

演繹定理を用いた論理定理の推論規則化による 強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法の改善

長谷川 諒 後藤 祐一†

埼玉大学 大学院理工学研究科†

1. はじめに

自動定理発見問題は Wos によって提案された自動定理発見の一般的な方法を求めるという問題であり、現在も解決されていない[6]。自動定理発見問題を解決するために強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法（以下、SRATF）が提案された[1][4]。

提案された SRATF に基づき、公理的集合論の一種である NBG 集合論による自動定理証明の試行が行われ、NBG 集合論の既知の定理を再発見することができた[4]。再発見とは定理発見の対象としている数学分野の定義や公理から既知の定理を導出することである。この事例研究により、SRATF が自動定理発見の解決に有用であることが確認できた。しかし、既知の定理のすべてを再発見できているわけではない。そのため、現在の SRATF を改善する必要がある。

2. 前向き推論を用いた自動定理発見法

強相関論理とは実質含意、連言・含意、選言・含意のパラドクスを持たない論理体系を構築するために提案された論理体系である[2]。

SRATF は定理発見の対象とする数学分野の専門家と協調し、新しくかつ面白い定理の発見を行う手法である。SRATF は論理定理の準備、経験前提の準備、前向き推論、抽象化、定理候補の抽出の5つのフェーズから構成されている[4]。

はじめに論理定理の準備フェーズでは、実行者が強相関論理を論理定理として選択する。

次に経験前提の準備フェーズでは、実行者が対象分野の定義や公理、必要に応じて既知の定理を収集する。収集した経験前提から自動定理発見を実行するための経験前提を選択する。

次に前向き推論フェーズでは、前向き推論エンジン FreeEnCal [3]を使用して前向き推論を行う。FreeEnCal では予め与えられた推論規則に

従い、前フェーズで選択された論理定理、経験前提から新しい論理式を導出する。新しく導出された論理式を前提に加え再び推論を行う。この操作を新しい論理式を導出されなくなるか終了条件を満たすまで繰り返し行う。

次に抽象化フェーズでは、与えられた抽象化ルールに従い、論理式中の部分論理式を述語に置き換える。

最後に定理候補の抽出フェーズでは、新しくかつ面白い定理の候補を抽出し、実行者に提示する。新しいに関しては経験前提として与えられた定義や公理、既知の定理でないことで判断する。面白いことに関しては提示された面白さの指標に基づき判断する[5]。

高島は推論的手法に項の書き換え処理を付け加えることで推論的手法の改善を試みた[7]。その結果、いくつかの NBG 集合論の既知の定理を再発見することに成功した。しかし、NBG 集合論の既知の定理のすべてを再発見することはできなかった。

高島は、さらなる推論的手法の改善方法として、推論的手法において行われる前向き推論の論理式の導出に関する制限を緩めることを提案した。前向き推論においては、前提となる論理式の集合が有限集合であったとしても、導出される論理式の集合は無限集合となり得る。計算機を用いて自動前向き推論を行うためには、前向き推論によって導出される論理式の集合を有限集合とする必要がある。Cheng は、前向き推論によって導出される論理式の数を論理式中の論理結合子および様相演算子の入れ子の度合いを用いて制限することにより、前向き推論によって導出される論理式の集合を有限集合とする方法を提案した（以下、入れ子の度合いによる制限と呼ぶ）[3]。推論的手法では、前向き推論の論理式の導出に関する制限として入れ子の度合いによる制限を用いている。前提となる論理式集合 P から強相関論理に基づく推論によって導出される論理式 A の論理結合子 α の入れ子の度合いが k とする。そして、 P から A を導出するためには α の入れ子の度合いが k より大き

Improvement of automated theorem finding with forward reasoning based on strong relevant logics by transforming logical theorems into inference rules using deduction theorem
†Hasegawa Ryo and Goto Yuichi, Saitama University Graduate School of Science and Engineering

い論理式を先に導出する必要があるとする。このとき、 α の入れ子の度合いによる制限を k とすると、 A は入れ子の度合いが k 以下の論理式であるが、この入れ子の度合いによる制限の下では P から A を導出できない。このため、高島は入れ子の度合いによる制限を緩めることを提案した。

しかし、現在の推論的手法の実施環境においては入れ子の度合いによる制限を緩めることは難しい。入れ子の度合いの制限を緩めると導出される論理式の数が急激に増え、実行時間およびメモリ使用量が増加するためである。このため、入れ子の度合いによる制限を緩めることなく、その入れ子の度合いによる制限の下でより多くの論理式を導出する方法が必要となっている。

3. 演繹定理を用いた論理定理の推論規則化

入れ子の度合いの制限が厳しいままで導出される論理式の数を増やす必要がある。この問題を解決するために演繹定理を用いた論理定理の推論規則化を行った。

古典数理論理では演繹定理が成り立つことが知られている。演繹定理とは A と B が論理式、 Γ が論理式の有限の列（空列でも良い）であるとき、以下の命題およびその逆が成り立つという定理である。

$$\Gamma, U \vdash V \text{ ならば } \Gamma \vdash U \Rightarrow V$$

演繹定理の妥当性は古典数理論理においては MP が妥当な推論規則であることによって証明されている。このため、同じく MP が妥当な推論規則である強相関論理とその拡張論理においても演繹定理は成り立つ。

経験定理 α があるとき、論理定理から導出される式 $U \Rightarrow V$ が導出に必要であるときを考える。帰結関係の入れ子の度合いの制限が m 、 $U \Rightarrow V$ の帰結関係の入れ子の度合いが $m+1$ であるとき、 $U \Rightarrow V$ は導出されないため経験定理 α は導出できない。 $U \Rightarrow V$ に演繹定理を適用して $U \vdash V$ として推論規則に追加することで帰結関係の入れ子の度合いの制限が m のままで経験定理 α を導出することができる。期待できる。

帰結関係の入れ子の度合いの制限が 3 以上でないと導出できなかった既知の定理に関して試行を行った。帰結関係の入れ子の度合いが 3 の論理定理に演繹定理を適用して推論規則に追加した。推論規則を追加したものを帰結関係の入れ子の度合いの制限が 2 の状態で前向き推論を行い、既知の定理を導出することができた。このことから、演繹定理を用いた論理定理の推論規則化が入れ子の度合いの制限が厳しいままで導

出される論理式の数を増やす方法として有効であることを確かめることができた。

4. おわりに

前向き推論を用いた自動定理発見法に論理定理に演繹定理を適用して推論規則に追加することで入れ子の度合いの制限が厳しい状態でもより多くの論理式を導出することができた。

参考文献

- [1] J. Cheng: A Relevant Logic Approach to Automated Theorem Finding, Proc. Workshop on Automated Theorem Proving attached to International Symposium on Fifth Generation Computer Systems 1994, pp. 8 – 15, Tokyo, Japan, 1994.
- [2] J. Cheng: A Strong Relevant Logic Model of Epistemic Processes in Scientific Discovery, in E. Kawaguchi et al. (Eds.), FAIA, Vol. 61, pp. 136 – 159, IOS Press, February 2000.
- [3] J. Cheng et al.: FreeEnCal: A Forward Reasoning Engine with General-Purpose, in B. Apolloni et al. (Eds.), LNAI, Vol. 4693, pp. 444 – 452, Springer-Verlag, 2007.
- [4] H. Gao et al.: A Systematic Methodology for Automated Theorem Finding, Theoretical Computer Science, Vol. 554, pp. 2 – 21, Elsevier B.V., 2014.
- [5] H. Gao et al.: Measuring interestingness of theorems in automated theorem finding by forward reasoning based on strong relevant logic, Proc. ICEI 2019, pp. 356 – 361, Nanjing, China, May 2019.
- [6] L. Wos: Automated Reasoning 33 Basic Research Problems, Prentice-Hall, 1988.
- [7] 高島 望, 後藤 祐一: 強相関論理に基づく前向き推論を用いた自動定理発見法の項書き換え処理による改善, 第 83 回全国大会講演論文集, 2021 巻, 1 号, pp. 477-478, 2021 年 3 月.