解いて電磁界諸量を求める。ただし、電極電位を境界条件として与える。

流体解析に用いる計算格子では、壁付近で  $y$  方向格子幅が非常に小さい扁平な格子になっている。電磁界解析では、この扁平さを緩和するとともに電磁界解析の計算時間を削減するため、 $y$  方向の格子数を半減し、2341( $x$  方向)×151( $y$  方向)の不等間隔格子を用いる。この結果、有限要素解析に現れる連立 1 次方程式は、未知数 353491、片側バンド幅 151 で、非対称バンド係数行列を持つ。

この規模の連立 1 次方程式の解法としては、GMRES 法や BiCGstab 法などの反復解法の使用が自然であると考えられる。しかし、MHD 発電機内の電磁界解析に際には、これら反復法の収束が非常に悪いことがしばしばあるため、直接解法もよく用いられる。今回の連立 1 次方程式に対しては、直接法で解ける範囲の規模であることから、バンド係数行列の並列直接解法を用いる。

電磁界が影響する速度は流体の時間刻み幅と比較して小さく、必ずしも流体計算と同じ時間刻みで計算する必要はない。そこで、計算量を削減するため、電磁界解析については  $40\Delta t (=1\mu\text{sec})$  毎

に計算を行って、電磁界諸量の値を更新する。

### 3. 並列処理手法

#### 3. 1 使用した計算機とコンパイラ

使用した計算機は、東京大学情報基盤センターの並列計算機日立 SR2201 である。この計算機の演算能力およびメモリサイズは 1PE あたり 300Mflops および 224MB である。SR2201 は 3 次元クロスバーネットワークを持ち、疑似ベクトル化機能を有している。コンパイラには日立最適化 fortran90(最適化オプション:OPT(O(SS)))を用いた。

#### 3. 2 並列計算手法

電磁界の有限要素解析に現れる連立 1 次方程式の並列直接解法として、single-width separator 法<sup>[7]</sup>を用いる。従って、電磁界解析の際には、この係数行列の並列処理のため、図 3(a)のように  $x$  方向に解析領域を分割するのが自然であると考えられる。他方、流体解析の領域分割については、領域間で隣接する格子点での流体変数を互いに通信する必要があるため、他の領域と隣接する格子点の数が少ない方が有利である。従って、図 3(a)のように  $x$  方向にのみ領域を分割すると、使用する PE 数が多くなったとき、領域が細長くなり、領域内部の格子点数に対して、前後の領域と接する格子点数の割合が増加して望ましくない。反面、電磁界諸量の計算と流体諸量の計算は互いに他の諸量を必要とするため、両計算における領域分割が大きく異なると、領域間の通信量が増加する。さらに、流体解析では、図 2 のような多重時間刻み幅方式用の領域分割と適合する分割が必要である。以上のことを考慮して、本論文では、流体解析用には図 3(b)のように分割することとし、各 PE は図 3(c)に示す領域の記憶容量を確保するとする。

### 4. 計算結果

パルス MHD 発電機 Pamir-3U のチャンネル K3 に対し、印加磁束がチャンネル電流に比例する自己励磁条件下の解析を行った。チャンネル中央での磁束密度は、チャンネル電流 1kA 当たり、0.25T/kA である。また、チャンネル電圧/電流の比を  $45\Omega$  とする。

使用計算機のメモリサイズの関係上、16PE 以上での並列計算を行った。

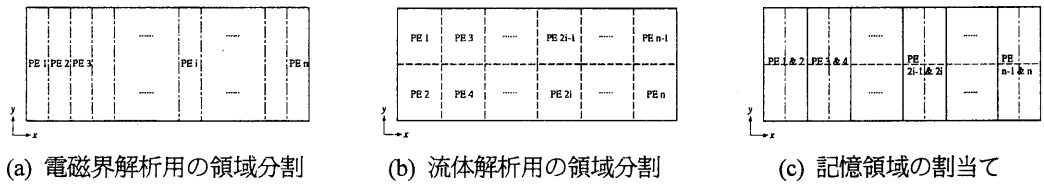
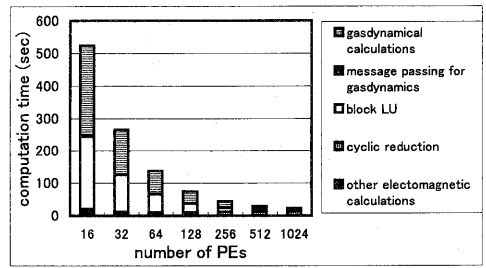


図3 並列計算の際の解析領域の分割

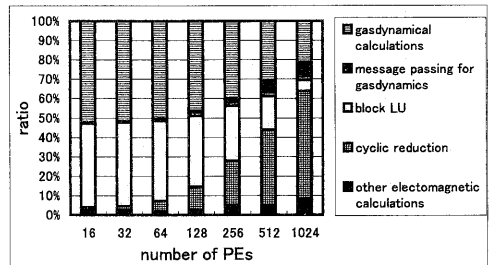
図2の複数時間刻み幅を用いて、 $2\mu\text{sec}$ の計算を行った結果、要した計算時間を図4に示す。図の"block LU"は、電磁界解析での連立1次方程式において、ブロック並列によりLU分解および前進・後退代入を行うのに要する時間を表し、"cyclic reduction"は、その後のサイクリックリダクションに要する時間を表す。電磁界解析の際に要した通信時間は、サイクリックリダクションにおける待ち時間と比較して無視できるので、個別には示さず、サイクリックリダクションやその他の電磁界計算の項目に含めている。また、図5に16PE使用時に対する速度向上率を示す。図5では、全体の速度向上率(total)とともに、流体計算および電磁界計算における個々の速度向上率も示している。16PE使用時に対する速度向上率は、256、512、1024PE使用時にそれぞれ、約12、18、23であり、PE数の増加とともに速度向上率の飽和が見られる。図4、図5より、電磁界解析に要する計算時間が大きな割合を占めるが、PE数の増加とともに電磁界計算の並列台数効果が低下し、全体の並列化効率の低下を招いていることが分かる。これは、サイクリックリダクションに要する計算時間の増加によることが図4(b)よりわかる。このような並列台数効果の低下は、 $x$ 方向の格子数(2341)に対するPE数の比が大きくなったことによる。特に、電磁界解析における連立1次方程式では、未知数と片側バンド幅の比が $x$ 方向の格子数と等しいため、1024PEでの台数効果の低下が著しい。

次に、図2の複数時間刻み幅方式の効果を見るために、時間刻み幅を単一とし、領域全体を図2の最小の時間刻み幅(1.5625nsec)で流体計算を行った結果を図6に示す。図6(a)は計算時間、(b)は16PE使用時と比較した速度向上率を示す。ただし、

図6(b)の波線は単一の時間刻み幅方式の16PE使用時と比較した、複数時間刻み幅方式の場合の速度向上率である。図4(a)と図6より、時間刻み幅を複数にすることで、流体計算の計算量が大幅に削減され、全体として3~5倍の速度向上が得られることが分かる。



(a) 計算時間の変化



(b) 計算時間の割合

図4 PE数の変化に対する計算時間の変化

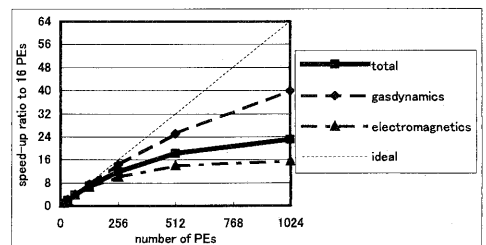
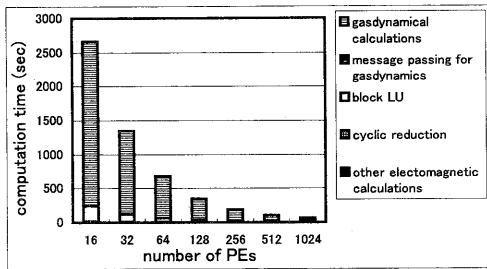
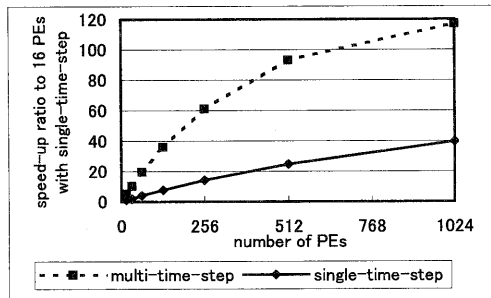


図5 16PE使用時に対する速度向上率



(a) 単一時間刻み幅方式の場合の計算時間の変化



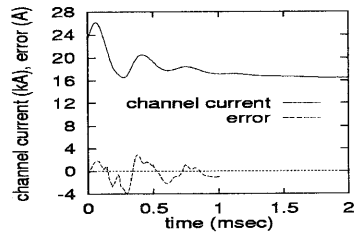
(b) 単一時間刻み幅方式 16PE 使用時に  
対する速度向上率

図6 単一時間刻み幅方式との比較

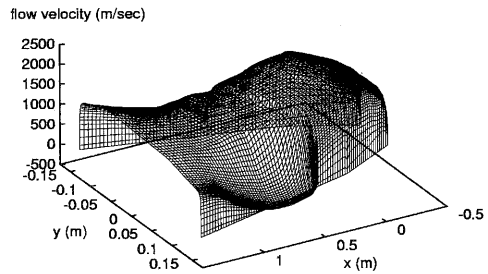
表1に、定常状態を得るのに必要な2msecの計算を、単一および複数時間刻み幅で実行するのに要する推定時間を示す。ただし、1PE使用時の計算時間は、16PE使用時の流体計算時間の16倍と電磁界計算時間の4倍の和として見積もった。表1より、1PEで単一時間刻み幅にて計算すると1年以上の時間を要するが、並列計算と複数時間刻み幅方式を併用すると8時間(512PE使用時)あるいは6.4時間(1024PE使用時)と大幅に計算時間が短縮されることが分かる。

表1 定常解析に要する計算時間

PE数	単一時間刻み	複数時間刻み
1	461日	62.8日
16	30.9日	6.06日
128	4.03日	20.6時間
512	1.25日	7.97時間
1024	18.7時間	6.37時間



(a) チャネル電流の変化(実線、波線は単一時間刻み幅方式と比較したときの誤差)



(b) 流れ方向流速の分布

図7 電磁流体解析結果の例

最後に、図7に複数時間刻みを用いて2msecの解析を行った結果を示す。ただし、図7(a)はチャネル電流(kA)の時間変化を示し、比較のために1msecまでの単一時間刻み幅方式による電流値との差(A)を図中の波線(error)で示す。図7(b)は得られた流れ方向流速分布である。図7(a)では、単一時間刻み幅方式と比較して、複数時間刻み幅方式による誤差は僅かである。図に示した範囲では、両方式で得られるチャネル電流の差は最大で0.03%以下、平均で0.01%以下である。図7(b)では小さな境界層剥離を持つ定常流れが得られている。

## 5. おわりに

今回、電磁流体解析の並列処理の例として、分散メモリ型並列計算機による弱電離プラズマの超音速チャネル流の解析を行った。流体解析および電磁界解析の連成問題を取扱うために、両方の並列処理に適した領域分割を行った。

並列計算機として日立SR2201を用い、パルスMHD発電機内の燃焼ガスプラズマの2次元解析を行った。その結果、16PE使用時と比較して18倍(512PE使用時)あるいは23倍(1024PE使用時)の速

度向上が得られた。1PE 使用時に対する速度向上は、190 倍(512PE 使用時), 240 倍(1024PE)程度と推定される。

今回の結果では、連立 1 次方程式の並列直接解法の並列化効率が PE 数の増加とともに悪くなり、計算全体の速度向上率の飽和につながった。高効率な非対称連立 1 次方程式の並列反復解法の選択(あるいは開発)については今後の課題である。

### 謝辞

256PE 以上用並列プログラムの開発と計算結果の検証のために筑波大学計算物理学研究センター並列計算機 CP-PACS を用いた。計算機の使用にご協力を頂いた、宇川彰教授並びに板倉憲一氏に感謝いたします。

### 参考文献

- [1] V. A. Zeigarnik, "Pulsed MHD-Generators", Proc. 12th Int. Conf. MHD Power Generation, Yokohama, Vol.1, pp. 28--60 (1996).
- [2] V. A. Zeigarnik et al., "The First Experiments with Pamir-3U Pulsed Portable MHD Power System", Proc. 33rd Symp. Eng. Aspects MHD, pp.I.5.1-11 (1995).
- [3] D.C. Wilcox, "A Two-Equation Turbulence Model for Wall-Bounded and Free-Shear Flows", AIAA paper 93-2905 (1993).
- [4] 松尾哲司, 杉田寛之, 石川本雄, 「境界層剥離を伴うパルス MHD チャンネルの動作特性解析」, 電学論 B, **119-B**, 6, pp. 690-695 (1999).
- [5] W. Gropp, E. Lusk & A. Skjellum, "Using MPI : Portable Parallel Programming with Message-Passing Interface", The MIT Press (1994).
- [6] H. C. Yee. & A. Harten., "Implicit TVD Schemes for Hyperbolic Conservation Laws in Curvilinear Coordinates", AIAA J. **25**, 2, pp.266-274 (1987).
- [7] P. Arbenz & W. Gander, "A Survey of Direct Parallel Algorithms for Banded Linear Systems", Technical Report 221, ETH Zurich, Computer science Department (1994).

### 付録

#### A. 流体諸量の支配方程式

流体諸量の支配方程式としては、式(1)-(6)の圧

縮性時間依存ナビエ・ストークス方程式および Wilcox による修正  $k$ - $\omega$  乱流モデル<sup>[3]</sup>を用いる。

$$\partial_t \rho + \partial_x(\rho u) + \partial_y(\rho v) = -\rho u \, dW/dx/W \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u^2) + \partial_y(\rho uv) + \partial_x p - \partial_x \tau_{xx} - \partial_y \tau_{xy} \\ = -(\rho u^2 - \tau_{xx})dW/dx/W + J_x B \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho uv) + \partial_y(\rho v^2) + \partial_y p - \partial_x \tau_{xy} - \partial_y \tau_{yy} \\ = -(\rho uv - \tau_{xy})dW/dx/W - J_x B \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \varepsilon_s + \partial_x \{u(\varepsilon_s + p)\} + \partial_y \{v(\varepsilon_s + p)\} \\ - \partial_x (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} - q_x + \mu_k \partial_x k) - \partial_y (u \tau_{xy} + v \tau_{yy} - q_y + \mu_k \partial_y k) \\ = -\{u(\varepsilon_s + p) - u \tau_{xx} - v \tau_{xy} + q_x - \mu_k \partial_x k\}dW/dx/W \\ + E_x J_x + E_y J_y \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho k) + \partial_x(\rho uk) + \partial_y(\rho vk) - \partial_x(\mu_k \partial_x k) - \partial_y(\mu_k \partial_y k) \\ = \tau_{xx}^T \partial_x u + \tau_{xy}^T (\partial_x v + \partial_y u) + \tau_{yy}^T \partial_y v - \beta_k \rho \omega k \\ - (\rho uk - \mu_k \partial_x k)dW/dx/W \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho \omega) + \partial_x(\rho u \omega) + \partial_y(\rho v \omega) - \partial_x(\mu_\omega \partial_x \omega) - \partial_y(\mu_\omega \partial_y \omega) \\ = \{\tau_{xx}^T \partial_x u + \tau_{xy}^T (\partial_x v + \partial_y u) + \tau_{yy}^T \partial_y v\} \alpha \omega / k - \beta_\omega \rho \omega^2 \\ + \sigma_d (\partial_x k \partial_x \omega + \partial_y k \partial_y \omega) \rho / \omega - (\rho u \omega - \mu_\omega \partial_x \omega)dW/dx/W \quad (6) \end{aligned}$$

ここで、 $t$  は時間、 $\rho$  は質量密度、 $(u, v)$  は流速の  $(x, y)$  成分、 $p$  は気体圧力、 $\varepsilon_s = p(e + u^2/2 + v^2/2 + k)$ 、 $e$  は気体内部エネルギー、 $k$  は乱流エネルギー、 $\omega$  は乱流比散逸率、 $W$  はダクト  $z$  方向幅、 $(J_x, J_y)$  は電流密度、 $(E_x, E_y)$  は電界、 $B$  は  $z$  方向磁束密度、 $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$  は全粘性応力テンソル、 $\tau_{xx}^T, \tau_{xy}^T, \tau_{yy}^T$  はレイノルズ応力テンソル、 $q_x, q_y$  は熱流束、 $\mu_k = \mu + \sigma_k \mu_T$ 、 $\mu_\omega = \mu + \sigma_\omega \mu_T$  である。ここで、 $\mu$  および  $\mu_T = \alpha^* \rho k / \omega$  は層流および乱流粘性係数である。乱流モデルのパラメータ  $\alpha^*, \alpha, \beta_k, \beta_\omega, \sigma_k, \sigma_\omega, \sigma_d$  は文献[3]のように与える。

流体諸量の境界条件については、入口は固定とし、出口は吹き流し条件とする。また壁面は滑りなし条件とし、壁温は 2300K で固定する。

#### B. 電磁界諸量の支配方程式

電磁気界諸量の関係式として、電界に関するマクスウェル方程式と電流連続の式(7)および一般化されたオームの法則(8)を用いる。

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = 0, \quad \partial_x(WJ_x) + \partial_y(WJ_y) = 0 \quad (7)$$

$$J_x = \sigma \{ (E_x + vB) - \beta (E_y - uB) \} / (1 + \beta^2),$$

$$J_y = \sigma \{ \beta (E_x + vB) + (E_y - uB) \} / (1 + \beta^2) \quad (8)$$

ただし  $\sigma$  は導電率、 $\beta$  はホールパラメータである。