1J-06

残差ベクトル更新方式の切り替えによる Pipelined Chronopoulos CG 法の収束性向上

沢 圭佑† 中村 あすか 前川 仁孝
千葉工業大学情報科学部情報工学科

1 はじめに

Pipelined Chronopoulos CG 法は，CG 法による連立一次方程式求解の並列化で生じるデータ転送を隠蔽する手法である [1]．本手法は，一般的な CG 法より高速であるが，残差ベクトルの計算で生じる丸め誤差により高精度な解が得られないことがある [2]．そこで本研究は，Pipelined Chronopoulos CG 法の求解速度を落とさずに，解の精度を向上することを目的とする．

2 Pipelined Chronopoulos CG 法

Pipelined Chronopoulos CG 法は，並列 CG 法による連立一次方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ の求解に必要となる PE(プロセッシングエレメント) 間のデータ転送を隠蔽可能な並列求解手法である．図 1 に CG 法と Pipelined Chronopoulos CG 法のアルゴリズムを示す．図中の緑部分は ρ と μ のデータ転送，赤部分は $\boldsymbol{p}_1$ と $\boldsymbol{w}_1$ のデータ転送であり，これらは着色部分の計算とオーバーラップできる．図のように Pipelined Chronopoulos CG 法は，CG 法と数学的に等価な解を導出可能である．ただし，計算機上では α の更新で単独項の分子と複数項の分母を用いるため，桁落ちによる丸め誤差が生じ高精度な解が得られない場合がある．

3 Pipelined Chronopoulos CG 法の解精度向上

本研究では，Pipelined Chronopoulos CG 法の利点であるデータ転送の隠蔽を活かしつつ CG 法と同程度の解精度を得ることを目的とする．このため本研究では，まず $\boldsymbol{r}$ の推移を測定し，その特性を確かめる．次に，$\boldsymbol{r}$ の推移の測定結果を踏まえて，残差ベクトルを更新する方式を提案する．

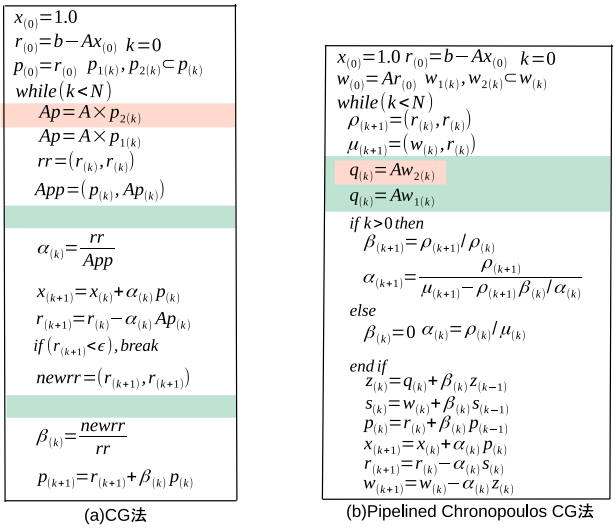

図 1: CG 法と Pipelined Chronopoulos CG 法

3.1 測定条件

本研究では，有限要素法による熱伝導解析で扱う連立一次方程式を求解対象とする．有限要素法の解析領域は，2 次元正方領域であり全て合同な三角メッシュで離散化し，領域内の初期温度を 0.0，左側の境界を温度 100.0 のディレクレ境界条件，他の辺の境界を熱流束 0.0 のノイマン境界条件とする．また，求解対象の連立一次方程式の係数行列は，倍精度浮動小数点の対称帯行列である．評価環境は，CPU が Intel Core i7-4770K，メモリが 16GB の PE16 台を MPI により並列化する．

3.2 Pipelined Chronopoulos CG 法の残差推移

残差の収束特性を調べるために，行列サイズによる振動の開始地点の違いを確認する．図 2，図 3 に PE 数 8 で並列化した CG 法と Pipelined Chronopoulos CG 法の元数ごとの残差 $\boldsymbol{r}$ の推移を示す．図中の縦軸は $||\boldsymbol{r}||_2$，横軸は反復回数である．図より，CG 法は $||\boldsymbol{r}||_2$ が 10^{-8} より小さな解を得られるが，Pipelined Chronopoulos CG 法は $||\boldsymbol{r}||_2$ が振動し，10^{-8} より小さくならず解が得られない．

Improved Convergence of the Pipelined Chronopoulos CG Method with Switching Update of Residual Vector
Keisuke Sawa†, Asuka Nakamura, Yoshitaka Maekawa
Information and Computer Science, Chiba Institute of Technology, 275-0016, Narashino, Japan
sawa@mae.cs.it-chiba.ac.jp

Copyright ©2024 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.

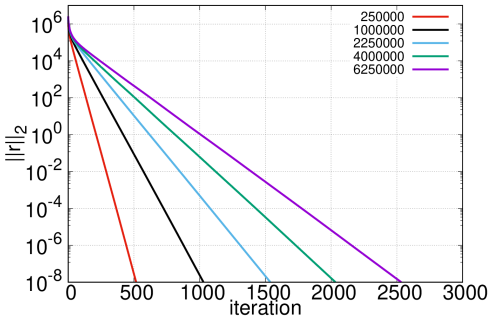

図 2: CG 法の $||\boldsymbol{r}||_2$ の推移

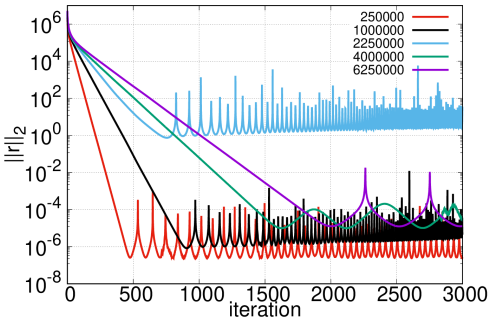

図 3: Pipelined Chronopoulos CG 法の $||\boldsymbol{r}||_2$ の推移

3.3 残差ベクトル更新方式の切替え

3.2 節より，Pipelined Chronopoulos CG 法は振動開始までの $||\boldsymbol{r}||_2$ が単調減少する傾向が確認できる．このため，提案手法では，Pipelined Chronopoulos CG 法の実行中に $||\boldsymbol{r}_{(k)}||_2 - ||\boldsymbol{r}_{(k-1)}||_2 > 0$ となるタイミングで求解手法を CG 法に切り替える．図 4 に提案手法の $\boldsymbol{r}$ の推移を示す．図 4 より，提案手法は，ほとんどの問題で高い精度の解を得られることが分かる．元数 225 万の問題では振動が発生したが，解の精度は Pipelined Chronopoulos CG 法よりも高い．

最後に，PE 数の違いによる有効性を確かめるために表 1 に提案手法が $||\boldsymbol{r}||_2 < 10^{-8}$ の解を求めるまでの反復回数を示す．表 1 の PE 数 1 は，既存の CG 法を表す．表 1 の合計に数値がないものは，収束しない条件である．同じ問題に対する反復回数や収束の可否が PE 数の違いで異なる理由は，図 1 の $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$ および $\boldsymbol{w}_1$，$\boldsymbol{w}_2$ の組合せが PE 数ごとに異なり，$\boldsymbol{q}_2$ を算出するための reduction 演算の順序が変化するためである．また，提案手法は，$||\boldsymbol{r}||_2$ の更新方式を切り替えるとき，丸め誤差を含むパラメータを引き継ぎ CG 法に移行するため，切り替え後の収束性に違いが生じる．

4 おわりに

本研究は，Pipelined Chronopoulos CG 法の収束性を向上するために，残差ベクトルの更新方式を切り替える手法を提案した．評価の結果，残差ベクトル更新方式の切り替えにより，Pipelined Chronopoulos CG 法よりも高精度な残差 10^{-8} 以下な解を提案手法で得ることを確認した．今後の課題は，求解対象とする問題の特性が残差ベクトル更新方式に与える影響を明らかにし，切替えタイミングを一般化することである．

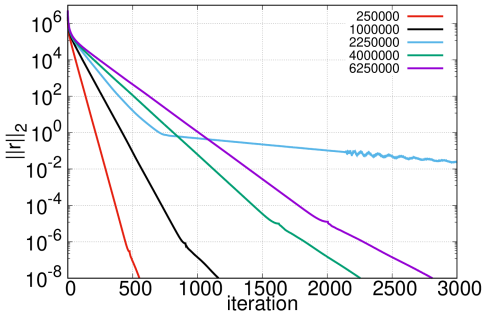

図 4: 提案手法の $||\boldsymbol{r}||_2$ の推移

表 1: 提案手法の反復回数

元数	PE 数	CG 法	Pipelined Chronopoulos CG 法	合計
25 万	1	501	-	501
	2	55	491	546
	4	71	481	552
	8	74	477	551
	16	84	488	572
100 万	1	994	-	994
	2	1003	4	1007
	4	215	908	1123
	8	256	907	1163
	16	253	880	1133
225 万	1	1482	-	1482
	2	396	1241	1637
	4	390	1270	1660
	8	-	1756	-
	16	-	-	-
400 万	1	1968	-	1968
	2	2243	11	2254
	4	574	1647	2221
	8	629	1627	2256
	16	-	1003	-
625 万	1	2451	-	2451
	2	2816	9	2825
	4	71	1965	2761
	8	807	2005	2812
	16	878	1947	2825

参考文献

[1] P. Ghysels, W. Vanroose：Hiding global synchronization latency in the preconditioned Conjugate Gradient algorithm, Parallel Computing, Vol.40, No.7, pp.224-238 (2014).

[2] 中島 研吾，荻田 武史：パイプライン型アルゴリズムによる並列共役勾配法の安定性評価，情報処理学会研究報告ハイパフォーマンスコンピューティング (HPC), Vol.2018-HPC-167, No.26, pp.1-9 (2018).

Copyright ©2024 Information Processing Society of Japan.
All Rights Reserved.