7X-04

保存型浅水方程式を用いた流体シミュレーションの検討

平江 陽香 †　　森島 繁生 ‡　　安東 遼一
† 早稲田大学　　‡ 早稲田大学理工学術院総合研究所

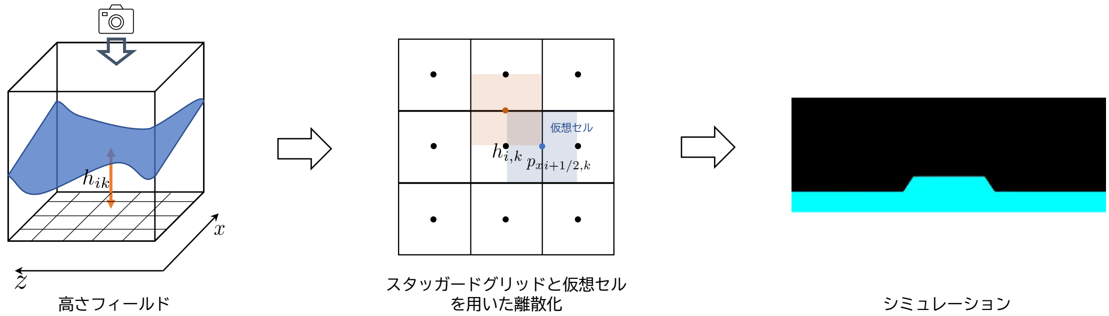

図 1: 提案手法の概要図

1. はじめに

流体現象を CG で再現するために物理ベースの流体シミュレーションが用いられる. 広範囲な川, 湖, 海などを扱う際は計算量が多くなるが, このような系には浅水方程式が用いられる [5]. これは三次元の流体計算を流体表面の二次元の計算に近似する手法であり, 計算が高速になる. 一方 CG 分野では, 非保存型の方程式を用いるために, 保存されるべき物理量である質量や運動量の保存性が失われる.

そこで本稿では, 質量及び運動量が保存する保存型の浅水方程式を用いた手法を提案する. まず空間微分には, スタッガードグリッドと仮想セルを用いた離散化手法により, 質量・運動量の保存性を保証する. さらに時間積分には陰解法を用いることで安定性を高める. 提案手法を Layton(2002) らの手法 [5] と比較検証することで, 質量・運動量の保存性に優れていることを示す.

2. 関連研究

2.1 浅水方程式

CG 分野における水のシミュレーションでは一般的に三次元の Navier-Stokes 方程式を解く.Stam(1999) は Navier-Stokes 方程式を項ごとに順に解く安定的な手法を提案した [6]. しかし, 広大な海や湖を対象とした場合, 三次元の方程式を解くためには, 計算コストが $O(N^3)$ で増加してしまうことが知られている. そこで Navier-Stokes 方程式の垂直方向の速度変化を無視する近似をとり, 高さフィールドを考えることで,$O(N^2)$ で計算できる浅水方程式がしばしば用いられる. 浅水方程式は次のように表される [1]. ここで h は高さ,$\boldsymbol{u}$ は水平方向の速度,g は重力加速度である.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\nabla\cdot(h\boldsymbol{u})=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-g\nabla h \tag{2}$$

これは非保存型の浅水方程式と呼ばれる. 式 (1) は連続の式,(2) はニュートンの運動の第 2 法則から導出される. Layton らは浅水方程式の移流項をセミラグランジュ法で解き, 残りの項を陰解法で解くことで安定性を高めた.

2.2 保存性

Layton らが提案した非保存型浅水方程式を解く場合, 移流計算のセミラグランジュ法により質量の総計を表す高さ場の積分が非保存となる. また, 非保存型の方程式 (1),(2) を使用することにより保存されるべき物理量 (質量, 運動量など) が保存されない. これらの非保存性により, 長時間・大規模なシミュレーションで計算誤差が起こるという問題がある.Lentine(2011) は移流計算を質量・運動量保存の形式にすることで保存性を高めることを提案した [4]. しかしこの手法は解の収束性の保証が無いため, 計算時間の予測が難しい点, 保存性を厳密に達成出来ない場合が想定される点で問題がある.

別なアプローチとしては, 保存型の浅水方程式を用いることが挙げられる. 数値計算の分野では, 後藤ら (1988) の研究 [3] を始めとして, 津波予測のための方程式として, 保存型浅水方程式に似た線形長波理論が検討されている. ただし, 数値計算の分野と CG 分野ではタイムステップや解像度のスケールが違うことに留意する必要がある. また CG 分野では,Zhu(2019) ら [2] が砂のシミュレーションを考える上で保存型浅水方程式を利用したが, 水を対象とした上記手法の適用は考慮されてこなかった.

本稿では,CG の水のシミュレーションを行う上で, 質量・運動量が保存する保存型浅水方程式を導入する.

3. 提案手法

本稿では高さ h, 運動量 $p=hu$ を変数に持つ以下の一次元の保存型浅水方程式を用いる.

$$\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial x}=0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p^2}{h}+\frac{gh^2}{2}\right)=0 \tag{4}$$

ここで g は重力加速度である. この方程式の離散化と連立方程式の解き方について説明していく.

3.1 方程式の離散化

高さ h を格子の中心, 運動量 p を格子の辺に取ったスタッガードグリッドを考える. 式 (3) の第 2 項はガウス

Examination of Fluid Simulation with Conservative Shallow Water Equations:
Haruka Hirae†, Shigeo Morishima‡, and Ryoichi Ando (†Waseda University, ‡Waseda Research Institute for Science and Engineering)

の発散定理により, 各セルの運動量の流出の和として離散化できる. よって式 (3) を一次元で離散化すると次のようになる.

$$h_i^{t+\Delta t}-h_i^t=-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(p_{i+1/2}-p_{i-1/2}\right) \tag{5}$$

また, 式 (4) を離散化する際は, 運動量 p をセルの中心, 高さ h をセルの辺に取った仮想セルを考える. 仮想セルを使うと式 (3) の第 2 項と同様に, 式 (4) の第 2 項も離散化できる. 従って, 式 (4) は式 (6) のように離散化できる. 値は必要に応じて補間しており, $p_{i+1}=\frac{1}{2}(p_{i+3/2}+p_{i+1/2})$, $p_i=\frac{1}{2}(p_{i+1/2}+p_{i-1/2})$ である.

$$\begin{aligned}p_{i+1/2}^{t+\Delta t}-p_{i+1/2}^t=&-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{p_{i+1}^2}{h_{i+1}}-\frac{p_i^2}{h_i}\right)\\&-\frac{g}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(h_{i+1}^2-h_i^2\right)\end{aligned} \tag{6}$$

3.2 陰解法による求解

本稿では, 安定性のために陰解法を用いて解くことを考える. 式 (5), 式 (6) に陰解法を用い, 連立方程式を立て,GMRES 法を用いて反復法で解く. 一次元の場合, 連立方程式は次のようになる.

$$h_i^{t+\Delta t}+\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{p_{i+1/2}^{t+\Delta t}-p_{i-1/2}^{t+\Delta t}\right\}=h_i^t \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{p_{i+3/2}^t+p_{i+1/2}^t}{h_{i+1}^t}-\frac{p_{i+1/2}^t+p_{i-1/2}^t}{h_i^t}\right)\right\}p_{i+1/2}^{t+\Delta t}\\&+\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(\frac{p_{i+3/2}^t+p_{i+1/2}^t}{h_{i+1}^t}p_{i+3/2}^{t+\Delta t}-\frac{p_{i+1/2}^t+p_{i-1/2}^t}{h_i^t}p_{i-1/2}^{t+\Delta t}\right)\\&-\frac{g}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left\{h_{i+1}^t h_{i+1}^{t+\Delta t}-h_i^t h_i^{t+\Delta t}\right\}\\&=p_{i+1/2}^t\end{aligned} \tag{8}$$

4. 実験

4.1 実験概要

提案手法の有効性を確かめるため, 非保存型浅水方程式を用いたシミュレーション [5] との比較実験を行った. Dam Break のシーンを非保存型の陽解法・陰解法, 保存型の陽解法・陰解法の 4 通りで比較する. それぞれの場合における, 各セルに定義された高さの和と運動量の和をフレーム毎に計測して比較した. タイムステップ Δt は $\frac{1}{600}$, 解像度は 64 に設定した.

4.2 結果

保存型のシミュレーションを行ったところ, 陽解法では振動が激しく, 陰解法では安定的に計算できた. また 4 通りの場合において, 高さ・運動量の和の比較を行った結果を図 2, 図 3 に示す. 図 2, 図 3 は値が一定なほど, 保存されていることを示す. これより保存型の方が非保存型よりも質量・運動量の保存性に優れていることが確認できた.

以上の結果から, 保存性の高い保存型と安定性の高い陰解法を組み合わせた手法が, 質量・運動量の保存を実現する手法として望ましいと考えられる.

5. おわりに

本稿では質量・運動量が共に保存する保存型浅水方程式を用いて一次元のシミュレーションを行うことを提案し, 保存性が良好であることを示した. 今後は二次元に拡張することや剛体とのカップリングを加味したシーンを実装することで, より保存性が失われる場合における保存型浅水方程式の有効性を確認したい.

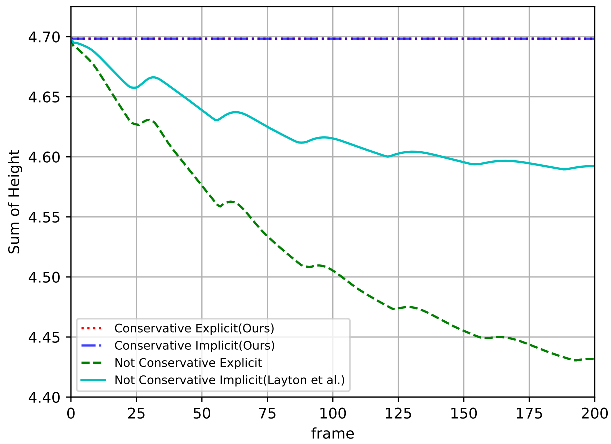

図 2: 各セルの中心に定義された高さの和

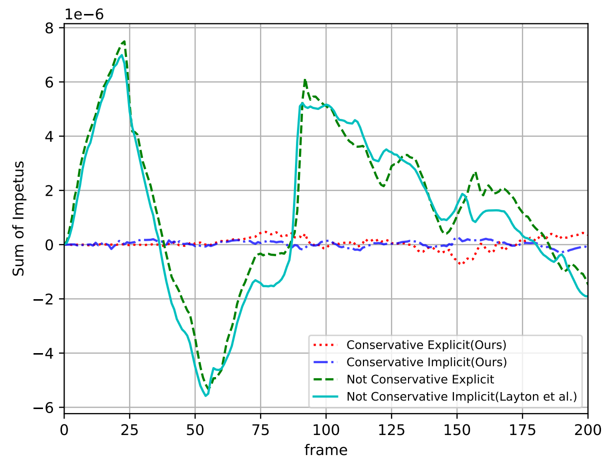

図 3: 各セルの辺に定義された運動量の和

謝辞

本研究は,JSPS 科研費 (19H04137, 21H05054) の補助を受けています.

参考文献

[1] Robert. Bridson. *"Fluid simulation for computer graphics"*. AK Peters/CRC Press, 2015.

[2] Zhu Kuixin. *et al.* "Shallow Sand Equations: Real-Time Height Field Simulation of Dry Granular Flows.". *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics 27.3*, pp. 2073–2084, 2019.

[3] 後藤智明.*et al.* "遠地津波の数値計算に関する研究 その 1 支配方程式と差分格子間隔.". 地震 第 2 輯 41, pp. 515–526, 1988.

[4] Michael. *et al.* Lentine. "Mass and Momentum Conservation for Fluid Simulation". *Proceedings of the 2011 ACM SIGGRAPH/Eurographics Symposium on Computer Animation.*, 2011.

[5] LAYTON A. T.and VAN DE PANNE M. "A numerically efficient and stable algorithm for animating water waves". *The Visual Computer 18*, pp. 41–53, 2002.

[6] Jos. Stam. "Stable Fluids". *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pp. 121–128, 1999.