

5. LK の証明のプログラミング

島内剛一(教育大)

本研究は、数学における証明を自動計算機に行わせることを目的とする。そのためには、基礎として適当な論理の体系を選択しなければならないが、われわれは

- 1) 論理的に取り扱いやすいこと。
- 2) プログラミング技術上、取扱いやすいこと。
- 3) 容易に変形、拡張しうること。

という3つの観点から、まずG.Gentzenの体系、すなわち、LKをとりに上げこれを適当に修正、変更した。それが第1図である。

Beginning Sequence : $\Gamma, D, \Delta \vdash D, \theta$

Inference :

$$\frac{A, \Gamma, \Delta \quad B, \Gamma, \Delta}{\Gamma, A \wedge B, \Delta} \qquad \frac{\neg A, \neg B, \Gamma, \Delta}{\Gamma, \neg(A \wedge B), \Delta}$$

$$\frac{\neg A, B, \Gamma, \Delta \quad A, B, \Gamma, \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B, \Delta} \qquad \frac{A, B, \Gamma, \Delta \quad \neg A, \neg B, \Gamma, \Delta}{\Gamma, \neg(A \rightarrow B), \Delta}$$

$$\frac{A(a), \Gamma, \Delta}{\Gamma, \forall x A(x), \Delta} \qquad \frac{\neg A(\alpha), \Gamma, \Delta, \neg \forall x A(x)}{\Gamma, \neg \forall x A(x), \Delta}$$

(a : eigen variable) (α : alah variable)

第 1 図

ここに、 \wedge, \neg, \forall は論理記号、 A, B, C, D, \dots などはすべて命題、 Γ, Δ, \dots などは命題の例(sequence)をあらわす。

sequence " A, B, C, \dots, D " は、 A, B, C, \dots, D のうち少なくとも一つが正しいという意味である。

(E5)

証明はまず Beginning Sequence の形の sequence から始められ、ここにかかげられた6種の inference を使用することによって、下へ下へと延長される。かくして、一つの証明の一番下に来ることのできる sequence が証明される (provable な) sequence に他ならない。

例1, 例2は, この論理体系における証明の例である。

なお, われわれの構成した論理体系は, Gentzen の LK と全く同じ能力をもつことが証明されることを注意しておこう。したがって, 今後簡単のために, われわれの体系を LK と呼ぶことにする。

programming は第2図の block diagram にしたがって行なわれる。この chart にしたがえば, LK において証明される sequence に対しては, 原理的に必ずその証明がえられるようになっている。

ただし, それを保証するためには, 若干の論理的考察がなされなければならない。またこの block chart における記号 $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ は, 画期的な概念をあらわすものであつて, われわれは *alah variable* とよぶ。その主な意義は証明を構成する際, 必要な変数の置換をいちじるしく reduce することにある。

自動計算機としては, TAC (TODAI AUTOMATIC COMPUTER) を使用した。これは次のような機能をもつ。

容量	2 進法	35桁	512語
レジスタ	Accumulator		
	MD-register		
	B-register		

われわれは, この研究を1959年10月7日にはじめ, 1960年1月中旬に完成の予定である。

附 記: 大磯におけるシンポジウム以後, 1月21日われわれはこの計画を完成し, 次の data を得た。

input routine	読み込みの時間	55.0sec.
master routine	"	3 min. 06.0sec.

例1. 配分律 $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ の証明

$(S_{14})' : \neg A, B, A \neg C$ $(S_{14})'' : \neg B, B, A, \neg C$

$S_{13} : B, A, (\neg A \wedge \neg B), \neg C$ $(S_{14}) : C, A, (\neg A \wedge \neg B), \neg C$

$(S_{13}) : \neg A \neg C, A, B$ $(S_{13})' : \neg B, \neg C, A, B$

$S_8 : A, (B \wedge C), (\neg A \wedge \neg B), \neg C$ $(S_9) : C, (B \wedge C), (\neg A \wedge \neg B), \neg C$

$S_{11} : \neg(A \wedge C), A, B$ $S_{12} : \neg(B \wedge C), A, B$ $(S_{11}) : \neg A, \neg C, C \neg$ $(S_{11})' : \neg B, \neg C, C$

$S_4 : (A \wedge C), (B \wedge C), (\neg A \wedge \neg B), \neg C$

$S_7 : A, B(\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$ $S_9 : \neg(A \wedge C), C$ $S_{10} : \neg(B \wedge C), C$

$S_3 : (\neg A \wedge \neg B), \neg C, \neg(\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$

$S_5 : \neg(\neg A \wedge \neg B), (\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$ $S_6 : C, (\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$

$S_1 : \neg(\neg(\neg A \wedge \neg B) \neg C), \neg(\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$

$S_2 : (\neg(\neg A \wedge \neg B) \neg C), (\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C))$

$S_0 : ((\neg(\neg A \wedge \neg B) \wedge C) \vdash \neg(\neg(A \wedge C) \wedge \neg(B \wedge C)))$

例2. 推移律 $\neg \forall x(Ax \vdash Bx), \neg \forall x(Bx \vdash Cx), \forall x(Ax \vdash Cx)$ の証明

α, β, γ に a を代入することによつて, S_{12} (Beginning Sequence) が得られる。

$(S_{12}) : Ba, Aa, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$ $(S_{12}) : \neg Ca, Aa, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$ *

$S_7 : B\beta, A\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$ $S_8 : \neg C\beta, A\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$ *

$S_6 : (B\beta \wedge \neg C\beta), A\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

$S_4 : A\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx), \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx)$

$S_3 : (A\alpha \wedge \neg B\alpha), \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg$ *

$S_2 : \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx),$ *

$S_1 : \neg(Aa \wedge \neg Ca), \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx),$ *

$S_0 : \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$ *

* $(S_{12}) : Ba, \neg Ba, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

$(S_{12}) : \neg Ca, \neg Ba, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

* $S_{10} : B\gamma, \neg B\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

$S_{11} : \neg C\gamma, \neg B\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

$S_9 : (B\gamma \wedge \neg C\gamma), \neg B\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx), \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

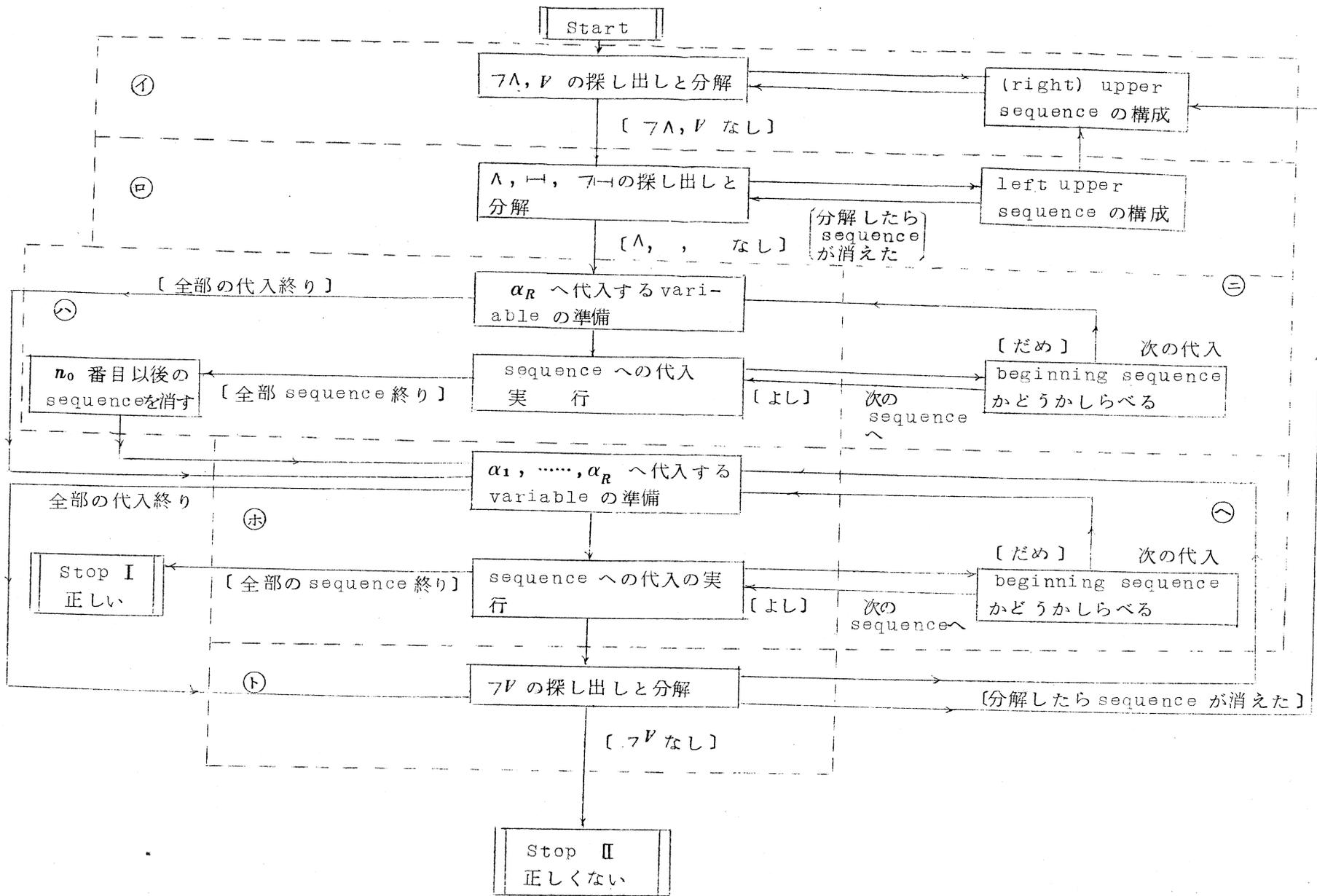
$S_5 : \neg B\alpha, \neg Aa, Ca, \neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx), \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx)$

* $(Bx \wedge \neg Cx), \neg \forall x \neg(Ax \wedge \neg Bx)$

* $\forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

* $\neg \forall x \neg(Bx \wedge Cx)$

* $\neg Cx), \forall x \neg(Ax \wedge \neg Cx)$



output routine 読み込みの時間	54.0 sec.
例1の証明に要する時間	3 sec.
例2 "	15.9 sec.
例3 "	15.0 sec.
例4 "	7.0 sec.

例 1. $(A \vee B) \wedge C \vdash (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$ (配分法則)

別紙に証明

例 2. $\neg \forall x (Ax \vdash Bx), \neg \forall x (Bx \vdash Cx), \forall x (Ax \vdash Cx)$

(包含関係の推移律) 別紙に証明

例 3. $\forall x (Ax \wedge Bx) \vdash \forall x Ax \wedge \forall x Bx$ (述語論理の一定理)

例 4. $\forall x \neg (A \wedge Bx) \vdash \neg (A \wedge \forall x Bx)$ (")

今後考えられなければならない問題は次のようなものであろう。

- 1) 現在の program を refine すること。
- 2) 数学者の演繹推理の様式を分析抽出して、これを flow chart にくみこむこと。
- 3) 数学者の発見過程の様式を分析抽出して、これを flow chart にくみこむこと。

総じて、これらの努力により、より広く、より多くの sequence を、より accessible な時間内に計算させる program を実現することであらう。

メンバー 藤 川 洋一郎 (立教大学)
 赤 撰 也 (立教大学)
 平 本 巖 (立教大学)
 西 村 敏 男 (法政大学)
 前 原 昭 二 (早稲田大学)
 岩 村 聯 (教育大学)
 島 内 剛 一 (教育大学)
 近 藤 頌 子 (津田塾大学)

本 PDF ファイルは 1960 年発行の「第 1 回プログラミング-シンポジウム報告集」をスキャンし、項目ごとに整理して、情報処理学会電子図書館「情報学広場」に掲載するものです。

この出版物は情報処理学会への著作権譲渡がなされていませんが、情報処理学会公式 Web サイトの https://www.ipsj.or.jp/topics/Past_reports.html に下記「過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について」を掲載して、権利者の検索をおこないました。そのうえで同意をいただいたもの、お申し出のなかったものを掲載しています。

過去のプログラミング・シンポジウム報告集の利用許諾について

情報処理学会発行の出版物著作権は平成 12 年から情報処理学会著作権規程に従い、学会に帰属することになっています。

プログラミング・シンポジウムの報告集は、情報処理学会と設立の事情が異なるため、この改訂がシンポジウム内部で徹底しておらず、情報処理学会の他の出版物が情報学広場 (=情報処理学会電子図書館) で公開されているにも拘らず、古い報告集には公開されていないものが少からずありました。

プログラミング・シンポジウムは昭和 59 年に情報処理学会の一部門になりましたが、それ以前の報告集も含め、この度学会の他の出版物と同様の扱いにしたいと考えます。過去のすべての報告集の論文について、著作権者（論文を執筆された故人の相続人）を探し出して利用許諾に関する同意を頂くことは困難ですので、一定期間の権利者検索の努力をしたうえで、著作権者が見つからない場合も論文を情報学広場に掲載させていただきたいと思えます。その後、著作権者が発見され、情報学広場への掲載の継続に同意が得られなかった場合には、当該論文については、掲載を停止致します。

この措置にご意見のある方は、プログラミング・シンポジウムの辻尚史運営委員長 (tsuji@math.s.chiba-u.ac.jp) までお申し出ください。

加えて、著作権者について情報をお持ちの方は事務局まで情報をお寄せくださいますようお願い申し上げます。

期間：2020 年 12 月 18 日～2021 年 3 月 19 日

掲載日：2020 年 12 月 18 日

プログラミング・シンポジウム委員会

情報処理学会著作権規程

<https://www.ipsj.or.jp/copyright/ronbun/copyright.html>